ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-99-109

В.С.Барашенков, М.З.Юрьев

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ С ТРЕХМЕРНЫМ ВЕКТОРОМ ВРЕМЕНИ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

1999

ВВЕДЕНИЕ

Развитие физики сопровождается выявлением все большей симметрии свойств пространственных и временной координат. Установленная впервые в теории относительности Пуанкаре-Эйнштейна она была обобщена путем введения собственного времени для каждой из взаимодействующих частиц [1], а затем и для каждой пространственной точки [2]. Представляет интерес сделать следующий шаг и рассмотреть следствия теории с равным числом пространственных и временных координат $\hat{\mathbf{x}} = x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3$ [1].

В литературе описаны несколько способов введения многомерности времени. В частности, в работах [3]-[6] была сделана попытка ввести свое собственное время для каждой пространственной оси:

$$\hat{\mathbf{x}} = (x, t_x) \otimes (y, t_y) \otimes (z, t_z),$$

и использовать, соответственно, три двумерных преобразования Лоренца. Однако в этом случае не удается воспроизвести наблюдаемую на опыте томасовскую прецессию [7, 8].

[1] В дальнейшем трехмерные пространственные и временные векторы в x- и t-подпространствах будут отмечаться, соответственно, жирным шрифтом и "шляпкой".(В рукописях удобно использовать обозначения $\bar{x}$, $\hat{x}$ и $\hat{\bar{x}}$). Для матриц будем использовать прописные литеры. 6-мерный оператор "набла" $\hat{\boldsymbol{\nabla}} = (\nabla, \hat{\nabla})$, где временной оператор $\hat{\nabla} = (-\partial/\partial t_1, -\partial/\partial t_2, -\partial/\partial t_3)$. Мы будем предполагать, что ко- и контравариантные векторы различаются знаком своих пространственных компонент: $(\hat{\mathbf{x}})_\mu = (\mathbf{x}, -c\hat{t})^T_\mu$, $(\hat{\mathbf{x}})^\mu = (\mathbf{x}, c\hat{t})^{T\mu}$, в силу чего скалярное произведение $\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{a}\mathbf{b} - \hat{a}\hat{b}$. Как правило, латинские и греческие индексы будут пробегать значения $k = 1, ..., 3, \mu = 1, ..., 6$. Константы $\hbar = c = 1$.

Подобно тому, как это сделал впервые Коул [9]-[11], мы будем рассматривать все три временные координаты t_i как совершенно независимые величины, подчиняющиеся обобщенным 6-мерным преобразованиям Лоренца [12]-[15]. При этом каждой точке M траектории в t-пространстве $\hat{t}$ соответствует собственное время

$$t = \int_{M_o}^{M} |d\hat{t}| = \int_{M_o}^{M} \left[\sum_{i=1}^{3} (dt_i)^2\right]^{1/2},$$

где интегрирование выполняется вдоль временной траектории от некоторой начальной точки M_o. Время t может рассматриваться как параметр, определяющий траекторию $\hat{\tau}(t)$.

С физической точки зрения такой подход основан на гипотезе о том, что наша вселенная образовалась, обладая некоторой случайной "стрелой времени", определяемой эволюцией физических процессов в начальный момент ее становления. Последующее инфляционное расширение разрушило пространственно-временные корреляции удаленных областей, и каждая из них может теперь обладать своей собственной временной стрелой $\hat{t}$, вообще говоря, отличной от исходной "реликтовой". Поскольку все процессы и все тела в каждой из таких удаленных друг от друга областей имеют одинаковые, конгруэнтные, временные траектории, мы не замечаем дополнительных временных координат и воспринимаем окружающий мир как одновременной с собственным временем t.

Многомерность времени остается для нас скрытой. Ее можно было бы наблюдать, если бы наша временная траектория была бы наклонена по отношению к "реликтовой" и все компонеты временных траекторий и векторов энергии

$\hat{E}_i = \hat{\tau}_i$ участвующих во взаимодействии тел, оставались бы положительно определенными (см. рис. 1). Вместе с тем нетрудно убедиться, что даже небольшое изменение t-траектории связано с огоромным энергопотреблением и может реализоваться лишь в процессах космического масштаба или в области очень малых пространственно-временных интервалов [17, 19].

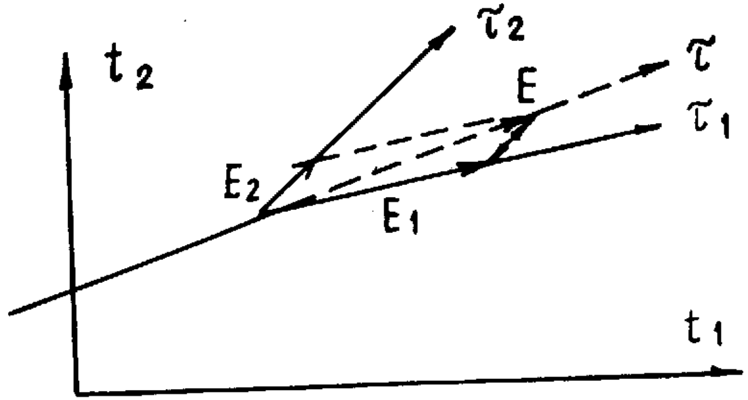

Рис. 1. Тело, движущееся вдоль наклонной временной траектории $\hat{\tau}(t)$, может распасться на несколько частей с различными временными траекториями $\hat{\tau}_i(t)$, однако постулат необратимости времени требует, чтобы компоненты всех трехмерных векторов энергии $\hat{E}_i = E\hat{\tau}_i$ оставались положительно определенными. Это исключает возможность рождения частиц из вакуума, т. к. закон сохранения энергии $\sum \hat{E}_i > 0$ требует, чтобы часть компонент $\tau_i = E_i/E$ имела отрицатенльный знак.

