ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 9894

В.Ш.Гогохия, Д.П.Мавло, А.Т.Филиппов

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА-ТАВХЕЛИДЗЕ И ЕГО МОДИФИКАЦИЙ

1976

Р2 - 9894

В.Ш.Гогохия, Д.П.Мавло, А.Т.Филиппов

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА-ТАВХЕЛИДЗЕ И ЕГО МОДИФИКАЦИЙ

Направлено на XVIII Международную конференцию по физике высоких энергий (Тбилиси, 15-21 июля, 1976 г.)

Квазипотенциальный подход [1] в квантовой теории поля дает эффективный способ рассмотрения релятивистских задач о связанных состояниях [2, 3]. В частности, этот метод успешно применялся для вычисления слабых и электромагнитных формфакторов мезонов и барионов в кварковых моделях [4]. В связи с возможными применениями квазипотенциальных уравнений к построению кварковых моделей необходимо отметить, что сама процедура их построения является неоднозначной /это связано с неоднозначностью продолжения квазипотенциальных амплитуд за массовую оболочку/, и поэтому a priori не ясно, какому из квазипотенциальных уравнений отдать предпочтение [5]. С другой стороны, этот произвол открывает возможность привлекать для рассмотрения различных физических задач адекватные им формы квазипотенциальных уравнений [2, 6]. В настоящем докладе рассматривается некоторая модификация уравнения Логунова-Тавхелидзе для полной амплитуды рассеяния скалярных частиц равных масс, предложенная одним из авторов /А.Т.Ф./,

$$T(\bar{p},\bar{p}') = V[(\bar{p}-\bar{p}')^2] + \int \frac{d^3q\,(k^2+m^2)^{\frac{\nu-1}{2}}}{(q^2+m^2)^{\nu/2}} \frac{V[(\bar{p}-\bar{q})^2]\,T(\bar{q},\bar{p}')}{k^2-q^2}, \qquad /1/$$

где $\nu = 1$ соответствует обычному уравнению Логунова-Тавхелидзе. Разложив амплитуду и квазипотенциал $V[(\bar{p}-\bar{p}')^2]$ по парциальным волнам, можно показать, что данное интегральное уравнение /1/ сводится к дифференциальной краевой задаче второго порядка в импульсном пространстве, в случае квазипотенциала, имеющего в координатном пространстве вид $V(r) = -gr^{-1}$ /2/. Соответствующая квазипотенциальная краевая задача для связанных состояний и S-волны имеет вид:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \lambda^2 V^{(\nu)}(x,E) f(x) = 0; \qquad /2/$$

$$V^{(\nu)}(x,E) = (1+x^2)^{-\nu/2}(x^2+E^2)^{-1},$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x; \quad f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \mathrm{const}, \qquad /3/$$

где $x = pm^{-1}$; $\lambda^2 = gm^{-1}(1-E^2)^{\frac{\nu-1}{2}}$; $E^2 = -k^2 m^{-2}$; $x \in \mathfrak{X} = [0,\infty)$; $E \in \mathcal{E} = [0, 1]$. Мы подробно исследуем случай $\nu = 1$/уравнение Логунова-Тавхелидзе/ /2/, и $\nu = 2$. Отметим, что в последнем случае квазипотенциальное уравнение в координатном пространстве сводится к линейному дифференциальному уравнению четвертого порядка с локальным квазипотенциалом, в то время как обычное уравнение Логунова-Тавхелидзе ($\nu = 1$) сводится к соответствующему интегро-дифференциальному уравнению второго порядка.

Сформулируем кратко применительно к квазипотенциальной краевой задаче /2/, /3/ одну из теорем теории Штурма-Лиувилля /7/, которая будет использована в дальнейшем:

Теорема. Если функцию $V(x,E)$ ($V(x,E) > 0$, $x \in \mathfrak{X}$, $E \in \mathcal{E}$) увеличить во всей /или некоторой части/ области изменения переменной $x \in \mathfrak{X}$ и параметра $E \in \mathcal{E}$, то положительные собственные значения уменьшатся, а отрицательные увеличатся.

