



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

99-222

P2-99-222

Л.Г.Мардоян<sup>1</sup>, А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян<sup>2</sup>

SU(2)-МОНОПОЛЬ:

БАЗИСЫ И МЕЖБАЗИСНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

<sup>1</sup>E-mail: mardoyan@thsun1.jinr.ru

<sup>2</sup>E-mail: terant@thsun1.jinr.ru

Переменные в уравнении Шредингера для связанной системы «заряд-SU(2)-монополь» разделяются в гиперсферических, параболических и сфероидальных координатах в  $IR^5$ . Показано, что коэффициенты разложения параболического базиса по гиперсферическому выражаются через коэффициенты Клебша-Гордана группы SU(2). Выведены трехчленные рекуррентные соотношения, которым подчиняются коэффициенты разложения сфероидального базиса по гиперсферическому и параболическому базису соответственно.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1999

Перевод авторов

Mardoyan L.G., Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M.  
SU(2) Monopole: Bases and Interbases Expansions

P2-99-222

The Schrödinger equation for the five dimensional «charge-SU(2) monopole» system is separable in the hyperspherical, parabolic and spheroidal coordinates in  $IR^5$ . It is shown that the coefficients for the expansion of the parabolic basis in terms of the hyperspherical basis can be expressed through the Clebsch-Gordan coefficients of the group SU(2). The three-term recursion relations are obtained for coefficients generated the hyperspherical and parabolic expansions of the spheroidal basis.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

# 1. Введение

Пятимерная связанная система заряд-дион с  $SU(2)$ -монополем Янга [1] описывается уравнением [2]

$$\frac{1}{2m} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} - \hbar A_j^a \hat{T}_a \right)^2 \psi + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \hat{T}^2 \psi - \frac{e^2}{r} \psi = \epsilon \psi, \quad (1)$$

где  $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ;  $a = 1, 2, 3$ . Операторы  $\hat{T}_a$  есть генераторы группы  $SU(2)$ :

$$[\hat{T}_a, \hat{T}_b] = i\epsilon_{abc} \hat{T}_c.$$

Триплет пятимерных векторов  $\vec{A}^a$  имеют вид

$$\vec{A}^1 = \frac{1}{r(r+x_0)} (0, -x_4, -x_3, x_2, x_1),$$

$$\vec{A}^2 = \frac{1}{r(r+x_0)} (0, x_3, -x_4, -x_1, x_2),$$

$$\vec{A}^3 = \frac{1}{r(r+x_0)} (0, x_2, -x_1, x_4, -x_3).$$

Каждый член триплета  $\vec{A}^a$  совпадает с вектор-потенциалом пятимерного монополя Дирака [1] с единичным топологическим зарядом и с осью сингулярности, направленной вдоль неположительной части оси  $x_0$ . Векторы  $A_j^a$  ортогональны как друг к другу

$$A_j^a A_j^b = \frac{1}{r^2} \frac{(r-x_0)}{(r+x_0)} \delta_{ab},$$

так и к вектору  $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

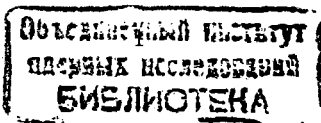
Кратность вырождения энергетического спектра ( $N = 0, 1, 2, \dots$ )

$$\epsilon_N^T = -\frac{me^4}{2\hbar^2 \left(\frac{N}{2} + 2\right)^2} \quad (2)$$

при фиксированных значениях  $T$  задается формулой [3]

$$g_N^T = \frac{1}{12} (2T+1)^2 \left(\frac{N}{2} - T + 1\right) \left(\frac{N}{2} - T + 2\right) \left\{ \left(\frac{N}{2} - T + 2\right) \left(\frac{N}{2} - T + 3\right) + 2T(N+5) \right\}.$$

При  $T = 0$  и четных  $N = 2n$  правая часть последней формулы равняется  $(n+1)(n+2)^2(n+3)/12$ , т.е. кратность вырождения чисто кулоновских уровней [4]. Вырождение энергетических уровней системы заряд-дион – это следствие



скрытой симметрии. В работе [5] нами было доказано, что группа скрытой симметрии системы, описываемая гамильтонианом (1), есть группа  $SO(6)$ .

Работа построена следующим образом. В разделах 2 и 4 приводятся решения уравнения (1) в пятимерных гиперсферических и параболических координатах. В разделе 3 нами доказывается добавочное условие ортогональности гиперсферических радиальных функций по гипермоменту. В разделе 5, пользуясь добавочным условием ортогональности для радиальных функций, мы вычисляем коэффициенты разложения гиперсферического базиса по параболическому. В разделе 6 выводятся соотношения, которым подчиняются коэффициенты разложения сфероидаального базиса по гиперсферическому и параболическому.

## 2 Гиперсферический базис

Для полноты в этом разделе мы приводим решения уравнения (1), полученные нами в работе [3].