Выполненные исследования [11],[16]-[23] убеждают в том, что в области макроскопических (неквантовых) явлений рассматриваемое многовременное обобщение является логически последовательным и не противоречит ни одному из известных сегодня экспериментальных фактов. Отмеченное в работе [24] расхождение расчетного и наблюдаемого смещений перигелия планеты Меркурий обусловлено специальным предположением о временных траекториях этой планеты и Солнца. При более точном рассмотрении многовременная поправка составляет всего лишь $10^{-8}\%$ экспериментального наблюдаемого смещения [18, 19], [23] – намного меньше точности измерений. Учет необратимости времени. т. е. требование $d\hat{t}/dt \geq 0$, обеспечивает положительную дефинитность энергии и устраняет отмеченные в работах [25, 26] трудности с возможным появлением отрицательных энергий.

Появление объектов с "иным временем" можно ожидать в областях с сильной гравитацией, где понятие энергии, если верить эйнштейновской теории гравитации, утрачивает свой обычный смысл и классический закон сохранения энергии становится неточным. Сооружаемые в настоящее время большие детекторы гравитационных волн позволяют заметить примесь волн с измененными временными траекториями, если они присутствуют во всплесках излучения, возникающего при космических катаклизмах [22].

Как уже отмечалось выше, проявление скрытых от нас измерений времени возможно также в микроскопических процессах, где сохранение энергии и необратимость времени (при очень малых Δx и Δt) виртуально нарушаются. Исследование связанных с этим явлений требует разработки многовременной квантовой теории. Первые шаги в этом направлении сделаны в работах [12,25]. Целью нашей статьи является изучить решения уравнения Дирака в случае *произвольных* временных траекторий частиц и развить теорию квантования спинорного и электромагнитного полей в пространстве с векторным временем.

Следующий раздел нашей статьи посвящен решению многовременного уравнения Дирака. Этот раздел может также служить примером того, как следует обращаться с многовременным формализмом. В разделе 2 получены многовременные уравнения Паули и Шредингера. В разделах 3 и 4 обсуждаются правила квантования полей и показано, что при использовании индефинитной метрики энергия квантов всегда остается положительно определенной. В разделе 5 суммированы основные результаты.

1. ВОСЬМИКОМПОНЕНТНЫЕ СПИНОРЫ ДИРАКА

Следуя работе [25], запишем многовременное восьмикомпонентное уравнение Дирака в виде

$$(i\,\hat{\gamma}\hat{\nabla} + e\hat{\gamma}\hat{\mathbf{A}} - m)\Psi = 0 \tag{1}$$

с матрицами

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} O & \Sigma_i \\ -\Sigma_i & O \end{pmatrix} + \delta_{4i}\begin{pmatrix} I_4 & -I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_i = \begin{pmatrix} O & \sigma_i \\ \sigma_i & O \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_4 = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & I_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_5 = \begin{pmatrix} -iI_2 & O \\ O & iI_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_6 = \begin{pmatrix} O & I_2 \\ -I_2 & O \end{pmatrix},$$

где σ_i — двухкомпонентные матрицы Паули, а I_n — единичная матрица с размерностью $n \times n$.

Сделаем замену

$$\Psi(\hat{\mathbf{x}}) = \Phi(\hat{\mathbf{x}}) e^{-im\hat{\tau}\hat{t}}, \tag{2}$$

где $\Phi = (\phi_1, ..., \phi_8)^T$ — 8-компонентный спинор , $\hat{\tau}$ — постоянный единичный вектор ($\hat{\tau}^2 = 1$). Для свободной частицы этот вектор определяет остающееся неизменным направление ее временной траектории (в этом случае функция $\phi = \psi_o \exp\left[-i(E-m)\right]$ и ψ_o не зависит от времени). В случае, когда $\hat{A} \neq 0$ и направление траектории частицы в t-пространстве изменяется с течением ее собственного времени, тангенциальный вектор $\hat{\tau}$ характеризует направление t-траектории в некоторый произвольно выбранный момент t_o. Уравнение (1) теперь можно записать в виде

$$\left[i\hat{\boldsymbol{\gamma}}\hat{\boldsymbol{\nabla}} + e\hat{\boldsymbol{\gamma}}\hat{\mathbf{A}} - m(1-\Theta)\right]\Phi = 0 \tag{3}$$

с матрицей

$$\Theta = \hat{\gamma}\hat{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 I_4 & \Theta_{23} \\ -\Theta_{23} & -\tau_1 I_4 \end{pmatrix},$$

$$\Theta_{23} = \hat{\Sigma}\hat{\tau} - \Sigma_4\tau_1 = \begin{pmatrix} -i\tau_2 I_2 & \tau_3 I_2 \\ -\tau_3 I_2 & i\tau_2 I_2 \end{pmatrix},$$

Для дальнейшего будет удобным расщепить волновую функцию на две 4-компонентных: $\Phi = (\Phi', \Phi'')^T$. При этом уравнение (??) также расщепляется на два:

$$D\Phi' - \left[i\nabla_4 + eA_4 - m(1+\tau_1)\right]\Phi'' = 0, \tag{4}$$

$$D\Phi'' - \left[i\nabla_4 + eA_4 - m(11-\tau_1)\right]\Phi' = 0, \tag{5}$$

где

$$D = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(i\hat{\boldsymbol{\nabla}} + e\hat{\mathbf{A}}) - \Sigma_4(i\nabla_4 + eA_4) + m\Theta_{23}. \tag{6}$$

