ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

3/I-77г

Л-84

5162/2-76

Р2 - 9928

И.Лукач

СИММЕТРИЧНОЕ ИСКЛЮЧЕНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

1976

P2 - 9928

И.Лукач*

СИММЕТРИЧНОЕ ИСКЛЮЧЕНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Направлено в ТМФ

* Институт физики Словацкой Академии наук.

ВВЕДЕНИЕ

Задача трех тел привлекает внимание физиков, механиков и астрономов на протяжении нескольких столетий. Первоначально это была так называемая классическая задача трех тел, взаимодействующих согласно закону Ньютона. Наибольших успехов в решении этой задачи добился Лагранж[1], который нашел два частных случая решения[2,3]. В настоящее время большое внимание уделяется нерелятивистской квантовомеханической задаче трех тел, ей ежегодно посвящается большое количество работ. Общепризнанным стал тот факт, что трехчастичные силы играют немаловажную роль в сложных ядрах[4]. Оказывается также, что нерелятивистская кварковая модель, основанная на группе $SU(3)$, тоже отражает некоторые черты этой задачи[5].

Несмотря на различие классической и квантовомеханической задач трех тел, в их решении имеются и некоторые общие моменты, в частности исключение центра тяжести системы трех тел и введение новых независимых координат. Действительно, три свободные частицы имеют девять степеней свободы, поэтому первоочередной задачей как в классической, так и в квантовомеханической задачах трех (и более) свободных или взаимодействующих тел является исключение трех степеней свободы, связанных с движением центра тяжести системы, и введение новых координат, соответствующих остающимся степеням свободы. Потенциальная энергия ввиду трансляционной инвариантности пространства не зависит от координат центра тяжести, а является функцией только этих новых координат.

Как известно, задача исключения центра тяжести и введения новых координат для системы трёх тел была впервые решена К.Г.Якоби в его работе /6/ и затем обобщена на случай N-тел в работе Аллегра /7/. Пусть $\vec{R}_i$, $i = 1,2,3$, представляют собой соответствующие радиус-векторы трёх частиц с массами m_1, m_2, m_3 (рис. 1), причем $m_1 \neq m_2 \neq m_3$*. Кинетическая энергия T_0 этой системы имеет вид

$$T_0 = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{\vec{R}}_1^2 + m_2\dot{\vec{R}}_2^2 + m_3\dot{\vec{R}}_3^2\right). \qquad (1)$$

Координаты Якоби, которые имеют простой и наглядный геометрический смысл, вводятся следующим образом (см. рис. 2а):

$$\begin{aligned}
\vec{r}_0 &= (m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2 + m_3\vec{R}_3)\cdot m_0^{-1},\\
\vec{r}_{12} &= \vec{R}_1 - \vec{R}_2, \qquad\qquad (2)\\
\vec{r}_{12,3} &= \vec{R}_3 - (m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2)\cdot(m_1+m_2)^{-1},
\end{aligned}$$

где $m_0 = m_1 + m_2 + m_3$. Вектор $\vec{r}_0$ определяет положение

---

*Предположение $m_1 = m_2 = m_3$, которое часто встречается в работах по обсуждаемой проблеме, означает всегда введение дополнительного вырождения по массам.

центра тяжести, а векторы $\vec{r}_{12}$, $\vec{r}_{12,3}$ представляют собой некоторые относительные координаты. Однако, несмотря на геометрическую наглядность координат (2) и тот факт, что эти координаты обладают определённой симметрией по отношению к взаимной замене первой и второй частиц, важнейшим недостатком координат Якоби является то обстоятельство, что массы и координаты всех трёх частиц выступают несимметричным образом. Этот факт является особенно существенным в квантовомеханической задаче трёх тел, так как трёхчастичная волновая функция должна обладать определённой симметрией по отношению к группе перестановок этих трёх частиц.

На самом деле в случае различных масс частиц нет никаких оснований отдавать предпочтение выбору координат Якоби в виде (2) перед другими двумя возможными выборами координат Якоби для системы трёх частиц, которые определяются следующим образом (см. рис. 2б, 2в):

$$\begin{aligned}
\vec{r}_0 &= (m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2 + m_3\vec{R}_3)\cdot m_0^{-1},\\
\vec{r}_{23} &= \vec{R}_2 - \vec{R}_3, \qquad\qquad (3)\\
\vec{r}_{23,1} &= \vec{R}_1 - (m_2\vec{R}_2 + m_3\vec{R}_3)\cdot(m_2+m_3)^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}_0 &= (m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2 + m_3\vec{R}_3)\cdot m_0^{-1},\\
\vec{r}_{31} &= \vec{R}_3 - \vec{R}_1, \qquad\qquad (4)\\
\vec{r}_{31,2} &= \vec{R}_2 - (m_3\vec{R}_3 + m_1\vec{R}_1)\cdot(m_3+m_1)^{-1}.
\end{aligned}$$