В пространстве  $\mathbb{R}^5$  определим гиперсферические координаты  $r \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi)$ ,  $\beta \in [0, \pi]$ ,  $\gamma \in [0, 4\pi)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} x_0 &= r \cos \theta, \\ x_1 + ix_2 &= r \sin \theta \cos \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \\ x_3 + ix_4 &= r \sin \theta \sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как

$$iA_j^a \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{2}{r(r+x_0)} \hat{L}_a,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 &= \frac{i}{2} [D_{41}(x) + D_{32}(x)], \\ \hat{L}_2 &= \frac{i}{2} [D_{13}(x) + D_{42}(x)], \\ \hat{L}_3 &= \frac{i}{2} [D_{12}(x) + D_{34}(x)], \end{aligned}$$

и

$$D_{ij}(x) = -x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial x_i},$$

то уравнение (1) в гиперсферических координатах принимает вид

$$\left( \Delta_{r\theta} - \frac{\hat{L}^2}{r^2 \sin^2 \theta/2} - \frac{\hat{J}^2}{r^2 \cos^2 \theta/2} \right) \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( \epsilon + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$\Delta_{r\theta} = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^4 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

а  $\hat{J}_a = \hat{L}_a + \hat{T}_a$ . Отметим, что

$$[\hat{L}_a, \hat{L}_b] = i\epsilon_{abc} \hat{L}_c, \quad [\hat{J}_a, \hat{J}_b] = i\epsilon_{abc} \hat{J}_c.$$

Решения уравнения (4) имеет вид [3]

$$\psi^{sph} = R_{N\lambda}(r) Z_{\lambda L J}(\theta) \mathcal{D}_{L T m' \nu}^{J M}(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T, \beta_T, \gamma_T), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{L T m' \nu}^{J M}(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T, \beta_T, \gamma_T) &= \sqrt{\frac{(2L+1)(2T+1)}{4\pi^4}} \\ &\sum_{M=m+t} C_{L, m; T, t}^{J M} D_{m m'}^L(\alpha, \beta, \gamma) D_{t' t}^T(\alpha_T, \beta_T, \gamma_T) \end{aligned}$$

– собственные функции операторов  $\hat{L}^2$ ,  $\hat{T}^2$  и  $\hat{J}^2$  с собственными значениями  $L(L+1)$ ,  $T(T+1)$  и  $J(J+1)$  соответственно. Здесь  $C_{L, m; T, t}^{J M}$  – коэффициенты Клебша-Гордана,  $D_{m m'}^L$  и  $D_{t' t}^T$  – функции Вигнера, а  $\alpha_T$ ,  $\beta_T$  и  $\gamma_T$  – координаты группового пространства  $SU(2)$ .

Функции  $Z_{\lambda L J}(\theta)$  и  $R_{N\lambda}(r)$  даются формулами

$$Z_{\lambda L J}(\theta) = N_{JLT}^\lambda (1 - \cos \theta)^L (1 + \cos \theta)^J P_{\lambda-L-J}^{(2L+1, 2J+1)}(\cos \theta), \quad (6)$$

$$R_{N\lambda}(r) = C_{N\lambda} e^{-\kappa r} (2\kappa r)^\lambda F\left(-\frac{N}{2} + \lambda; 2\lambda + 4; 2\kappa r\right), \quad (7)$$

где  $N_{JLT}^\lambda$  и  $C_{N\lambda}$  – нормировочные константы. Предполагается, что

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^3 \theta Z_{\lambda' L J}(\theta) Z_{\lambda L J}(\theta) d\theta &= \delta_{\lambda' \lambda}, \\ \int_0^\infty r^4 R_{N' \lambda}(r) R_{N \lambda}(r) dr &= \delta_{N' N}. \end{aligned} \quad (8)$$

В формуле (6)  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  – это многочлены Якоби. Далее,  $\kappa = 2/r_0(N+4)$ ,  $r_0 = \hbar^2/m\epsilon^2$  – боровский радиус. Постоянные нормировки  $N_{JLT}^\lambda$  и  $C_{N\lambda}$  равны

$$N_{JLT}^\lambda = \sqrt{\frac{(2\lambda+3)(\lambda-J-L)! \Gamma(\lambda+J+L+3)}{2^{2J+2L+3} \Gamma(\lambda+J-L+2) \Gamma(\lambda-J+L+2)}},$$

$$C_{N\lambda} = \frac{32}{(N+4)^3 (2\lambda+3)!} \sqrt{\frac{(\frac{N}{2} + \lambda + 3)!}{r_0^5 (\frac{N}{2} - \lambda)!}}.$$

Квантовые числа пробегает значения  $|L - T| \leq J \leq L + T$ ;  $\lambda = L + J, L + J + 1, \dots, N/2$ .