Рассмотрим сначала случай свободной частицы, когда поле $\hat{\mathbf{A}} = 0$. Без ограничения общности можно считать, что импульс частицы направлен вдоль оси z: $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$. Тогда, принимая во внимание соотношения

$$i\boldsymbol{\nabla}\Phi' = p\Phi', \quad i\hat{\nabla}\Phi' = -\hat{\tau}E\Phi' \tag{7}$$

и аналогичные выражения для Φ'', уравнения (4) и (5) можно заменить четырьмя уравнениями для четных компонент ϕ_{2n} и четырьмя уравнениями для нечетных компонент ϕ_{2n+1}. Каждая из этих групп имеет по два независимых решения. Например, уравнения "нечетной группы"

$$(E - m\tau_1 + p\tau_3)\phi_1 - ip\tau_2\phi_3 + im\tau_2\phi_5 - (m\tau_3 + p\tau_1)\phi_7 = 0, \tag{8}$$

$$ip\tau_2\phi_1 + (E - \tau_1 - p\tau_3)\phi_3 + (m\tau_3 - p\tau_1)\phi_5 - im\tau_2\phi_7 = 0 \tag{9}$$

имеют решение

$$\phi_1 = 1, \phi_3 = \phi_{2n} = 0, \phi_5 = i\tau_2 gE, \phi_7 = g(p + E\tau_3), \tag{10}$$

где $g = 1/(m + E\tau_1)$, и решение, полученное из (10) путем подстановки

$$p \to -\boldsymbol{p}, \quad \phi_1 \to \phi_3, \quad \phi_3 \to \phi_1, \quad \phi_5 \to -\phi_7, \quad \phi_7 \to -\phi_5.$$

"Четная группа" уравнений и, соответственно, два ее решения получаются из "нечетных решений " путем замены

$$p \to -p, \quad \phi_{2n} \to \phi_{2n+1}.$$

Полный набор независимых решений Φ_s для положительных значений энергии E представлен в таблице 1. Аналогичный набор решений имеется для $E < 0$ [2].

В отличие от одновременной теории, где скаляр

$$\bar{\Phi}_s \Phi_s = \Phi_s^+ \gamma_4 \Phi_s = (m/E) \Phi_s^+ \Phi_s \neq 0,$$

в 6-мерном пространстве-времени независящая от выбора системы координат величина $\bar{\Phi}_s \Phi_s = \Phi_s^+ \Gamma \Phi_s$ с матрицей

$$\Gamma = i\gamma_4\gamma_5\gamma_6 = \begin{pmatrix} -\Sigma_o & 0 \\ 0 & \Sigma_o \end{pmatrix}, \quad \Sigma_o = \begin{pmatrix} O & I_2 \\ I_2 & O \end{pmatrix}$$

обращается в нуль:

$$\bar{\Phi}_s \Phi_r = -N \delta_{r\ell}, \quad N = 2mg, \quad \ell = s + (-1)^{s+1}, \qquad (11)$$

поэтому более удобно использовать линейные комбинации

$$\Psi_{1,2} = (2N)^{-1/2}(\Phi_1 \pm \Phi_2), \quad \Psi_{3,4} = (2N)^{-1/2}(\Phi_3 \pm \Phi_4). \qquad (12)$$

[2]Решения, найденные Коулом [11], соответствуют частному случаю, когда спинорная частица движется точно вдоль временной оси t_3: $\bar{\tau} = (0, 0, 1)$. При этом

$$\Phi_{1,2}^{Cole} = \lambda^{-1}(\Phi_1 \mp \Phi_2), \quad \Phi_{3,4}^{Cole} = \lambda^{-1}(\Phi_3 \mp \Phi_4),$$

где $\lambda = [(E + p)/m]^{-1/2}$, а функции $\Phi - s$ приведены в таблице I.

Таблица 1

Решения Φ_s и $\bar{\Phi}_s$ для многовременного уравнения Дирака (1) в случае, когда поле $\hat{\mathbf{A}} = 0$ и энергия частицы $E \geq 0$

No	I	II	III	IV
ϕ_1	1	0	0	0
ϕ_2	0	0	1	0
ϕ_3	0	1	0	1
ϕ_4	0	0	0	0
ϕ_5	$igE\tau_2$	$g(p - E\tau_3)$	0	$-g(p + E\tau_3)$
ϕ_6	0	0	$ig\tau_2$	0
ϕ_7	$g(p + E\tau_3)$	$-ig\tau_2 E$	0	$-ig\tau_2 E$
ϕ_8	0	0	$g(-p + E\tau_3)$	
$\bar{\phi}_1$	0	−1	0	0
$\bar{\phi}_2$	0	0	0	−1
$\bar{\phi}_3$	−1	0	0	0
$\bar{\phi}_4$	0	0	−1	0
$\bar{\phi}_5$	$g(p + E\tau_3)$	$ig\tau_2 E$	0	0
$\bar{\phi}_6$	0	0	$g(-p + E\tau_3)$	$igE\tau_2$
$\bar{\phi}_7$	$-igE\tau_2$	$g(p - E\tau_3)$	0	0
$\bar{\phi}_8$	0	0	$-ig\tau_2 E$	$-g(p + E\tau_3)$