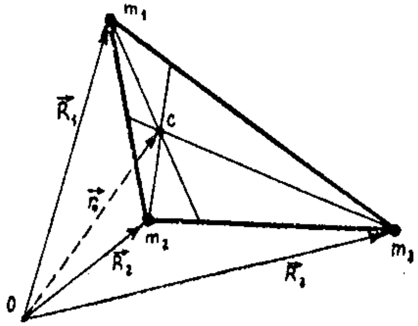

Рис. I

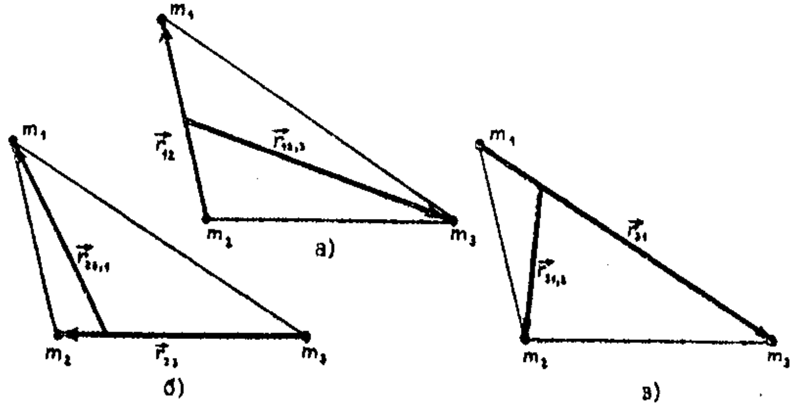

Рис. 2

В зависимости от конкретного выбора координат Якоби из возможных наборов (2) - (4) нетрудно получить для кинетической энергии (1) три соответствующих выражения. При этом потенциальная энергия взаимодействия трех частиц также выражается тремя способами через относительные координаты Якоби. Для всех трех случаев полная энергия системы будет иметь вид:

$$E_0=\frac{1}{2}\left(m_0\dot{\vec r}_0^{\,2}+\mu_{ik}\dot{\vec r}_{ik}^{\,2}+\mu_{ik,l}\dot{\vec r}_{ik,l}^{\,2}\right)+V\left(\vec r_{ik},\vec r_{ik,l}\right), \qquad (5)$$

где $i \neq k \neq l = 1,2,3$ и

$\mu_{ik} = m_i m_k (m_i+m_k)^{-1}$, $\mu_{ik,l} = \mu_{ik} m_l (\mu_{ik}+m_l)^{-1}$.

Соответственно можно записать в координатах Якоби и уравнение Шредингера данной задачи трех тел /8,9/:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{1}{m_0}\frac{\partial^2}{\partial\vec r_0^{\,2}}+\frac{1}{\mu_{ik}}\frac{\partial^2}{\partial\vec r_{ik}^{\,2}}+\frac{1}{\mu_{ik,l}}\frac{\partial^2}{\partial\vec r_{ik,l}^{\,2}}\right]+V\left(\vec r_{ik},\vec r_{ik,l}\right)-E\right\}\Psi_{[\varepsilon]}\left(\vec r_0,\vec r_{ik},\vec r_{ik,l}\right)=0. \qquad (6)$$

Тот факт, что волновые функции, являющиеся решениями уравнения (6), не обладают нужной симметрией по отношению к перестановкам всех трех частиц, вызывает на практике определенные затруднения. Нужные решения, имеющие необходимую перестановочную симметрию, приходится записывать в виде линейных комбинаций (т.е. в виде некоторых сумм по перестановкам частиц) от этих частных решений. Обращение с такими функциями, однако, в большинстве случаев крайне неудобно.

В группе перестановок трёх частиц, обозначаемой как S_3, существует шесть перестановок, из которых три соответствуют взаимной замене двух из трёх частиц (нечётные перестановки) и остальные - циклической замене всех трех частиц (чётные перестановки). Возникает, однако, вполне естественный вопрос: нельзя ли найти такое линейное преобразование радиус-векторов $\vec R_i$, чтобы новые координаты были полностью симметричны по отношению к перестановкам всех трёх частиц (аналогично тому, как это имеет место для координаты центра тяжести)? Тогда при конкретном решении как классической, так и квантовомеханической задач, мы с самого начала имели бы дело с координатами, обладающими нужной симметрией относительно группы S_3. Известно, что задача определения коэффициентов вышеупомянутого линейного преобразования является неопределенной (для шести коэффициентов имеются три условия) и именно этот произвол используется при введении координат Якоби/10/.

В настоящей работе показано, что на поставленный выше вопрос существует положительный ответ, т.е. для трех частиц можно ввести такие относительные координаты, что они будут симметричны относительно всех возможных перестановок трех частиц. Эти координаты мы назовем обобщенными координатами Якоби для системы трех тел.