Гиперсферический базис (5) является собственной функцией квадрата оператора гипермомента  $\hat{\Lambda}^2$

$$\hat{\Lambda}^2 \psi^{hsp} = \lambda(\lambda + 3) \psi^{hsp}, \quad (9)$$

где

$$\hat{\Lambda}^2 = -\frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{4}{\sin^2 \theta} \hat{L}^2 + \frac{2}{1 + \cos \theta} \hat{T}^2 + \frac{2}{1 + \cos \theta} \hat{L}_a \hat{T}_a.$$

В декартовых координатах оператор  $\hat{\Lambda}^2$  имеет вид

$$\hat{\Lambda}^2 = -r^2 \Delta_5 + x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + 4x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{2r}{r + x_0} \hat{T}^2 + 2ir^2 A_j^{a(+)} \hat{T}_a \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (10)$$

### 3 Ортогональность по гипермоменту

Докажем, что для радиальных волновых функций  $R_{N\lambda}(r)$  наряду с (8) выполняется следующее "добавочное" условие ортогональности по гипермоменту  $\lambda$ :

$$I_{\lambda\lambda'} = \int_0^\infty r^2 R_{N\lambda'}(r) R_{N\lambda}(r) dr = \frac{16}{r_0^2 (N+4)^2} \frac{1}{2\lambda + 3} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (11)$$

Это новое соотношение будет использовано в разделе 6 при нахождении межбазисных разложений. Доказать формулу (11) можно следующим образом.

В соотношение (11) вместо  $R_{N\lambda}(r)$  и  $R_{N\lambda'}(r)$  подставим их явные выражения, взятые из (7), учтем, что

$$F\left(-\frac{N}{2} + \lambda; 2\lambda + 4; 2\kappa r\right) = \sum_{s=0}^{\frac{N}{2}-\lambda} \frac{\left(-\frac{N}{2} + \lambda\right)_s (2\kappa r)^s}{(2\lambda + 4)_s s!}$$

и что [6]

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^\nu F(\alpha, \gamma; kx) dx = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\lambda^{\nu+1}} {}_2F_1\left(\alpha, \nu + 1, \gamma; \frac{k}{\lambda}\right). \quad (12)$$

Тогда, пользуясь формулой

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad (13)$$

приходим к соотношению

$$I_{\lambda\lambda'} = \frac{16}{r_0^2 (N+4)^2} \frac{\Gamma(\lambda + \lambda' + 3)}{(2\lambda + 3)} \sqrt{\frac{\left(\frac{N}{2} + \lambda + 3\right)!}{\left(\frac{N}{2} - \lambda\right)! \left(\frac{N}{2} - \lambda'\right)! \left(\frac{N}{2} + \lambda' + 3\right)!}} \sum_{s=0}^{\frac{N}{2}-\lambda} \frac{\left(-\frac{N}{2} + \lambda\right)_s (\lambda + \lambda' + 3)_s \Gamma\left(\frac{N}{2} - \lambda - s + 1\right)}{s! (2\lambda + 4)_s \Gamma(\lambda - \lambda' - s + 1)}. \quad (14)$$

Из [7] известно, что

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(-z+n+1)}{\Gamma(-z+1)}, \quad (15)$$

и потому сумма по  $s$  сворачивается в гипергеометрическую функцию типа (13), так что

$$I_{\lambda\lambda'} = \frac{16}{r_0^2 (N+4)^2} \frac{1}{\lambda + \lambda' + 3} \sqrt{\frac{\left(\frac{N}{2} - \lambda\right)! \left(\frac{N}{2} + \lambda + 3\right)!}{\left(\frac{N}{2} - \lambda'\right)! \left(\frac{N}{2} + \lambda' + 3\right)!}} \frac{1}{\Gamma(\lambda - \lambda' + 1) \Gamma(\lambda' - \lambda + 1)}. \quad (16)$$

Так как при данном  $N$  числа  $\lambda$  и  $\lambda'$  целые или полуполые одновременно, то выражение (16) обращается в нуль при  $\lambda \neq \lambda'$  за счет произведения гамма-функций от  $(\lambda - \lambda' + 1)$  и  $(\lambda' - \lambda + 1)$ , что и приводит к условию ортогональности (11).

Формула (11) обобщает соотношение ортогональности для атома водорода, полученное нами в работе [8]. Наличие "добавочного" условия ортогональности связано с фактом случайного вырождения энергетического спектра системы "заряд-SU(2)-монополь".