Пользуясь соотношением (11) или используя приведенные в таблице 1 выражения Ψ-функций, можно убедиться в том, что релятивистски инвариантные скалярные произведения

$$\bar{\Psi}_s \Psi_r = \eta_s \delta_{sr}, \qquad (13)$$

где коэффициент

$$\eta_s = \begin{cases} -1, & s = 1,4 \\ 1, & s = 2.3 \end{cases} \qquad (14)$$

Таблица 2

Функции $U_s = 2(mg)^{1/2}\Psi_s$ и $\bar{U}_s = 2(mg)^{1/2}\bar{\Psi}_s$ с нормировкой $\bar{U}_s U_r = 4mg\eta_s\delta_{sr}$ для четырех спиновых состояний и положительной энергии $E > 0$

s:	I	II	III	IV
u_1	1	1	0	0
u_2	0	0	1	1
u_3	1	−1	0	0
u_4	0	0	1	−1
u_5	$g(p+E_{23}^-)$	$g(-p+E_{23}^+)$	0	0
u_6	0	0	$g(-p+E_{23}^-)$	$g(p+E_{23}^+)$
u_7	$g(p-E_{23}^-)$	$g(p+E_{23}^+)$	0	0
u_8	0	0	$g(-p-E_{23}^-)$	$g(-p+E_{23}^+)$
$\bar{u}_1$	−1	1	0	0
$\bar{u}_2$	0	0	−1	1
$\bar{u}_3$	−1	−1	0	0
$\bar{u}_4$	0	0	−1	−1
$\bar{u}_5$	$g(p+E_{23}^+)$	$g(p-E_{23}^-)$	0	0
$\bar{u}_6$	0	0	$g(-p+E_{23}^+)$	$g(-p-E_{23}^-)$
$\bar{u}_7$	$g(p-E_{23}^+)$	$g(-p-E_{23}^-)$	0	0
$\bar{u}_8$	0	0	$g(-p-E_{23}^+)$	$g(p-E_{23}^-)$
$\bar{\Psi}\Psi$	−1	1	−1	1
$\mathcal{S}$	−1	1	1	−1
$\mathcal{T}$	1	−1	1	−1

Здесь $E_{23}^{\pm} = E(i\tau_2 \pm \tau_3)$.

Следует подчеркнуть, что во многовременной теории отрицательное значение может принимать не только энергия спинорной частицы E, но и норма $\bar{\Psi}_s\Psi_s$, т. е. мы имеем дело с гильбертовым пространством, обладающим индефинитной метрикой.

Введем теперь матрицы обычного и временного (темпорального) спинов [12]

$$\mathcal{S} = (i\gamma_2\gamma_3), i\gamma_3\gamma_1, i\gamma_1\gamma_2) = \sigma \cdot I_4 \qquad (15)$$

и

$$\hat{\mathcal{T}} = (-i\gamma_5\gamma_6, -i\gamma_6\gamma_4, -i\gamma_4\gamma_5) = -\Gamma\hat{\gamma}, \qquad (16)$$

удовлетворяющие двум симметричным соотношениям Паули

$$\mathcal{S}_i\mathcal{S}_k = \varepsilon_{ikell}\mathcal{S}_\ell + \delta_{ik}I_8 \quad \mathcal{T}_i\mathcal{T}_k = \varepsilon_{ikell}\mathcal{T}_\ell + \delta_{ik}I_8.$$

С помощью этих матриц вычислены приведенные в таблице 2 значения пространственной и временной спиральностей

$$S = \bar{\Psi}_s\mathcal{S}(\mathbf{p}/p)\Psi_s = \pm(p/m)\bar{\Psi}_s\Psi, \qquad (17)$$

(знаки "+" и "-" соответствуют спиновым состояниям $s = 1,2$ и $s = 3,4$) и

$$\mathcal{T} = \bar{\Psi}_s\hat{\mathcal{T}}\hat{\tau}\Psi_s = -(E/m)\bar{\Psi}_s\Psi_s. \qquad (18)$$

В этих выражениях учтено, что в силу уравнения Дирака для плоской волны $\hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\hat\gamma}\Psi = -m\Psi$, поэтому

$$\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi = -m^{-1}\bar{\Psi}(\gamma_\nu\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_\nu)p^\nu\Psi = -m^{-1}p^\mu\bar{\Psi}\Psi.$$

Понятно, что частицы с различающейся временной спиральностью могут проявлять свои особенности лишь во взаимодействиях, изменяющих траектории $\hat{t}$. Во всех других случаях такие частицы не различимы между собой.

2. НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Вернемся к уравнениям (4) - (6). По аналогии с одновременной теорией будем предполагать, что $\Phi'' \ll \Phi'$. Это позволяет пренебречь в уравнении для Φ'' членом $(i\nabla_4 + eA_4)$, после чего уравнение для Φ' может быть представлено в виде

$$[P_4 + m(1-\tau_1)]\,\Phi +$$

$$\frac{1}{m(1+\tau_1)}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\mathbf{P}} + \Sigma_4 P_4 + m\Theta_{23})^2\Phi = 0, \qquad (19)$$

где $\hat{\mathbf{P}} = i\hat{\boldsymbol{\nabla}} + e\hat{\mathbf{A}}$ и переобозначено $\Phi = \Phi'$.