Таким образом, чтобы применить данную теорему к задаче /2/, /3/, необходимо найти такие функции $V^{(\nu)}_{<}(x,E)$ и $V^{(\nu)}_{>}(x,E)$, для которых неравенства

$$V^{(\nu)}_{>}(x,E) \geq V^{(\nu)}(x,E) = (1+x^2)^{-\nu/2}(x^2+E^2)^{-1} \geq V^{(\nu)}_{<}(x,E) \qquad /4/$$

строго выполнялись бы в $\mathfrak{X} \times \mathcal{E}$, а уравнения /2/, с соответствующими функциями $\lambda^2_{<} V^{(\nu)}_{<}(x,E)$ и $\lambda^2_{>} V^{(\nu)}_{>}(x,E)$ вместо $\lambda^2 V^{(\nu)}(x,E)$ и с прежними граничными условиями /3/, решались бы в терминах известных специальных функций /или допускали бы более простое, чем исходное уравнение /2/, аналитическое, асимптотическое или численное исследование/. Если решения краевых задач /2/, /3/ с соответствующими функциями $\lambda^2_{<} V^{(\nu)}_{<}(x,E)$ и $\lambda^2_{>} V^{(\nu)}_{>}(x,E)$ известны, то можно записать, основываясь на изложенной теореме, точные двухсторонние оценки для собственных значений исходной краевой задачи /2/, /3/:

$$|\lambda^2_{<}| \geq |\lambda^2| \geq |\lambda^2_{>}|. \qquad /5/$$

Для уравнения Логунова-Тавхелидзе в качестве аппроксимирующих функций выбираем:

$$V^{(1)}_{<}(x,E) = (1+x)^{-1}(x+E)^{-2}, \qquad /6/$$

$$V^{(1)}_{>}(x,E) = \begin{cases} (x^2+E^2)^{-1}, & x < 1, \qquad /7а/ \\ x^{-3}, & x > 1. \qquad /7б/ \end{cases}$$

Очевидно, что такой выбор аппроксимирующий функций правильно отражает аналитические свойства $V^{(1)}(x,E) = (x^2+1)^{-1/2}(x^2+E^2)^{-1}$: точка $x = 0$ при $E \neq 0$ является неособой, в то время как при $E = 0$ возникает регулярная особенность при $x = 0$, что и обуславливает поведение спектра $\lambda^2_n(E)$ при малых E. Кроме того, аппроксимирующие функции /6/, /7/ имеют правильную асимптотику при $x \to \infty$. В связи с мажорантной функцией /7/ необходимо отметить, что основная теорема, приведенная выше, имеет место и для кусочно-непрерывных аппроксимирующих функций.

Рассмотрим сначала краевую задачу /2/, /3/ для минорантной функции /6/ $V^{(1)}_{<}(x,E)$. При этом решение уравнения /2/ выражается через гипергеометрические функции. Используя далее известные аналитические продолжения гипергеометрических функций и учитывая граничные условия /3/, получаем следующее общее минорантное спектральное условие:

$$(-1)^{1-2\alpha}\,\frac{\Gamma(\alpha^*)\Gamma(\alpha^*+1)\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha^*)}=\left(\frac{E}{E-1}\right)^{2\alpha-1}\frac{F(\alpha,-\alpha^*;2\alpha;\frac{E}{E-1})}{F(\alpha^*,-\alpha;2\alpha^*;\frac{E}{E-1})},$$

где $\alpha=\frac{1}{2}+i\left[\frac{\lambda_<^2}{1-E}-\frac{1}{4}\right]^{1/2}$. /8/

В случае мажорантной функции $V_>^{(1)}(x,E)$ /7/ решения уравнения /2/ при $x\in[0,1]$ выражаются через гипергеометрические функции, а при $x\in[1,\infty)$ - через функции Бесселя. Приравнивая логарифмические производные этих решений в точке $x=1$, получим следующее общее мажорантное спектральное условие:

$$\frac{1}{2}+\lambda_>\frac{J_1'(2\lambda_>)}{J_1(2\lambda_>)}= \qquad /9/$$

$$=\frac{\lambda_>^2}{3}\,\frac{A(a)E^{2a}{}_2F_1(1+a,-a^*;2a+\frac{1}{2};-E^2)+A(a^*)E^{2a^*}{}_2F_1(1+a^*,-a;2a^*+\frac{1}{2};-E^2)}{B(a)E^{2a}{}_2F_1(a,-a^*;2a+\frac{1}{2};-E^2)+B(a^*)E^{2a^*}{}_2F_1(a^*,-a;2a^*+\frac{1}{2};-E^2)},$$