### 4 Параболический базис

Определим параболические координаты в  $\mathbb{R}^5$  следующим образом:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2}(\mu - \nu), \\ x_1 + ix_2 &= \sqrt{\mu\nu} \cos \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \\ x_3 + ix_4 &= \sqrt{\mu\nu} \sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $\mu, \nu \in [0, \infty)$ . Оператор Лапласа в этих координатах имеет вид

$$\Delta_5 = \frac{4}{\mu + \nu} \left[ \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \nu^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \right] - \frac{4}{\mu\nu} \hat{L}^2,$$

так что вместо (1) имеем

$$\left[ \Delta_{\mu\nu} - \frac{4\hat{J}^2}{\mu(\mu+\nu)} - \frac{4\hat{L}^2}{\nu(\mu+\nu)} \right] \psi^{par} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( \epsilon + \frac{2e^2}{\mu+\nu} \right) \psi^{par} = 0, \quad (18)$$

где

$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{4}{\mu+\nu} \left[ \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \nu^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \right].$$

После подстановки

$$\psi^{par} = f_1(\mu) f_2(\nu) \mathcal{D}_{LTm'\nu}^{JM}(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T, \beta_T, \gamma_T) \quad (19)$$

переменные в уравнении (18) разделяются, и мы приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\mu} \left( \mu^2 \frac{df_1}{d\mu} \right) + \left[ \frac{m\epsilon}{2\hbar^2} \mu - \frac{J(J+1)}{\mu} + \frac{\hbar}{2\sqrt{m}} \beta + \frac{me^2}{2\hbar^2} \right] f_1 &= 0, \\ \frac{1}{\nu} \frac{d}{d\nu} \left( \nu^2 \frac{df_2}{d\nu} \right) + \left[ \frac{m\epsilon}{2\hbar^2} \nu - \frac{L(L+1)}{\nu} - \frac{\hbar}{2\sqrt{m}} \beta + \frac{me^2}{2\hbar^2} \right] f_2 &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\beta$  – постоянная разделения. При  $T = 0$  (т.е.  $J = L$ ) эти уравнения совпадают с уравнениями для пятимерной задачи Кулона [4], и, следовательно

$$\psi^{par} = \kappa^3 \sqrt{2r_0} f_{n_1 J}(\mu) f_{n_2 L}(\nu) \mathcal{D}_{LTm'\nu}^{JM}(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T, \beta_T, \gamma_T), \quad (21)$$

где

$$f_{pq}(x) = \frac{1}{(2q+1)!} \sqrt{\frac{(p+2q+1)!}{p!}} \exp\left(-\frac{\kappa x}{2}\right) (\kappa x)^q F(-p; 2q+2; \kappa x).$$

Здесь  $n_1$  и  $n_2$  – неотрицательные целые числа

$$n_1 = -J - 1 + \frac{\hbar}{2\kappa\sqrt{m}} \beta + \frac{1}{2\kappa r_0}, \quad n_2 = -L - 1 - \frac{\hbar}{2\kappa\sqrt{m}} \beta + \frac{1}{2\kappa r_0}.$$

Из последних соотношений и из формулы (2) следует, что параболические квантовые числа  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $J$  и  $L$  связаны с главным квантовым числом  $N$  следующим образом:

$$N = 2(n_1 + n_2 + J + L).$$

Исключая энергию из уравнений (20), мы приходим к добавочному интегралу движения

$$\begin{aligned} \widehat{M}_0 &= \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \left\{ \frac{2}{\mu+\nu} \left[ \frac{\mu}{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \nu^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \right) - \frac{\nu}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \right] - \right. \\ &\left. - \frac{2(\mu-\nu)}{\mu\nu} \hat{L}^2 + \frac{4\nu}{\mu(\mu+\nu)} \hat{L}_a \hat{T}_a + \frac{2\nu}{\mu(\mu+\nu)} \hat{T}^2 + \frac{me\mu-\nu}{\hbar^2 \mu+\nu} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

с собственными значениями

$$\frac{\hbar^2}{m} \beta = \frac{2e^2 \sqrt{m} n_1 - n_2 + J - L}{N + 4}.$$

В декартовых координатах оператор  $\widehat{M}_0$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \widehat{M}_0 &= \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \left[ x_0 \frac{\partial^2}{\partial x_\sigma \partial x_\sigma} - x_\sigma \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_\sigma} + i(r-x_0) A_j^{a(+)} \hat{T}_a \frac{\partial}{\partial x_j} - \right. \\ &\left. - 2 \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{r-x_0}{r(r+x_0)} \hat{T}^2 + \frac{me^2 x_0}{\hbar^2 r} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\sigma = 1, 2, 3, 4$ . Оператор  $\widehat{M}_k$  – компонента вектора Рунге-Ленца [5]

$$\widehat{M}_k = \frac{1}{2\sqrt{m}} \left( \hat{\pi}_i \hat{l}_{ik} + \hat{l}_{ik} \hat{\pi}_i + \frac{2me^2 x_k}{\hbar r} \right)$$

при  $k = 0$ .