Используя свойства матриц $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, можно убедиться в справедливости трех следующих соотношений:

$$(\boldsymbol{\Sigma}(i\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A}))^2\,\Phi = \left(\left[i\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A}\right)^2 - e\sigma\mathbf{H}\right]\Phi, \quad \mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A};$$

$$\tilde{\Sigma}(i\tilde{\nabla} + e\tilde{A} + m\tilde{\tau})^2\Phi = \left[-(i\tilde{\nabla} + e\tilde{A} + m\tilde{\tau})^2 - eT_1G_1\right]\Phi,$$

где $\hat{G} = -\hat{\nabla}\times\hat{A}$, $\tilde{X} = (X_5, X_6)$ — двумерный вектор в t-подпространстве, а матрица временного спина (16)

$$T_1 = i\Sigma_5\Sigma_6 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\left[\boldsymbol{\Sigma}(i\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A})\tilde{\Sigma}(\tilde{A} - m\tilde{\tau}) + \tilde{\Sigma}(\tilde{A} - m\tilde{\tau})\boldsymbol{\Sigma}(i\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A})\right]\Phi =$$

$$\left[ie\boldsymbol{\Sigma}\tilde{\Sigma}(\boldsymbol{\nabla}\tilde{A} - \tilde{\nabla}\mathbf{A})\right]\Phi = ie\boldsymbol{\Sigma}_i\tilde{\Sigma}_{3+k}\mathcal{E}_{ik}\Phi = e\sigma_i(\mathcal{E}_{i3}T_2 - \mathcal{E}_{i2}T_3)\Phi,$$

где (6×6)-мерный тензор электрического поля $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \mathbf{A}\hat{\nabla} - \boldsymbol{\nabla}\hat{A}$, индекс $k = 2, 3$, и две компоненты временного спина

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & iI_2 \\ -iI_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (19) теперь можно записать в виде

$$[P_4 + m(1-\tau_1)]\,\phi_1 + (i\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A})^2 - e\sigma\mathbf{H} -$$

$$-\,(i\tilde{\nabla} + e\tilde{A} + m\tilde{\tau})^2 - eT_1G_1 + \sigma_i(\mathcal{E}_{i3}T_2 - \mathcal{E}_{i2}T_3)\Phi. \qquad (20)$$

Условие $\Psi'' \ll \Psi'$, как это следует из таблиц 1 и 2, требует, чтобы были малы компоненты временного вектора τ_2 и τ_3, т. е. $1+\tau_1 \simeq 2$, $\quad 1-\tau_1 = \tilde{\tau}^2/(1+\tau_1) \sim 0$. Мы будем также предполагать малость потенциала $\hat{A}^2$, а также временных производных $\hat{\nabla}^2\psi$и$\tilde{\nabla}\hat{A}$. С учетом этих приближений получим 4-компонентное волновое уравнение

$$i\frac{d\Psi}{dt} = \left[(1/2m)(i\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A})^2 - (e/2m)\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} + eA_4 +\right.$$

$$\left.(ie/2m)\sigma_k(\mathcal{E}_{k3}T_2 - \mathcal{E}_{k2}T_3)\right]\Psi, \qquad (21)$$

которое и является многовременным обобщением известного равнения Паули. Временная производная в левой части может быть представлена в более симметричном виде

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi}{dt_k}\frac{dt_k}{dt}\tau_k = \hat{\tau}\hat{\nabla}\Psi = \frac{d\Psi}{d\hat{\tau}}.$$

Следует отметить, что уравнение (21) не содержит в явном виде компонент времени τ_2 и τ_3. Другая особенность этого уравнения состоит в неэрмитовости гамильтониана, обусловленной асимметрией тензора электрического поля $\mathcal{E}_{ik}$: в общем случае $\mathcal{E}_{ik} \neq \mathcal{E}_{ki}$ [3].

С физической точки зрения это выражает тот факт, что под действием дополнительных полевых компонент $\hat{\mathbf{A}}_k, k = 5, 6$, изменяется направление временной траектории частицы $\hat{\tau}$ и, соответственно, вектор энергии $\hat{E} = E\hat{\tau}$. Зависимость энергии от времени как раз и отражается в неэрмитовости гамильтониана.

3. КВАНТОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Далее мы будем пользоваться системой координат с осью t_1, параллельной траектории поля $\hat{\tau} = (1, 0, 0)^T$ в t-пространстве, которая в отсутствие взаимодействий остается неизменной. (Перейти к другим системам координат

[3] Например, в случае плоской волны с лоренцевской калибровкой [9]

$$\mathcal{E}(\hat{\mathbf{k}}) = \begin{pmatrix} 0 & k_1 A_5(\mathbf{k}) & k_1 A_6(\mathbf{k}) \\ -\omega A_2(\mathbf{k}) & k_2 A_5(\mathbf{k}) & k_2 A_6(\mathbf{k}) \\ -\omega A_3(\mathbf{k}) & k_3 A_5(\mathbf{k}) & k_3 A_6(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad \omega = |\mathbf{k}|.$$

можно с помощью обобщенных лоренцевских преобразований [14,15]). В этом случае электромагнитный потенциал можно представить в виде 4-мерного интеграла Фурье

$$\hat{\mathbf{A}} = (2\pi)^{-3/2}\int d^4p\,\delta(\hat{\mathbf{p}}^2)\hat{\mathbf{A}}_{\hat{\mathbf{p}}}e^{i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}} =$$

$$(2\pi)^{-2/3}\int \frac{d^3p}{2p}(\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p})e^{i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}} + \hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{p})e^{-i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}}), \qquad (22)$$

где $p = |\mathbf{p}|$, $\hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{p}) = \hat{\mathbf{A}}(-\mathbf{p})$. Как следствие обобщенной лоренцевской калибровки $\hat{\nabla}\hat{\mathbf{A}} = 0$ [10, 21] скалярное произведение $\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) = 0$.