О б о б щ ё н н ы е к о о р д и н а т ы Я к о б и

В соответствии с вышесказанным введём обобщённые координаты Якоби $\vec{r}_0$, $\vec{r}_\alpha$, $\vec{r}_\beta$ как следующее линейное преобразование:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_0 &= (m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2 + m_3\vec{R}_3)\cdot m_0^{-1},\\
\vec{r}_\alpha &= \alpha_1\vec{R}_1 + \alpha_2\vec{R}_2 + \alpha_3\vec{R}_3,\\
\vec{r}_\beta &= \beta_1\vec{R}_1 + \beta_2\vec{R}_2 + \beta_3\vec{R}_3,
\end{aligned}\tag{7}$$

где шесть коэффициентов преобразования α_i и β_i ($i = 1,2,3$) представляют собой некоторые безразмерные функции масс частиц, т.е. $\alpha_i = \alpha_i(m_1, m_2, m_3)$, $\beta_i = \beta_i(m_1, m_2, m_3)$, и обладают определённой симметрией по отношению к перестановкам частиц. Потребуем, чтобы при замене $m_i \to m_k$ в α_i и β_i имели место преобразования

$$\alpha_i \to \alpha_k\,,\quad \beta_i \to \beta_k. \tag{8}$$

Обозначив определитель преобразования (7) через Δ, где

$$\Delta = \left[m_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + m_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + m_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\right]\cdot m_0^{-1}, \tag{9}$$

находим обратное преобразование*

$$\begin{aligned}
\vec{R}_1 &= \left[m_0(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\vec{r}_0 + (m_3\beta_2 - m_2\beta_3)\vec{r}_\alpha + (m_2\alpha_3 - m_3\alpha_2)\vec{r}_\beta\right]\cdot(m_0\Delta)^{-1},\\
\vec{R}_2 &= \left[m_0(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\vec{r}_0 + (m_1\beta_3 - m_3\beta_1)\vec{r}_\alpha + (m_3\alpha_1 - m_1\alpha_3)\vec{r}_\beta\right]\cdot(m_0\Delta)^{-1},\\
\vec{R}_3 &= \left[m_0(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\vec{r}_0 + (m_2\beta_1 - m_1\beta_2)\vec{r}_\alpha + (m_1\alpha_2 - m_2\alpha_1)\vec{r}_\beta\right]\cdot(m_0\Delta)^{-1}.
\end{aligned}\tag{10}$$

Исходя из требования, чтобы кинетическая энергия (I), записанная в координатах (7), имела также вид диагональной квадратичной формы

$$T_0 = \frac{1}{2}\left(m_0\dot{\vec{r}}_0^{\,2} + \mu_\alpha\dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} + \mu_\beta\dot{\vec{r}}_\beta^{\,2}\right), \tag{11}$$

---

* Очевидно, что в связи с условиями (8), налагаемыми при преобразованиях перестановок на коэффициенты α_i и β_i, определитель Δ при нечётной перестановке частиц меняет знак.

где μ_α и μ_β – две некоторые фиктивные и до сих пор не определённые массы, находим условия, которым должны удовлетворять коэффициенты α_i и β_i. Эти шесть условий после несложных преобрзований приводятся к виду

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2\left(\frac{\alpha_1^2}{m_1}+\frac{\alpha_2^2}{m_2}+\frac{\alpha_3^2}{m_3}\right)+(\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2\left(\frac{\beta_1^2}{m_1}+\frac{\beta_2^2}{m_2}+\frac{\beta_3^2}{m_3}\right)- \qquad (12)$$

$$-2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{m_1}+\frac{\alpha_2\beta_2}{m_2}+\frac{\alpha_3\beta_3}{m_3}\right)=0,$$

$$m_0\left(\frac{\beta_1^2}{m_1}+\frac{\beta_2^2}{m_2}+\frac{\beta_3^2}{m_3}\right)-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2=\frac{\mu_\alpha(m_0\Delta)^2}{m_1\cdot m_2\cdot m_3}, \qquad (13)$$

$$m_0\left(\frac{\alpha_1^2}{m_1}+\frac{\alpha_2^2}{m_2}+\frac{\alpha_3^2}{m_3}\right)-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2=\frac{\mu_\beta(m_0\Delta)^2}{m_1\cdot m_2\cdot m_3}, \qquad (14)$$

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\left(\frac{\beta_1^2}{m_1}+\frac{\beta_2^2}{m_2}+\frac{\beta_3^2}{m_3}\right)-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{m_1}+\frac{\alpha_2\beta_2}{m_2}+\frac{\alpha_3\beta_3}{m_3}\right)=0, \qquad (15)$$

$$(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\left(\frac{\alpha_1^2}{m_1}+\frac{\alpha_2^2}{m_2}+\frac{\alpha_3^2}{m_3}\right)-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{m_1}+\frac{\alpha_2\beta_2}{m_2}+\frac{\alpha_3\beta_3}{m_3}\right)=0, \qquad (16)$$

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\beta_1+\beta_2+\beta_3)-m_0\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{m_1}+\frac{\alpha_2\beta_2}{m_2}+\frac{\alpha_3\beta_3}{m_3}\right)=0. \qquad (17)$$