## 5 Разложение Парка-Тартера

Гиперсферические  $(r, \theta, \alpha, \beta, \gamma)$  и параболические  $(\mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma)$  координаты связаны между собой следующим образом:

$$\mu = r(1 + \cos \theta), \quad \nu = r(1 - \cos \theta). \quad (24)$$

При фиксированных значениях энергии

$$\psi^{par} = \sum_{\lambda=T}^{N/2} W_{NJLn_1}^\lambda \psi^{hsp}. \quad (25)$$

Переходя в левой части соотношения (25) от  $\mu$  и  $\nu$  к  $r$  и  $\theta$  и положив  $\theta = 0$  и помня, что

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!},$$

мы установим равенство, в которое входит только переменная  $r$ . Затем пользуясь условием ортогональности (11) получим

$$W_{NJLn_1}^\lambda = \frac{1}{(2J+1)!(2\lambda+3)!} E_{JLL}^{Nn_1} K_{JLL}^{Nn_1}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} E_{JLL}^{Nn_1} &= \sqrt{(2\lambda+3)(\lambda-J-L)! \left( \frac{N}{2} + \lambda + 3 \right)!} \\ &\left[ \frac{\Gamma(\lambda+J-L+2)(n_1+2J+1)!(n_2+2L+1)!}{(n_1)!(n_2)! \left( \frac{N}{2} - \lambda \right)! \Gamma(\lambda-J+L+2) \Gamma(\lambda+J+L+3)} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$K_{JL\lambda}^{Nn_1} = \int_0^\infty e^{-x} x^{\lambda+J+L+2} F(-n_1, 2J+2; x) F\left(-\frac{N}{2} + \lambda, 2\lambda+4; x\right) dx. \quad (28)$$

Для вычисления интеграла  $K_{JL\lambda}^{Nn_1}$  запишем вырожденную гипергеометрическую функцию  $F(-n_1, 2J+2; x)$  в виде многочлена, произведем интегрирование согласно формуле (12) и, учитывая соотношения (13), получим

$$K_{JL\lambda}^{Nn_1} = \frac{(2\lambda+3)! \left(\frac{N}{2} - J - L\right)! \Gamma(\lambda+J+L+3)}{(\lambda-J-L)! \left(\frac{N}{2} + \lambda + 3\right)!} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -n_1, -\lambda+J+L, \lambda+J+L+3 \\ 2J+2, -\frac{N}{2}+J+L \end{matrix} \middle| 1 \right\}. \quad (29)$$

Подстановка (27) и (29) в (26) дает

$$W_{NJL\lambda}^\lambda = \left[ \frac{(2\lambda+3)\Gamma(\lambda+J+L+3)(n_1+2J+1)!(n_2+2L+1)!}{(n_1)!(n_2)!(\lambda-J-L)! \left(\frac{N}{2} - \lambda\right)! \left(\frac{N}{2} + \lambda + 3\right)!} \right]^{1/2} \frac{\left(\frac{N}{2} - J - L\right)!}{(2J+1)!} \sqrt{\frac{\Gamma(\lambda+J-L+2)}{\Gamma(\lambda-J+L+2)}} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -n_1, -\lambda+J+L, \lambda+J+L+3 \\ 2J+2, -\frac{N}{2}+J+L \end{matrix} \middle| 1 \right\}. \quad (30)$$

Известно, что коэффициенты Клебша-Гордана можно записать в виде [9]

$$C_{a\alpha; b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{a-\alpha} \delta_{\gamma, \alpha+\beta} \frac{(a+b-\gamma)!(b+c-\alpha)!}{\sqrt{(b-\beta)!(b+\beta)!}} \left[ \frac{(2c+1)(a+\alpha)!(c+\gamma)!}{(a-\alpha)!(c-\gamma)!(a+b+c+1)!(a+b-c)!(a-b+c)!(b-a+c)!} \right]^{1/2} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -a-b-c-1, -a+\alpha, -c+\gamma \\ -a-b+\gamma, -b-c+\alpha \end{matrix} \middle| 1 \right\}. \quad (31)$$

Пользуясь формулой [7]

$${}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} s, s', -N \\ t', 1-N-t \end{matrix} \middle| 1 \right\} = \frac{(t+s)_N}{(t)_N} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} s, t' - s', -N \\ t', t+s \end{matrix} \middle| 1 \right\}$$

соотношение (31) можно записать в виде

$$C_{a\alpha; b\beta}^{c\gamma} = \left[ \frac{(2c+1)(b-a+c)!(a+\alpha)!(b+\beta)!(c+\gamma)!}{(b-\beta)!(c-\gamma)!(a+b-c)!(a-b+c)!(a+b+c+1)!} \right]^{1/2} \delta_{\gamma, \alpha+\beta} \frac{(-1)^{a-\alpha}}{\sqrt{(a-\alpha)!}} \frac{(a+b-\gamma)!}{(b-a+\gamma)!} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -a+\alpha, c+\gamma+1, -c+\gamma \\ \gamma-a-b, b-a+\gamma+1 \end{matrix} \middle| 1 \right\}. \quad (32)$$

Наконец, сравнивая (32) и (30), приходим к следующему представлению

$$W_{NJL\lambda}^\lambda = (-1)^{n_1} C_{\frac{N-2J+2L+2}{4}, L+\frac{n_2-n_1+1}{2}, \frac{N+2J-2L+2}{4}, J+\frac{n_1-n_2+1}{2}}^{\lambda+1, J+L+1}. \quad (33)$$

При  $T=0$  (т.е.  $J=L$ ) формула (33) переходит в соответствующую формулу для пятимерной задачи Кулона [4].