Из 36-компонентного тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}\right). \qquad (23)$$

следует выражение для 6-мерного вектора энергии-импульса электромагнитного поля

$$P_\mu = -i\int d^3x\, T_{\mu,3+k}\tau^k =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{d^3p\, d^3p'}{pp'}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\left(p'_\mu\hat{p}\hat{\tau} - (1/2)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}'\delta_{\mu 3+k}\tau^k\right) \times$$

$$\left[\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p})\hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{p}') + \hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{p})\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}')\right] =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int d^3p\,(p_\mu/p)\left[\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p})\hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{p}) + \hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{p})\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p})\right], \qquad (24)$$

где принято во внимание соотношение

$$p'_\mu\hat{p}\hat{\tau} - (1/2)\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}'\delta_{\mu 3+k}\tau^k = p_\mu\hat{p}\hat{\tau} = p_\mu p.$$

В классической (неквантовой) электродинамике энергия поля $E = \hat{\mathbf{P}}\hat{\tau}$ содержит отрицательные члены, связанные с его временными компонентами $\nu > 3$ (см. также [12, 13]). С отрицательными членами, порождаемыми скалярной компонентой $A_4(\mathbf{p})$ мы встречаемся и в обычной одновременной теории, где, однако, благодаря лоренцевской калибровке их вклад компенсируется вкладом продольной компоненты $A_3(\mathbf{p})$. Во многовременной теории такая компенсация также имеет место, но полевые компоненты A_5 и A_6 остаются некомпенсированными и дают отрицательной вклад а энергию поля (24). В этом случае, чтобы обеспечить положительную дефинитность компонент вектора энергии P_{k+3}, мы должны наложить дополнительное требование

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p})\hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{p}) + \hat{\mathbf{A}}^+(\mathbf{p})\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) = 2|\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p})|^2 \geq 0, \tag{25}$$

т. е. вектор-потенциал $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p})$ должен быть пространственно-подобным. Это условие является следствием необратимости времени, поскольку электромагнитные волны с отрицательными компонентами энергии (большими компонентами A_5 и A_6) соответствуют обратному движению по времени по крайней мере вдоль одной из осей t_i. В частности, не может быть распространяющихся лишь в t-пространстве волн с потенциалом $\hat{\mathbf{A}} = (0, \hat{A})$ [21].

Если теперь ввести нормированные шестимерные амплитуды $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{p}) = (4\pi p)^{1/2}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p})$, подчиняющиеся условиям

$$[a_\mu^+(\mathbf{p}), a_\nu(\mathbf{p}')] = g_{\mu\nu}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \tag{26}$$

$$[a_\mu(\mathbf{p}), a_\nu(\mathbf{p}')] = [a_\mu^+(\mathbf{p}), a_\nu^+(\mathbf{p}')] = 0. \tag{27}$$

с метрическим тензором $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ для $\mu, \nu \leq 3$ и $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$ для $\mu, \nu > 3$ (т. е. как и в обычной одновременной теории мы пользуемся индефинитной метрикой), то вектор энергии-импульса электромагнитного поля

$$\hat{\mathbf{P}} = \int d^3p\, \hat{\mathbf{p}} \left[\mathbf{a}^+(\mathbf{p})\mathbf{a}(\mathbf{p} - \hat{a}^+(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}\right] =$$

$$\sum_{k=1}^{3} \int d^3p\, \hat{\mathbf{p}} \left[n_k(\mathbf{p}) + n_{3+k}(\mathbf{p})\right] + \hat{\mathbf{P}}_{o\mu}, \tag{28}$$

где положительные величины n_ν представляют собой числа фотонов, обладающих поляризацией вдоль оси x_ν, а $\hat{\mathbf{P}}_{o\mu}$ — вакуумное значение энергии-импульса.

4. КВАНТОВАНИЕ СПИНОРНОГО ПОЛЯ

Аналогично электромагнитному полю спинор $\Psi(\hat{\mathbf{x}})$ можно представить в виде 4-мерного интеграла Фурье:

$$\Psi(\hat{\mathbf{x}}) = (2\pi){-3/2} \sum_{s=1}^{4} \int d^4p\, \delta(\hat{\mathbf{p}}^2 + m^2) A_s(\hat{\mathbf{p}}) U_s(\hat{\mathbf{p}}) e^{i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}}, \tag{29}$$

где U_s — приведенные в таблице 2 (для частного случая $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$) решения многовременного уравнения Дирака.

Принимая во внимание свойства δ-функции, разложение (29) перепишем как

$$\Psi(\hat{\mathbf{x}}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=1}^{4} \int \frac{{}^3p}{2E_p} \times$$

$$\left(A_s(\mathbf{p}) U_s(\mathbf{p}, E_p) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x} - iE_p t} + A_s(-\mathbf{p},) V_s(\mathbf{p}, E_p) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x} + iE_p t}\right). \tag{30}$$

Здесь $E_p = (\mathbf{p}^2+m^2)^{1/2}$, а спинор V_s — решение уравнения Дирака для $E_p < 0$,

Изменив знак импульса $\mathbf{p}$ во втором члене правой части уравнения (30), получим

$$\Psi(\hat{\mathbf{x}}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=1}^{4} \int \frac{{}^3p}{2E_p} \times$$

$$\left(A_s(\mathbf{p}) U_s(\mathbf{p}) e^{i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}} + B_s^+(\mathbf{p}) V_s(-\mathbf{p}) e^{-i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}}\right), \qquad (31)$$

где $\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{px} - E_p t$ и обозначено $B_s^+(\mathbf{p}) = A_s(-\mathbf{p})$.