где $a=\frac{1}{4}+\frac{i}{2}(\lambda_>^2-\frac{1}{4})^{1/2}$. $A(a)=\Gamma(\frac{5}{2})\left[\Gamma(\frac{1}{2}-2a)\right]^{-2}(\frac{3}{2}-a)$,

$$B(a)=\Gamma(\frac{3}{2})\left[\Gamma(\frac{1}{2}-2a)\right]^{-1}\left[(\frac{1}{2}-a)\right]^{-1}(\frac{3}{2}-a).$$

Рассмотрим модифицированную $(\nu=2)$ квазипотенциальную краевую задачу /2/. В качестве аппроксимирующих функций выбираем:

$$V_<^{(2)}(x,E)=(1+x)^{-2}(x+E)^{-2}, \qquad /10/$$

$$V_>^{(2)}(x,E)=\begin{cases}(x^2+E^2)^{-1}, & x<1 \qquad /11а/\\ x^{-4}, & x>1 \qquad /11б/\end{cases}$$

Очевидно, что такой выбор аппроксимирующих функций, как и в случае уравнения Логунова-Тавхелидзе $(\nu=1)$,

правильно воспроизводит аналитические свойства исходного квазипотенциала $V^{(2)}(x,E)=(x^2+1)^{-1}(x^2+E^2)^{-1}$. Решение уравнения /2/ с минорантной функцией /10/, удовлетворяющее граничному условию на бесконечности /3/, имеет вид:

$$f(x)=\mathrm{const}[(x+1)(x+E)]^{1/2}\sin\left\{\left[\frac{\lambda_<^2}{(1-E)^2}-\frac{1}{4}\right]^{1/2}\ln\frac{1+x}{E+x}\right\}, \qquad /12/$$

откуда, учитывая граничное условие в нуле /3/, получаем следующий минорантный спектр для модифицированной квазипотенциальной краевой задачи:

$$\lambda_{n,<}^2(E)=\frac{1}{4}(1-E)^2+\left[n\pi\frac{1-E}{\ln E}\right]^2,\ n=1,2,3,\ldots \qquad /13/$$

Учитывая, что $V_>^{(2)}(x,E)=V_>^{(1)}(x,E)$, $x\in[0,1]$ /см. /7а/, /11а//, и конкретный вид /11/, мы можем получить мажорантное спектральное условие для модифицированной квазипотенциальной краевой задачи $(\nu=2)$ из мажорантного спектрального условия для уравнения Логунова-Тавхелидзе $(\nu=1)$ /9/ посредством следующей замены

в правой части /9/: $\frac{1}{2}+\lambda_>J_1'(2\lambda_>)/J_1(2\lambda_>)\to\lambda_>\mathrm{ctg}\lambda_>$,

которая, очевидно, не влияет на поведение мажорантного спектра $\lambda_>^2(E)$ при малых E.

Рассмотрим предельные случаи полученных таким образом точных минорантного и мажорантного спектральных условий /8/, /9/, /13/, а именно, предел сильной $(E=1)$ связи и предел слабой $(E\to0)$ связи. Собственные

значения $\lambda_{n,\mu}^{2(\nu)}(E)$ при $E=1$ $(\nu=1,2;\mu=<,>,$ точное$)$, имеют вид:

$$\lambda_{n,<}^{2(1)}(1)=\frac{1}{4}\kappa_n^2;\ \lambda_{n,<}^{2(2)}(1)=\pi^2n^2;\ \lambda_{\text{точ.}}^{2(2)}(1)=4n^2-1, \qquad /14/$$

где $n=1,2,3,\ldots$, а κ_n - корни функции Бесселя $J_1(x)$. Мажорантные собственные значения $\lambda_{n,>}^{2(\nu)}(1)$ были рассчитаны на ЭВМ; например, для первых двух уровней имеем: $\lambda^{2(1)}_{1,>}(1) = 1{,}155$, $\lambda^{2(1)}_{2,>}(1)=5{,}759$, $\lambda^{2(2)}_{1,>}(1)=1{,}632$, $\lambda^{2(2)}_{2,>}(1)=11{,}162$. Вышеприведенные аналитические и численные выражения для собственных значений, как и следовало ожидать, удовлетворяют неравенству /5/, следующему из основной теоремы.