Обратное разложение, т.е. разложение гиперсферического базиса по параболическому, имеет вид

$$\psi^{hsp} = \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-J-L} \widetilde{W}_{NJL\lambda}^{n_1} \psi^{par}. \quad (34)$$

Пользуясь условием ортонормируемости коэффициентов Клебша-Гордана группы  $SU(2)$ , получим

$$\widetilde{W}_{NJL\lambda}^{n_1} = (-1)^{n_1} C_{\frac{N-2J+2L+2}{4}, \frac{N-2J+2L+2}{4}-n_1, \frac{N+2J-2L+2}{4}, n_1+J-\frac{N-2J-2L-2}{4}}^{\lambda+1, J+L+1}. \quad (35)$$

Учитывая формулы (31) или (32) можем выразить эти коэффициенты и через функции  ${}_3F_2$ .

## 6 Сфероидальный базис

Определим пятимерные сфероидальные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{R}{2}(\xi\eta+1), \\ x_1 + ix_2 &= \frac{R}{2}\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)} \cos \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \\ x_3 + ix_4 &= \frac{R}{2}\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)} \sin \frac{\beta}{2} e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}. \end{aligned}$$

где  $\xi \in [1, \infty)$ ,  $\eta \in [-1, 1]$ ,  $R \in [0, \infty)$ . Параметр  $R$  есть межфокусное расстояние и при  $R \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$  сфероидальные координаты переходят в гиперсферические и параболические соответственно.

Оператор Лапласа в этих координатах имеет вид

$$\Delta_5 = \frac{4}{R^2(\xi^2-\eta^2)} \left\{ \frac{1}{\xi^2-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\xi^2-1)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{1-\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1-\eta^2)^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \right\} - \frac{16\widehat{L}^2}{R^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)},$$

и потому вместо уравнения (1) имеем

$$\left[ \Delta_{\xi\eta} - \frac{8\hat{J}^2}{R^2(\xi+\eta)(\xi+1)(1+\eta)} - \frac{8\hat{L}^2}{R^2(\xi+\eta)(\xi-1)(1-\eta)} \right] \psi^{spr} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ \epsilon + \frac{2e^2}{R(\xi+\eta)} \right] \psi^{spr} = 0, \quad (36)$$

где

$$\Delta_{\xi\eta} = \frac{4}{R^2(\xi^2 - \eta^2)} \left\{ \frac{1}{\xi^2 - 1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\xi^2 - 1)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{1 - \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1 - \eta^2)^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \right\}.$$

После подстановки

$$\psi^{spr} = \phi_1(\xi)\phi_2(\eta)\mathcal{D}_{LTm\gamma}^{JM}(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_T, \beta_T, \gamma_T) \quad (37)$$

переменные в уравнении (36) разделяются

$$\left[ \frac{1}{\xi^2 - 1} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 - 1)^2 \frac{d}{d\xi} - \frac{2L(L+1)}{\xi - 1} + \frac{2J(J+1)}{\xi + 1} + \frac{R}{r_0} \xi + \frac{mR^2\epsilon}{2\hbar^2} (\xi^2 - 1) \right] \phi_1 = A(R)\phi_1, \quad (38)$$

$$\left[ \frac{1}{1 - \eta^2} \frac{d}{d\eta} (1 - \eta^2)^2 \frac{d}{d\eta} - \frac{2L(L+1)}{1 - \eta} - \frac{2J(J+1)}{1 + \eta} - \frac{R}{r_0} \eta + \frac{mR^2\epsilon}{2\hbar^2} (1 - \eta^2) \right] \phi_2 = -A(R)\phi_2.$$

Здесь  $A(R)$  – постоянная разделения.

Исключая энергию из системы уравнений (38), мы получим сфероидальный интеграл движения

$$\hat{A} = \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left[ \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - 1} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - 1)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\xi^2 - 1}{1 - \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2)^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + \frac{4(\xi^2 + \eta^2 - 2)}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \hat{L}^2 + i \frac{R^2}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \xi\eta + \xi + \eta - 1) A_j^{a(+)} \hat{T}_a \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{2(\xi^2 + \eta^2 + \xi\eta + \xi + \eta - 1)}{(\xi + \eta)(\xi + 1)(1 + \eta)} \hat{T}^2 + \frac{R(\xi\eta + 1)}{r_0(\xi + \eta)}. \quad (39)$$

В последнем выражении, переходя к декартовым координатам и учитывая (10) и (23), получим

$$\hat{A} = \hat{\Lambda}^2 + \frac{R\sqrt{m}}{\hbar} \hat{M}_0. \quad (40)$$

Итак,

$$\hat{A}\psi^{spr} = A_q(R)\psi^{spr}. \quad (41)$$

Индекс  $q$  нумирует собственные значения оператора  $\hat{A}$  и пробегает следующие значения  $0 \leq q \leq \frac{N}{2} - L - J$ .