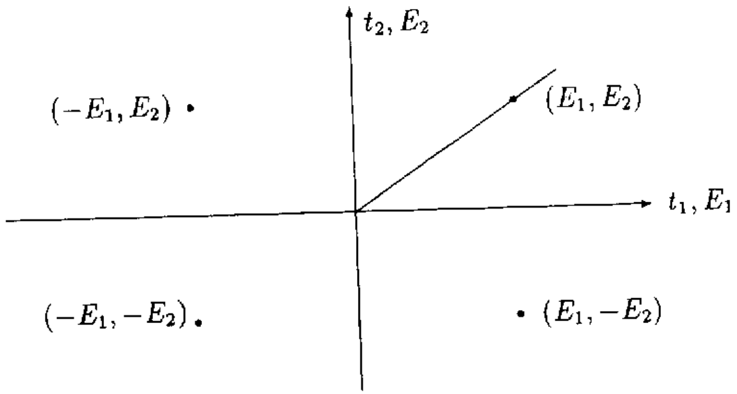

Рис. 2. Условие $d\hat{t}/dt \geq 0$ разрешает лишь те временные траектории $\hat{t}(t)$ с положительной энергией $\hat{E} = e\hat{t} = (E_1, E_2)$, которые расположены в первом квадранте. Отрицательные компоненты энергии, соответствующие траекториям в других квадрантах, исключаются.

Аналогично

$$\bar{\Psi}(\hat{\mathbf{x}}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=1}^{4} \int \frac{{}^3p}{2E_p} \times$$

$$\left(A_s^+(\mathbf{p}) \bar{U}_s(\mathbf{p}) e^{-i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}} + B_s(\mathbf{p}) \bar{V}_s(-\mathbf{p}) e^{i\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}}\right). \qquad (32)$$

В отличие от обычной одновременной теории во многовременном случае отсутствует энергетическая щель $\Delta E = 2m$ между полостями гиперболоида $\hat{\mathbf{P}}^2 = m^2$, соответствующими положительным и отрицательным значениям компонент энергии. Между этими значениями возможен такой же непрерывный переход, как и между разнознаковыми компонентами импульса p_i. Это означает, что в пространстве с многомерным временем, вообще говоря, нельзя однозначно разделить положительно- и отрицательночастотные компоненты поля. Однако такое разделение становится возможным, если учесть ограничение на временные траектории $d\hat{t}/dt \geq 0$, накладываемое необратимостью времени (см. частный случай двумерного времени на рис. 2).

Шестимерный вектор энергии-импульса и электрический заряд спинорного поля теперь могут быть записаны в виде

$$\hat{\mathbf{P}} = -\frac{i}{2} \int d^4x \, T_{\mu k} \tau^k = -\frac{i}{2} \int d^4x \, T_{\mu 4} =$$

$$\frac{1}{2} \int d^4x \left(\bar{\Psi}\gamma_4 \, \hat{\boldsymbol{\nabla}}\Psi - \hat{\boldsymbol{\nabla}}\bar{\Psi}\gamma_4\Psi\right) =$$

$$\sum_{s=1}^{4} \eta_s \int d^3p \, N_p \hat{\mathbf{p}} \left[A_s^+(\mathbf{p}) A_s(\mathbf{p}) - B_s(\mathbf{p}) B_s^+(\mathbf{p})\right], \qquad (33)$$

$$Q = q\int d^3x\,\bar{\Psi}\gamma_4\Psi =$$

$$\sum_{s=1}^{4}\eta_s\int d^3p\,N_p\left[A_s^+(\mathbf{p})A_s(\mathbf{p}) + B_s(\mathbf{p})B_s^+\mathbf{p})\right], \qquad (34)$$

с однозначно разделенными амплитудами A и B. При этом введена величина $N_p = 1/E_p(E_p+m)$ и учтены соотношения

$$\bar{U}_s(\mathbf{p})\gamma_4U_r(\mathbf{p}) = (E_p/m)\bar{U}_s(\mathbf{p})U_r(\mathbf{p}) = 4E_p(E_P+m)^{-1}\eta_s\delta_{sr}, \qquad (35)$$

$$\bar{V}_s(\mathbf{p})\gamma_4V_r(\mathbf{p}) = (E_p/m)\bar{V}_s(\mathbf{p})V_r(\mathbf{p}) = N_p\eta_s\delta_(sr), \qquad (36)$$

$$U_s(\mathbf{p})\gamma_4V_r(\mathbf{p}) = \bar{U}_s(\mathbf{p})\gamma_4V_r(\mathbf{p}) = \bar{U}_s(\mathbf{p})\gamma_4\bar{V}_r(\mathbf{p}) = 0. \qquad (37)$$

Если перейти к перенормированным амплитудам $a_s = A_sN_p^{1/2}$, $b_s = b_sN_p^{1/2}$ и ввести правила квантования

$$[a_s^+(\mathbf{p}), a_r(\mathbf{p}')]_+ = [b_s^+(\mathbf{p}), b_r(\mathbf{p}')]_+ = \eta_s\delta_{rs}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \qquad (38)$$

$$[a_s(\mathbf{p}'), a_r(\mathbf{p}')]_+ = [b_s(\mathbf{p}), b_r(\mathbf{p}')]_+ = [a_s(\mathbf{p}), b_r(\mathbf{p}')]_+ =$$
$$[a_s^+(\mathbf{p}), b_r(\mathbf{p}')]_+ = 0, \qquad (39)$$

то выражения для энергии-импульса и заряда запишутся в виде

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{s=1}^{4}\int d^3p\,\hat{\mathbf{p}}\left[n^+(\mathbf{p}) + n^-(\mathbf{p})\right] + \hat{\mathbf{P}}_o \qquad (40)$$

$$Q = q\sum_{s=1}^{4}\int d^3p\,\left[n^+(\mathbf{p}) - n^-(\mathbf{p})\right] + Q_o, \qquad (41)$$

откуда можно заключить, что, как и в обычной одновременной теории, $n^+ = a_s^+(\mathbf{p})a_r(\mathbf{p}')$ и $n^- = b_s^+(\mathbf{p})b_r(\mathbf{p}')$ — числа частиц и античастиц, а бесконечные величины $\hat{\mathbf{P}}_o$ и Q_o — вакуумные значения энергии-импульса и заряда.