Заметим, что условие (12) непосредственно следует из условий (15) и (16) и поэтому не содержит никакой новой информации относительно α_i и β_i. Из условий (15) и (17), а также - (16) и (17), с учетом соотношений (13) и (14), следует

$$\frac{\mu_\alpha(m_0\Delta)^2}{m_1\cdot m_2\cdot m_3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0, \quad \frac{\mu_\beta(m_0\Delta)^2}{m_1\cdot m_2\cdot m_3}(\beta_1+\beta_2+\beta_3)=0. \qquad (18)$$

Ввиду того, что $\Delta\neq 0$, условия (18) означают, что коэффициенты α_i и β_i должны удовлетворять условиям

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0, \quad \beta_1+\beta_2+\beta_3=0. \qquad (19)$$

Соотношение (17) с учетом условия (19) определяет третье условие, которому должны удовлетворять коэффициенты α_i и β_i:

$$\frac{\alpha_1\beta_1}{m_1}+\frac{\alpha_2\beta_2}{m_2}+\frac{\alpha_3\beta_3}{m_3}=0. \qquad (20)$$

В результате соотношения (13) и (14) принимают следующий вид:

$$\frac{\beta_1^2}{m_1}+\frac{\beta_2^2}{m_2}+\frac{\beta_3^2}{m_3}=\frac{\mu_\alpha m_0\Delta^2}{m_1\cdot m_2\cdot m_3}, \quad \frac{\alpha_1^2}{m_1}+\frac{\alpha_2^2}{m_2}+\frac{\alpha_3^2}{m_3}=\frac{\mu_\beta m_0\Delta^2}{m_1\cdot m_2\cdot m_3}. \qquad (21)$$

Никаких других условий для α_i и β_i из вида формы кинетической энергии (11) получить нельзя. Поэтому сделаем некоторые предположения относительно вида этих коэффициентов, сохраняя требование справедливости преобразований (8) при перестановках частиц.

Введём для удобства величины, обратные массам частиц, т.е. положим $m_i = a_i^{-1}$. Предположим, что коэффициенты α_i и β_i имеют следующий простой вид:

$$\alpha_i=\frac{A_\alpha}{\theta_\alpha - a_i}, \qquad \beta_i=\frac{A_\beta}{\theta_\beta - a_i}, \qquad (22)$$

где четыре неизвестные величины A_α, A_β, θ_α, θ_β являются некоторыми симметричными функциями параметров a_1, a_2, a_3, т.е. масс всех трёх частиц. Такая форма α_i и β_i в (22) обладает всеми необходимыми свойствами по отношению к перестановкам частиц типа (8).

Условия (19) и (20), которым должны удовлетворять коэффициенты α_i и β_i, записанные в форме (22), определяют величины θ_α и θ_β. Чтобы выполнялись условия (19) и (20), необходимо выполнение следующих трёх тождеств:

$$(\theta_\alpha-a_2)(\theta_\alpha-a_3)+(\theta_\alpha-a_3)(\theta_\alpha-a_1)+(\theta_\alpha-a_1)(\theta_\alpha-a_2)\equiv 0,$$

$$(\theta_\beta-a_2)(\theta_\beta-a_3)+(\theta_\beta-a_3)(\theta_\beta-a_1)+(\theta_\beta-a_1)(\theta_\beta-a_2)\equiv 0, \tag{23}$$

$$a_1(\theta_\alpha-a_2)(\theta_\alpha-a_3)(\theta_\beta-a_2)(\theta_\beta-a_3)+a_2(\theta_\alpha-a_3)(\theta_\alpha-a_1)\cdot$$
$$(\theta_\beta-a_3)(\theta_\beta-a_1)+a_3(\theta_\alpha-a_1)(\theta_\alpha-a_2)(\theta_\beta-a_1)(\theta_\beta-a_2)\equiv 0.$$

Если ввести элементарные симметричные многочлены g_1, g_2, g_3, образованные из параметров a_1, a_2, a_3,

$$g_1=a_1+a_2+a_3,\quad g_2=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1,\quad g_3=a_1a_2a_3, \tag{24}$$

то первые два условия в (23) сводятся к одному и тому же квадратичному уравнению

$$3\theta^2-2g_1\theta+g_2=0. \tag{25}$$

Соответственно, величины θ_α и θ_β $(\theta_\alpha<\theta_\beta)$ как симметричные функции масс частиц , имеют явный вид

$$\theta_\alpha=\frac{1}{3}\left(g_1-\sqrt{g_1^2-3g_2}\right),\quad \theta_\beta=\frac{1}{3}\left(g_1+\sqrt{g_1^2-3g_2}\right), \tag{26}$$

причем, естественно, имеет место

$$3(\theta_\alpha+\theta_\beta)=2g_1,\qquad 3\theta_\alpha\theta_\beta=g_2. \tag{27}$$