Теперь построим сфероидальный базис в виде разложений

$$\psi^{spr} = \sum_{\lambda=J+L}^{N/2} U_{NqJL}^{\lambda} (R) \psi^{hsp}, \quad (42)$$

$$\psi^{spr} = \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-J-L} V_{NqJL}^{n_1} (R) \psi^{par}. \quad (43)$$

Действуя оператором  $\hat{A}$  на обе стороны разложений (42), (43), пользуясь уравнениями

$$\hat{\Lambda}^2 \psi^{hsp} = \lambda(\lambda + 3) \psi^{hsp},$$

$$\hat{M}_0 \psi^{par} = \frac{2e^2\sqrt{m}}{\hbar(N+4)} (n_1 - n_2 + J - L) \psi^{par} \quad (44)$$

и учитывая уравнение (41), мы получим две системы линейных однородных уравнений

$$[A_q(R) - \lambda(\lambda + 3)] U_{NqJL}^{\lambda} (R) = \frac{R\sqrt{m}}{\hbar} \sum_{\lambda'=J+L}^{N/2} U_{NqJL}^{\lambda'} (R) (\hat{M}_0)_{\lambda\lambda'}, \quad (45)$$

$$\left[ A_q(R) - \frac{2R}{r_0(N+4)} (n_1 - n_2 + J - L) \right] V_{NqJL}^{n_1} (R) = \sum_{n_1'=0}^{\frac{N}{2}-J-L} V_{NqJL}^{n_1'} (R) (\hat{\Lambda}^2)_{n_1 n_1'}. \quad (46)$$

Здесь

$$(\hat{M}_0)_{\lambda\lambda'} = \int \psi_{\lambda}^{*hsp} \hat{M}_0 \psi_{\lambda'}^{hsp} dv,$$

$$(\hat{\Lambda}^2)_{n_1 n_1'} = \int \psi_{n_1}^{*par} \hat{\Lambda}^2 \psi_{n_1'}^{par} dv.$$

Из (34) и (44) следует, что

$$(\hat{M}_0)_{\lambda\lambda'} = \frac{2c^2\sqrt{m}}{\hbar(N+4)} \sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-J-L} \left( 2n_1 - \frac{N}{2} + 2J \right) \bar{W}_{NqJL}^{n_1} \bar{W}_{NqJL}^{n_1'}. \quad (47)$$



Теперь подставляя формулу (35) в (47), учитывая рекуррентное соотношение [9]

$$C_{a\alpha;b\beta}^{c\gamma} = - \left[ \frac{4c^2(2c+1)(2c-1)}{(c+\gamma)(c-\gamma)(b-a+c)(a-b+c)(a+b-c+1)(a+b+c+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \left\{ \left[ \frac{(c-\gamma-1)(c+\gamma-1)(b-a+c-1)(a-b+c-1)(a+b-c+2)(a+b+c)}{4(c-1)^2(2c-3)(2c-1)} \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. C_{a\alpha;b\beta}^{c-2,\gamma} - \frac{(\alpha-\beta)c(c-1) - \gamma a(a+1) + \gamma b(b+1)}{2c(c-1)} C_{a\alpha;b\beta}^{c-1,\gamma} \right\}$$

и пользуясь условием

$$\sum_{\alpha,\beta} C_{a\alpha;b\beta}^{c\gamma} C_{a\alpha;b\beta}^{c'\gamma'} = \delta_{c'c} \delta_{\gamma'\gamma},$$

получим

$$(\widehat{M}_0)_{\lambda\lambda'} = - \frac{e^2 \sqrt{m}}{\hbar(N+4)} \left[ \frac{(L-J)(L+J+1)(N+4)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \delta_{\lambda\lambda'} + \right. \\ \left. B_{NJL}^{\lambda+1} \delta_{\lambda',\lambda+1} + B_{NJL}^{\lambda} \delta_{\lambda',\lambda-1} \right], \quad (48)$$

где

$$B_{NJL}^{\lambda} = \frac{\sqrt{(N-2\lambda+2)(N+2\lambda+6)}}{(\lambda+1)}$$

$$\left[ \frac{(\lambda+J+L+2)(\lambda-J-L)(\lambda-J+L+1)(\lambda+J-L+1)}{(2\lambda+1)(2\lambda+3)} \right]^{1/2}$$

Далее, подставляя (48) в (45) мы приходим к трехчленным рекуррентным соотношениям

$$\left[ A_q(R) - \lambda(\lambda+3) + \frac{R(L-J)(L+J+1)}{r_0(\lambda+1)(\lambda+2)} \right] U_{NqJL}^{\lambda}(R) + \\ + \frac{R}{r_0(N+4)} \left[ B_{NJL}^{\lambda+1} U_{NqJL}^{\lambda+1}(R) + B_{NJL}^{\lambda} U_{NqJL}^{\lambda-1}(R) \right] = 0. \quad (49)$$