Мы видим, что независимо от знака нормы $\bar{\Psi}\Psi$ энергия частицы $(\hat{P} - \hat{P}_o)\hat{\tau}$ всегда остается положительной величиной. Этот результат не зависит и от выбора системы координат в t-пространстве.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По сравнению с одновременным случаем уравнение Дирака в пространстве с трехмерным временем имеет вдвое большее число линейно независимых решений, половина которых соответствует положительным, а вторая половина — отрицательным компонентам вектора энергии $\hat{E} = E\hat{\tau}$, где $\hat{\tau}$ — вектор, определяющий направление траектории частицы в t-пространстве. В каждой из этих двух групп решений два решения обладают отрицательной нормой ($\bar{\psi}\psi = -1$), что затрудняет интерпретацию ψ-функции как амплитуды вероятности. Однако если задаться определенным значением временной спиральности $\mathcal{T}$, то норма ψ-функции остается знакопостоянной.

В нерелятивистском пределе волновое уравнение не содержит дополнительных временных координат τ_2, τ_3 и не отличается от обычного уравнения Шредингера для бесспиновой частицы.

Как и в одновременном случае, теория поля с трехмерным вектором времени, описывающая взаимодействие спинорной частицы с 6-мерным электромагнитным потенциалом, может быть сформулирована в гамильтоновой форме и допускает квантование в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой. При этом условие необратимости времени обеспечивает положительную дефинитность компонент векторов энергии квантов и однозначное разделение частиц и античастиц. Неэрмитовость части гамильтониана, отвечающей за взаимодействие, отражает возможность изменения направлений временных траекторий взаимодействующих частиц $\hat{\tau}_i$ и, соответственно, вектора энергии $\hat{E}_i = e\hat{\tau}_i$. Следует заметить, что неэрмитовость может иметь место доже при постоянном значении полной энергии E.

Как видим, в теории многомерного времени пока не удается обнаружить каких-либо противоречий. Возможно, они проявятся при более детальном изучении процессов взаимодействия элементарных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *P. A. M. Dirac, V. A. Fock, B. Podolsky.* **Zs. d. Sowjetunion. 1932. V. 2. P. 468.**

[2] *S. Tomonaga.* **Prog. Theor. Phys. 1946. V. 1. P. 27.**

[3] *P. T. Pappas.* **Lett. Nuovo Cim. 1978. V. 22. P. 601.**

[4] *G. Zieno.* **Lett. Nuovo Cim. 1979. V. 24. P. 171.**

[5] *G. Zieno.* **Lett. Nuovo Cim. 1981. V. 31. P. 629.**

[6] *.P. T. Pappas.* **Nuovo Cim. B. 1982. V. 68. P. 111.**

[7] *J. Strnag.* **Lett. Nuovo Cim. 1983. V. 25. P. 73.**

[8] *J. Strnag.* **Phys.Lett. A. 1983. V. 96. P. 231.**

[9] *E. A. B. Cole.* **Nuovo Cim. B. 1978. V. 44. P. 157.**

[10] *E. A. B. Cole.* **Nuovo Cim. A. 1980. V. 60. P. 1.**

[11] *E. A. B. Cole.* **Nuovo Cim. B. 1985. V. 85. P. 105.**

[12] *J. B. Boyling, E. A. B. Cole.* **Intern. J. Theor. Rhys. 1993. V. 32. P. 801.**

[13] *M. Pavšič.* **J. Phys. A: Math. Gen. 1981. V. 14. P. 3217.**

[14] *E. A. B. Cole, S. A. Buchman.* **J. Phys. A: Math. Gen. 1982. V. 15. P. L255.**

[15] *V. S. Barashenkov.* **Six-dimensional space-time transformations. Preprint JINR E2-97-83, Dubna, 1997.**

[16] *E. A. B. Cole.* **Phys. Lett. A. 1983. V. 95. P. 282.**

[17] *E. A. B. Cole*. **J. Phys. A: Math. Gen. 1980. V. 13. P. 109.**

[18] *V. S. Barashenkov*. **Tur. J. Phys. 1998. V. 22. S. 1.**

[19] *V. S. Barashenkov*. **Found. Phys. 1998. V. 28. P. 471.**

[20] *V. S. Barashenkov*. **Propogation of signals in space with multidimensional time. Preprint JINR E2-96-112, Dubna, 1996.**

[21] *V. S. Barashenkov, M. Z. Yur'iev*. **Nuovo Cim. B. 1997. V. 112. P. 117.**

[22] *V. S. Barashenkov, A. B. Pestov, M. Z. Yur'iev*. **Gen. Rel. & Grav. 1997. V. 29. P. 1345.**

[23] *V. S. Barashenkov, M. Z. Yur'iev*. **Is the Hypothesis of Time Multi-Dimensionality at Variance with the Facts? Preprint JINR E2-96-246. Dubna. 1996.**

[24] *E. A. B. Cole*. **Nuovo Cim. B. 1980. V. 55. P. 269.**

[25] *J. Dorling* . **Amer. J. Phys. 1970, V. 38. P. 539.**

[26] *P. Demers*. **Canad. j. Phys. 1975. V. 53. P. 1687.**

[27] *C. E. Patty, L. I. Smalley*. **Phys. Rev. D. 1991. V. 32. P. 891.**

Рукопись поступила в издательский отдел
14 апреля 1999 года.