Если θ_α и θ_β являются корнями уравнения (25), то третье условие в (23) превращается в тождество. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что выполняются следующие тождества:

$$3(\theta_\alpha-a_1)(\theta_\beta-a_1)=g_2-2a_1g_1+3a_1^2=(a_1-a_2)(a_1-a_3),$$
$$3(\theta_\alpha-a_2)(\theta_\beta-a_2)=g_2-2a_2g_1+3a_2^2=(a_2-a_3)(a_2-a_1), \tag{28}$$
$$3(\theta_\alpha-a_3)(\theta_\beta-a_3)=g_2-2a_3g_1+3a_3^2=(a_3-a_1)(a_3-a_2).$$

Перейдём теперь к определению величин A_α и A_β в (22). Для этой цели используем соотношения (21). Прежде всего, необходимо отметить, что в силу условий (19) определитель преобразования (7) можно записать в виде

$$\Delta=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1. \tag{29}$$

Записывая коэффициенты α_i и β_i в формулах (29) в виде (22) и учитывая тождества (28), находим, что

$$\Delta=\frac{9A_\alpha A_\beta(\theta_\beta-\theta_\alpha)}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)}. \tag{30}$$

Вычисляя левые стороны соотношений (21) с помощью коэффициентов α_i и β_i в виде (22), получаем

$$a_1\alpha_1^2+a_2\alpha_2^2+a_3\alpha_3^2=\frac{2\theta_\alpha(g_1-3\theta_\alpha)A_\alpha^2}{P(\theta_\alpha)}=\mu_\beta g_2\Delta^2,$$
$$a_1\beta_1^2+a_2\beta_2^2+a_3\beta_3^2=\frac{2\theta_\beta(g_1-3\theta_\beta)A_\beta^2}{P(\theta_\beta)}=\mu_\alpha g_2\Delta^2, \tag{31}$$

где через $P(\theta)$ обозначен полином третьей степени

$$P(\theta)=(\theta-a_1)(\theta-a_2)(\theta-a_3)=\theta^3-g_1\theta^2+g_2\theta-g_3. \tag{32}$$

Подставляя теперь в соотношения (31) выражение (30) для определителя Δ и учитывая второе соотношение в (27) и тот факт, что имеют место тождества

$$-27P(\theta_\alpha)P(\theta_\beta)=\left[(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\right]^2,$$
$$4(g_1-3\theta_\alpha)(3\theta_\beta-g_1)=9(\theta_\beta-\theta_\alpha)^2, \tag{33}$$

находим

$$A_\alpha^2 = \frac{P(\theta_\alpha)}{2\mu_\alpha \theta_\alpha (q_1 - 3\theta_\alpha)}, \quad A_\beta^2 = \frac{P(\theta_\beta)}{2\mu_\beta \theta_\beta (q_1 - 3\theta_\beta)}. \qquad (34)$$

Если подставить формулы (34) в выражение (30) для определителя Δ и снова принять во внимание тождества (33), то получим

$$\Delta = (\mu_\alpha \mu_\beta q_2)^{-1}. \qquad (35)$$

Выражение (35) для Δ упрощает формулы (21), которые приобретают вид

$$a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2 + a_3\alpha_3^2 = \mu_\alpha^{-1}, \quad a_1\beta_1^2 + a_2\beta_2^2 + a_3\beta_3^2 = \mu_\beta^{-1}. \qquad (36)$$

Таким образом, коэффициенты α_i и β_i определены формулами (22), причём величины θ_α и θ_β выражаются формулами (26), а величины A_α и A_β выражаются, соответственно, через θ_α и θ_β с помощью формул (34). В формулы (34), определяющие явный вид A_α и A_β, входят, однако, ещё величины μ_α и μ_β, которые до сих пор не были определены как функции масс частиц m_1, m_2 и m_3. Чтобы определить массы μ_α и μ_β, необходимо принять во внимание тот факт, что длины векторов $\vec{r}_\alpha$ и $\vec{r}_\beta$ в (7) можно произвольно "растягивать", поскольку коэффициенты α_i и β_i определены с точностью до некоторого числового множителя. Для того чтобы исключить этот произвол, выберем нормировку α_i и β_i таким образом, чтобы имели место равенства

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1. \qquad (37)$$

Подставляя в условия (37) нужные выражения для α_i и β_i, после несложных преобразований получаем два простых равенства, определяющих μ_α и μ_β через θ_α и θ_β, а именно

$$\mu_\alpha \theta_\alpha = 1, \quad \mu_\beta \theta_\beta = 1. \qquad (38)$$

Далее, учитывая уравнение, которому удовлетворяют θ_α и θ_β, нетрудно получить уравнение, определяющее массы фиктивных частиц μ_α и μ_β в выражении для кинетической энергии (11):

$$(m_1+m_2+m_3)\mu^2 - 2(m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1)\mu + 3m_1m_2m_3 = 0. \qquad (39)$$

Необходимо отметить, что в силу соотношений (38) и (27) определитель линейного преобразования (7) имеет значение $\Delta = (-1)^P/\sqrt{3}$, где P обозначает чётность перестановки в системе трёх частиц.