Эту систему  $\frac{N}{2} - J - L$  линейных однородных уравнений надо решать совместно с условием нормировки

$$\sum_{\lambda=J+L}^{N/2} |U_{NqJL}^{\lambda}(R)|^2 = 1.$$

Пользуясь разложением (25) получим

$$(\widehat{\Lambda}^2)_{n_1 n_1'} = \sum_{\lambda=J+L}^{N/2} \lambda(\lambda+3) W_{NJLn_1}^{\lambda} W_{NJLn_1'}^{\lambda}. \quad (50)$$

Далее, учитывая формулу (33), соотношение [10]

$$[c(c+1) - a(a+1) - b(b+1) - 2\alpha\beta] C_{a,\alpha;b,\beta}^{c,\gamma} = \\ = \sqrt{(a+\alpha)(a-\alpha+1)(b-\beta)(b+\beta+1)} C_{a,\alpha-1;b,\beta+1}^{c,\gamma} + \\ + \sqrt{(a-\alpha)(a+\alpha+1)(b+\beta)(b-\beta+1)} C_{a,\alpha+1;b,\beta-1}^{c,\gamma}$$

и условие

$$\sum_{c,\gamma} C_{a\alpha;b\beta}^{c\gamma} C_{a\alpha';b\beta'}^{c\gamma} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'},$$

получим для матричного элемента  $(\widehat{\Lambda}^2)_{n_1 n_1'}$  выражение

$$(\widehat{\Lambda}^2)_{n_1 n_1'} = \left[ n_2(n_1+1) + (n_1+2J+1)(n_2+2L+2) + \right. \\ \left. (L-J)(L-J+1) - 2 \right] \delta_{n_1' n_1} - \\ - [n_1(n_1+2J+1)(n_2+1)(n_2+2L+2)]^{1/2} \delta_{n_1', n_1-1} - \\ - [n_2(n_1+1)(n_1+2J+2)(n_2+2L+1)]^{1/2} \delta_{n_1', n_1+1}.$$

Подставляя последнюю формулу в (46) получим трехчленное рекуррентное соотношение

$$\left[ n_2(n_1+1) + (n_1+2J+1)(n_2+2L+2) - 2 + \right. \\ \left. + (L-J)(L-J+1) + \frac{R}{r_0(N+4)} (4n_1 - N + 4J) - A_q(R) \right] V_{NqJL}^{n_1}(R) = \\ = [n_1(n_2+1)(n_1+2J+1)(n_2+2L+2)]^{1/2} V_{NqJL}^{n_1+1}(R) + \\ + [n_2(n_1+1)(n_1+2J+2)(n_2+2L+1)]^{1/2} V_{NqJL}^{n_1-1}(R),$$

которое нужно решать с условием

$$\sum_{n_1=0}^{\frac{N}{2}-J-L} |V_{NqJL}^{n_1}(R)|^2 = 1.$$

Приведем следующие предельные формулы

$$\lim_{R \rightarrow 0} U_{NqJL}^\lambda(R) = \delta_{\lambda q}, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} U_{NqJL}^\lambda(R) = \widetilde{W}_{NqJL}^{n_1},$$
$$\lim_{R \rightarrow 0} V_{NqJL}^{n_1}(R) = W_{NqJL}^\lambda, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} V_{NqJL}^{n_1}(R) = \delta_{n_1 q}.$$

Заметим, что при  $\hat{T} = 0$ , т.е. при  $\hat{J} = \hat{L}$  воспроизводятся все формулы, полученные нами в [4] для чисто кулоновского случая.

## Литература

- [1] C.N.Yang. J.Math.Phys., **19**, 320, (1978).
- [2] L.G.Mardoyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan.  
Oscillator as a Hidden Non-Abelian Monopole. Preprint JINR E2-96-24,  
Dubna, (1996). hep-th/9601093, (1996).
- [3] Л.Г. Мардоян, А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян.  
ЯФ, **61**, 1859, 1998.
- [4] Kh.H.Karayan, L.G.Mardoyan, V.M.Ter-Antonyan.  
The Eulerian Bound States: 5D Coulomb Problem. Preprint JINR E2-94-359,  
Dubna, (1994).
- [5] L.G.Mardoyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan.  
Mod. Phys. Lett., **A14**, 1303, 1999.
- [6] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика, Изд. Наука, М. 1974.
- [7] Г.Бейтман, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т.1, Наука, М.  
1965.
- [8] Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян.  
Изв. АН Арм. ССР, Физика, **19**, 3, (1984).
- [9] Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. Квантовая теория  
углового момента. "Наука", Ленинград, 1975.
- [10] M.Kibler and G.Grenet. J. Math. Phys., **21**, 422, (1980).

Рукопись поступила в издательский отдел  
13 августа 1999 года.