В пределе слабо связанных состояний $(E \to 0)$ энергетические уровни системы $E^{(\nu)}_{n,\mu}(\lambda)$, $n=1,2,3,\ldots$, полученные из спектральных условий /8/, /9/, /13/, обнаруживают неаналитическую зависимость от константы связи λ^2 при $\lambda^2 \to \frac{1}{4}$:

$$E^{(\nu)}_{n,\mu}(\lambda) = \exp\{-\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}} + K^{(\nu)}_{\mu} + 0(\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}})\}, \qquad /15/$$

где $K^{(1)}_{>} = K^{(2)}_{>} = \psi(1) - \frac{1}{2}\psi(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2}\psi(\frac{5}{4}) \approx 1{,}65$;

$$K^{(1)}_{<} = 2\psi(1) - \psi(\frac{1}{2}) - \psi(\frac{3}{2}) \approx 0{,}77; \quad K^{(2)}_{<} = 0.$$

Вышеприведенные выражения для $K^{(\nu)}_{\mu}$, очевидно, удовлетворяют неравенству $K^{(\nu)}_{<} \le K^{(\nu)}_{\text{точ.}} \le K^{(\nu)}_{>}$, т.е.

$E^{(\nu)}_{n,<} \le E^{(\nu)}_{n,\text{точ.}} \le E^{(\nu)}_{n,>}$, что эквивалентно неравенству /5/ основной теоремы.

В заключение особо подчеркнем, что квазипотенциальная краевая задача /2/, /3/ не может быть решена в терминах известных специальных функций даже при малых E /ситуация, с которой, увы, часто приходится сталкиваться при решении конкретных задач теоретической физики/, и только техника двухсторонних спектральных оценок позволила нам получить явное функциональное выражение для точного энергетического спектра //15/, μ = точ./. Построенные выше точные двухсторонние оценки спектра квазипотенциальных краевых задач позволили легко доказать, что: 1/ существует точка сгущения уровней $E^{(\nu)}_{n,\text{точ.}}(\lambda)$ при $E \to 0$; 2/ зависимость $E^{(\nu)}_{n,\text{точ.}}(\lambda)$ неаналитическая, причем неаналитичность экспоненциального типа /15/; 3/ в области $0 \le \lambda^2 \le \frac{1}{4}$ дискретный спектр отсутствует.

Таким образом, точные двухсторонние оценки дискретного спектра дифференциальных краевых задач на основе теории Штурма-Лиувилля могут быть с успехом использованы: А/ как метод получения /доказательства/ спектральных результатов типа 1/-3/, приведенных выше; Б/ для проверки точности приближенных /в частности, асимптотических /2/ методов; В/ как основа для последующего применения численных методов /в частности, непрерывного аналога метода Ньютона /8/ /. Существующий запас хорошо исследованных специальных функций /9/ позволяет надеяться, что с помощью метода двухсторонних оценок можно во многих случаях получить ценную спектральную информацию для обширных классов линейных дифференциальных краевых задач, часто возникающих в теоретической физике.

Литература

1. *A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cimento, 29 380 /1963/. A.N.Tavkhelidze. Lectures on Quasipotential Method in Field Theory, Bombay, Tata Institute of Fundamental Research, 1964.*
2. *В.Ш.Гогохия, Д.П.Мавло, А.Т.Филиппов .ТМФ, 27, 323 /1976/.*
3. *Р.Н.Фаустов. ЭЧАЯ, 3, 238 /1972/.*
4. *A.N.Tavkhelidze. Fundamental Problems in Elementary Particle Physics; Доклад на Сольвеевском конгрессе, Брюссель, 1967, стр. 145.*
5. *А.Т.Филиппов. Международная зимняя школа теоретической физики при ОИЯИ, Дубна, 1964, т. 2.*
6. *В.Р.Гарсеванишвили, В.А.Матвеев, Л.А.Слепченко. ЭЧАЯ, 1, 91 /1970/; В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков. ЭЧАЯ, 2, 635 /1972/; В.А.Ризов, И.Т.Тодоров. ЭЧАЯ, 6, 669 /1975/.*
7. *Ф.Трикоми. Дифференциальные уравнения, Москва, 1962.*

8. Д.П.Мавло, И.В.Пузынин, А.Т.Филиппов. Препринт ОИЯИ, Р2-8689, Дубна, 1975.
9. Г.Бейтман, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. т. 1,2,3, Наука , Москва, 1965;
Y.L.Luke. The Special Functions and their Approximations, v. 1,2, Academic Press, New-York, London, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 июня 1976 года.