Итак, задача, сформулированная в начале данной работы, полностью решена, так как найдено линейное преобразование (7) с коэффициентами, обладающими нужными свойствами по отношению к перестановкам всех частиц. Эти коэффициенты (в предположении $m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3$) имеют следующий явный вид:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{(\theta_\alpha - a_2)(\theta_\alpha - a_3)}{2(\theta_\alpha - a_1)(q_1 - 3\theta_\alpha)}}, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{(\theta_\beta - a_2)(\theta_\beta - a_3)}{2(\theta_\beta - a_1)(q_1 - 3\theta_\beta)}},$$

$$\alpha_2 = -\sqrt{\frac{(\theta_\alpha - a_3)(\theta_\alpha - a_1)}{2(\theta_\alpha - a_2)(q_1 - 3\theta_\alpha)}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{(\theta_\beta - a_3)(\theta_\beta - a_1)}{2(\theta_\beta - a_2)(q_1 - 3\theta_\beta)}}, \qquad (40)$$

$$\alpha_3 = -\sqrt{\frac{(\theta_\alpha - a_1)(\theta_\alpha - a_2)}{2(\theta_\alpha - a_3)(q_1 - 3\theta_\alpha)}}, \quad \beta_3 = -\sqrt{\frac{(\theta_\beta - a_1)(\theta_\beta - a_2)}{2(\theta_\beta - a_3)(q_1 - 3\theta_\beta)}}.$$

Коэффициенты α_i и β_i удовлетворяют еще ряду соотношений помимо приведенных выше. Так как при практическом использовании коэффициентов α_i и β_i многие из этих соотношений могут понадобиться, то эти соотношения приведены отдельно в таблице I.

Таблица I

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \qquad \beta_1+\beta_2+\beta_3=0$ $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1 \qquad \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1$ $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0$
$a_1\alpha_1^2+a_2\alpha_2^2+a_3\alpha_3^2=\theta_\alpha \quad a_1\beta_1^2+a_2\beta_2^2+a_3\beta_3^2=\theta_\beta$ $a_1\alpha_1\beta_1+a_2\alpha_2\beta_2+a_3\alpha_3\beta_3=0$
$\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=-1/2 \quad \beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_3\beta_1=-1/2$ $\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\alpha_1^2=1/4 \quad \beta_1^2\beta_2^2+\beta_2^2\beta_3^2+\beta_3^2\beta_1^2=1/4$ $\alpha_1^2\beta_1^2+\alpha_2^2\beta_2^2+\alpha_3^2\beta_3^2=1/6$ $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2+\alpha_2\alpha_3\beta_2\beta_3+\alpha_3\alpha_1\beta_3\beta_1=-1/12$
$\Delta\cdot(\alpha_1-\alpha_2)=-\beta_3 \quad \Delta\cdot(\alpha_2-\alpha_3)=-\beta_1 \quad \Delta\cdot(\alpha_3-\alpha_1)=-\beta_2$ $\Delta\cdot(\beta_1-\beta_2)=\alpha_3 \quad \Delta\cdot(\beta_2-\beta_3)=\alpha_1 \quad \Delta\cdot(\beta_3-\beta_1)=\alpha_2$
$\Delta(a_1\alpha_1-a_2\alpha_2)=\theta_\alpha\beta_3 \quad \Delta\cdot(a_2\alpha_2-a_3\alpha_3)=\theta_\alpha\beta_1 \quad \Delta\cdot(a_3\alpha_3-a_1\alpha_1)=\theta_\alpha\beta_2$ $\Delta\cdot(a_1\beta_1-a_2\beta_2)=-\theta_\beta\alpha_3 \quad \Delta\cdot(a_2\beta_2-a_3\beta_3)=-\theta_\beta\alpha_1 \quad \Delta\cdot(a_3\beta_3-a_1\beta_1)=-\theta_\beta\alpha_2$
$\Delta=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3=1/\sqrt{3}$ $\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2=\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3=\alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1=-1/3$ $\alpha_1^2+\beta_1^2=\alpha_2^2+\beta_2^2=\alpha_3^2+\beta_3^2=2/3$
$2\alpha_1\beta_1=\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2 \quad 2\alpha_2\beta_2=\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_3 \quad 2\alpha_3\beta_3=\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1$ $2\alpha_1\alpha_2=2\alpha_3^2-1 \quad 2\alpha_2\alpha_3=2\alpha_1^2-1 \quad 2\alpha_3\alpha_1=2\alpha_2^2-1$ $2\beta_1\beta_2=2\beta_3^2-1 \quad 2\beta_2\beta_3=2\beta_1^2-1 \quad 2\beta_3\beta_1=2\beta_2^2-1$
$3(\theta_\beta\alpha_1^2+\theta_\alpha\beta_1^2)=a_2+a_3 \quad 3(\theta_\beta\alpha_2^2+\theta_\alpha\beta_2^2)=a_3+a_1 \quad 3(\theta_\beta\alpha_3^2+\theta_\alpha\beta_3^2)=a_1+a_2$ $3(\theta_\beta\alpha_1\alpha_2+\theta_\alpha\beta_1\beta_2)=-a_3 \quad 3(\theta_\beta\alpha_2\alpha_3+\theta_\alpha\beta_2\beta_3)=-a_1 \quad 3(\theta_\beta\alpha_3\alpha_1+\theta_\alpha\beta_3\beta_1)=-a_2$
$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3=-\sqrt{\dfrac{3P(\theta_\alpha)}{2(q_1-3\theta_\alpha)}} \quad a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3=-\sqrt{\dfrac{3P(\theta_\beta)}{2(q_1-3\theta_\beta)}}$

Выпишем ещё несколько формул, которые связывают векторы $\vec{r}_\alpha$ и $\vec{r}_\beta$ со сторонами треугольника, образованного тремя частицами. Нетрудно убедиться, что

$$\vec{r}_{23}=\sqrt{3}(-\beta_1\vec{r}_\alpha+\alpha_1\vec{r}_\beta),\ \vec{r}_{31}=\sqrt{3}(-\beta_2\vec{r}_\alpha+\alpha_2\vec{r}_\beta),\ \vec{r}_{12}=\sqrt{3}(-\beta_3\vec{r}_\alpha+\alpha_3\vec{r}_\beta), \tag{41}$$

$$\sqrt{3}\,\vec{r}_\alpha=-(\beta_1\vec{r}_{23}+\beta_2\vec{r}_{31}+\beta_{12}\vec{r}_{12}),\ \sqrt{3}\,\vec{r}_\beta=(\alpha_1\vec{r}_{23}+\alpha_2\vec{r}_{31}+\alpha_3\vec{r}_{12}),$$

где $\vec{r}_{ik}=\vec{R}_i-\vec{R}_k$. Если обозначить длины сторон упомянутого треугольника через ρ_1, ρ_2 и ρ_3 ($\rho_i=|\vec{r}_{kl}|$, $i\neq k\neq l=1,2,3$) и учесть свойства α_i и β_i из таблицы I, то имеем

$$|\vec{r}_\alpha|^2=-(\alpha_2\alpha_3\rho_1^2+\alpha_3\alpha_1\rho_2^2+\alpha_1\alpha_2\rho_3^2),\ |\vec{r}_\beta|^2=-(\beta_2\beta_3\rho_1^2+\beta_3\beta_1\rho_2^2+\beta_1\beta_2\rho_3^2), \tag{42}$$

$$(\vec{r}_\alpha\cdot\vec{r}_\beta)=-(\alpha_1\beta_1\rho_1^2+\alpha_2\beta_2\rho_2^2+\alpha_3\beta_3\rho_3^2).$$

Возводя формулы (41) в квадрат и суммируя, можно убедиться, что выполняются следующие соотношения:

$$3(\vec{r}_\alpha^{\,2}+\vec{r}_\beta^{\,2})=\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2, \tag{43}$$

$$\mu_\alpha\vec{r}_\alpha^{\,2}+\mu_\beta\vec{r}_\beta^{\,2}=(m_1m_2\rho_3^2+m_2m_3\rho_1^2+m_3m_1\rho_2^2)\cdot m_0^{-1}.$$

Отметим, наконец, что вторая величина, характеризующая наряду с энергией систему трех частиц, а именно момент количества движения $\vec{M}$, также просто выражается через введенные в данной работе обобщенные координаты Якоби, так как

$$\vec{M}=m_1[\vec{R}_1\times\dot{\vec{R}}_1]+m_2[\vec{R}_2\times\dot{\vec{R}}_2]+m_3[\vec{R}_3\times\dot{\vec{R}}_3]=$$
$$=m_0[\vec{r}_0\times\dot{\vec{r}}_0]+\mu_\alpha[\vec{r}_\alpha\times\dot{\vec{r}}_\alpha]+\mu_\beta[\vec{r}_\beta\times\dot{\vec{r}}_\beta]. \tag{44}$$

В аналогичной форме можно представить и квантовомеханический оператор орбитального момента количества движения для системы трех частиц.

З а к л ю ч е н и е

В данной работе введены обобщённые координаты Якоби для системы трёх тел с различными массами, которые позволяют исключить центр тяжести системы таким образом, что оставшаяся часть гамильтониана (классического или квантовомеханического) симметрична относительно перестановок всех трёх частиц. Введение этих координат ещё не ре... саму проблему трёх взаимодействующих тел, оно решает лишь частную проблему трех свободных тел, что само по себе имеет во многих случаях немаловажное значение. Одним из преимуществ обобщённых координат Якоби для системы трёх тел является то обстоятельство, что полученные здесь результаты можно непосредственно обобщить на случай произвольного числа частиц с различными массами и ,таким образом, - вводить обобщённые координаты Якоби для системы N - тел.

Следует отметить также частные случаи обобщённых координат Якоби (7), когда две из трёх масс частиц равны. В этом частном случае коэффициенты α_i и β_i не зависят от масс частиц, а являются просто некоторыми определёнными числами. Если, например, $m_1 \neq m_2 = m_3$, то из формул (40) после предельных переходов получаем

$$\alpha_1 = \sqrt{2}/\sqrt{3},\ \alpha_2 = -1/\sqrt{6},\ \alpha_3 = -1/\sqrt{6};\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1/\sqrt{2},\ \beta_3 = -1/\sqrt{2}. \quad (45)$$

Заметим, что обобщённые координаты Якоби (7) не содержат тот частный случай, когда все три массы частиц равны между собой ($m_1 = m_2 = m_3$).* Это позволяет ставить вопрос о том, являются ли введённые здесь обобщённые координаты Якоби единственно возможным решением вышеуказанной проблемы. Этот вопрос следует рассмотреть отдельно. Здесь же будем считать, что обобщённые координаты Якоби (7) с коэффициентами α_i и β_i в форме (40) представляют собой один из возможных выборов,который обладает всеми необходимыми перестановочными свойствами. Думается, что коэффициенты α_i и β_i с присущими им свойствами по отношению к перестановкам могут быть применены помимо задачи трех тел также и к решению других физических задач.

Приведённое здесь решение задачи о симметричном исключении центра тяжести в проблеме трёх тел позволяет сформулировать целый ряд новых и интересных задач. Заметим, например, такой факт, что квантовомеханические волновые функции трёхчастичной системы должны обладать определённой симметрией по отношению к взаимной замене фиктивных частиц с массами μ_α и μ_β (т.е. к замене $\vec{r}_\alpha$ на $\vec{r}_\beta$ и наоборот). Так как массы μ_α и μ_β являются симметричными функциями масс m_1, m_2, m_3, то взаимная замена μ_α на μ_β никак не связана с перестановками всех трёх частиц, и,таким образом,такая симметрия представляет собой некоторую "внутреннюю" симметрию трёхчастичной проблемы. Интересно отметить также следующую формальную симметрию, которую допускает явный вид α_i и β_i и все соотношения, приведённые в таблице I. Замене

$$\alpha_1' \to -\alpha_3,\ \alpha_2' \to -\alpha_2,\ \alpha_3' \to -\alpha_1,\ \theta_\alpha' \to -\theta_\alpha,\ \theta_\beta' \to -\theta_\beta, \quad (46)$$

соответствует преобразование коэффициентов α_i и β_i:

$$\alpha_1' \to -\beta_3,\ \alpha_2' \to -\beta_2,\ \alpha_3' \to -\beta_1;\ \beta_1' \to -\alpha_3,\ \beta_2' \to -\alpha_2,\ \beta_3' \to -\alpha_1. \quad (47)$$

*В данном частном случае можно,однако,использовать, например, значения α_i и β_i, приведённые в (45).

Это преобразование приводит к следующему преобразованию векторов $\vec{r}_\alpha$ и $\vec{r}_\beta$:

$$\vec{r}_\alpha \to -\vec{r}_\beta , \quad \vec{r}_\beta \to -\vec{r}_\alpha . \qquad (48)$$

Соответственно, волновые функции трёхчастичной системы должны обладать определённой симметрией также по отношению к преобразованию (48).

Представляет интерес также рассмотрение связи задачи трех тел в обобщённых координатах Якоби с группой $SU(3)$ симметрии, особенно с группой $SU(3)$, использующей для представлений эллиптический базис /II,I2/.

В связи с тем, что имеет место вторая формула в (43), ясно, что уравнение Гамильтона-Якоби и уравнение Шредингера для трёх частиц с потенциалом взаимодействия типа гармонического потенциала допускают разделение переменных. Таким образом, эта задача решается до конца, причём решение является симметричным по отношению к перестановкам всех трёх частиц. Эти задачи явятся предметом наших дальнейших исследований.

Литература

I. J.L.Lagrange. Essai sur le problème des trois corps, 1772, in "Oeuvres de Lagrange", vol. VI, Paris, 1873, p. 229.

2. Н.И.Идельсон. Этюды по истории небесной механики. Москва, "Наука," I975, стр. 293.

3. Л.А.Парс. Аналитическая динамика. Москва,"Наука," I97I.

4. J.S.C. Mckee. Reports Progr. Phys. 33, 691 (1970).

5. R.H.Dalitz. in the book Elementary Particle Physics, ed. by G.Takeda and A.Fujii, Tokyo-New York, 1967; перевод в кн. Я.Коккедэ. Теория кварков. Москва,"Мир," I97I, стр. 236.

6. C.G.J.Jacobi. Sur l'elimination des noeuds dans le problème des trois corps, Crele's Journal, Bd. 26, I847 p. II5.

7. A.Allegret. Journal de math. pures at appl., 1875.

8. Д.И.Блохинцев. Основы квантовой механики. Москва,"Высшая школа," I96I.

9. Н.Мотт, Г.Месси. Теория атомных столкновений. Москва,"Мир," I969, стр. 366.

10. К. Шарлье. Небесная механика. Москва,"Наука," I966.

11. И.Лукач, Л.Тотх. ЯФ, 17, I337 (I973).

12. И.Лукач. ЯФ, 18, 202 (I973).

Рукопись поступила в издательский отдел
I6 сентября I976 года.