ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 9893

В.Ш.Гогохия, Д.П.Мавло, А.Т.Филиппов

О РЕШЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

1976

P2 - 9893

В.Ш.Гогохия, Д.П.Мавло, А.Т.Филиппов

О РЕШЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Направлено на XVIII Международную конференцию
по физике высоких энергий (Тбилиси, 15-21 июля, 1976 г.)

Гогохия В.Ш., Мавло Д.П., Филиппов А.Т. P2 - 9893

О решении релятивистских квазипотенциальных уравнений для связанных состояний

В работе исследуется квазипотенциальное уравнение Логунова-Тавхелидзе. Показано, что для обширного класса квазипотенциалов интегральные уравнения сводятся к дифференциальным краевым задачам в импульсном пространстве. Подробно рассматривается дифференциальная краевая задача второго порядка, соответствующая квазипотенциалу $V(r)=-gr^{-1}$. Для решений этой и аналогичной ей задач используется метод эталонного уравнения, позволяющий получить спектр и волновые функции связанных состояний.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований

Дубна 1976

Gogokhia V.Sh., Mavlo D.P., Filippov A.T. P2 - 9893

On Solving Relativistic Quasipotential Equations for Bound States

Quasipotential Logunov-Tavkhelidze equation is investigated. It has been shown that for some class of quasipotentials the integral equation may be reduced to the differential boundary value problems in momentum representation. The second order differential boundary value problem, corresponding to quasipotential $V(r)=-gr^{-1}$ is considered in detail. The comparison equation method is suggested for solving the problems of this type. In the case of the problem considered the eigenvalues and eigenfunctions have been obtained by the use of this method.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

Важной задачей квантовой теории поля и физики элементарных частиц является описание спектра связанных состояний. Релятивистскую задачу о связанных состояниях удобно рассматривать на основе квазипотенциального уравнения Логунова-Тавхелидзе [1], в котором с одной стороны, отсутствуют трудности, связанные с аномальными состояниями и "духами", а, с другой стороны, возможна последовательная вероятностная трактовка квазипотенциальной волновой функции. Различные задачи об описании связанных состояний на языке квазипотенциального уравнения Логунова-Тавхелидзе и его модификаций изучались ранее в ряде работ [2,3]. Следует отметить релятивистскую кулоновскую задачу на связанные состояния, которая рассматривалась в работе [4], на основе квазипотенциального уравнения Кадышевского.

Основой нашего подхода [5-8] к релятивистской задаче на связанные состояния является сведение интегральных уравнений к дифференциальным краевым задачам в импульсном пространстве с последующим их решением аналитическими, асимптотическими и численными методами. Этот подход остается эффективным и в применении к задачам рассеяния. Многие задачи квантовой механики и квантовой теории поля сводятся к интегральному уравнению общего вида:

$$u(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)V_i(\lambda,x), \qquad /1/$$

$$V_i(\lambda,x)=\int_{x_i}^{x} dy\, f_i(\lambda;y,u(y)); \quad f_i\equiv b_i(x)g_i(\lambda,x,u(x)), \qquad /2/$$

где $u_0(x)$, $a_i(x)$, $f_i(\lambda, x, u)$ - известные функции, λ - некоторая совокупность параметров, x_i - некоторые действительные числа /обычно $x_i = 0$ для $i=1,\ldots,m$ и $x_i=\infty$ для $i=m+1,\ldots,n$ /. Таким образом, задача заключается в том, чтобы найти соотношения между параметрами λ, при которых система /1/, /2/ имеет решение, и определить соответствующие функции $u(x)$. Можно показать, что уравнение /1/ конечным числом дифференцирований сводится к дифференциальному уравнению n-го порядка с n граничными условиями $V_i(x_i)=0$. Типичным примером такого рода уравнений являются уравнения Бете-Солпитера, Дайсона-Швингера, Липпмана-Швингера, Логунова-Тавхелидзе /1,6-9/. Например, в кварковой модели, предложенной в работах /9/, волновая функция Бете-Солпитера пиона удовлетворяет уравнению:

$$u(x) = -\epsilon\frac{\pi}{2} f\{ x^{1/2} N_1(x)\int_0^x dy \frac{y^{1/2} J_1(y)}{y^2+\mu^2} u(y) + \qquad /3/$$

$$+ x^{1/2} J_1(x)\int_x^\infty dy \frac{y^{1/2} N_1(y)}{y^2+\mu^2} u(y)\},$$

где $\epsilon = \pm 1$, $J_1(x)$ и $N_1(x)$ - функции Бесселя первого и второго рода, соответственно. Легко видеть, что уравнение /3/ эквивалентно следующей краевой задаче на интервале $[0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - [1 - \frac{\epsilon f}{x^2+\mu^2} - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2}] u(x) = 0,$$

$$u(0)=0, \quad u(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{-1/2} N_\lambda^{1/2}(x).$$

Более подробно проиллюстрируем предлагаемый метод на примере квазипотенциального уравнения Логунова-Тавхелидзе для парциальных амплитуд рассеяния двух скалярных частиц /кварков/ одинаковой массы m, которое имеет вид [1,8]:

$$f_\ell(p,p') = V_\ell(p,p') + \int_0^\infty \frac{dq}{\sqrt{q^2+m^2}} \frac{V_\ell(p,q) f_\ell(q,p')}{k^2-q^2}, \qquad /5/$$

где p, p' - соответственно начальный и конечный импульсы в системе центра масс. Энергетическая поверхность определяется условием $p^2 = p'^2 = k^2$, $W = 2\sqrt{k^2+m^2}$ - энергия в системе центра масс, а квазипотенциал в импульсном представлении $V_\ell(p,p')$ удовлетворяет соотношению:

$$V_\ell(p,p') = \sqrt{pp'}\int_0^\infty dr\, V(r) J_{\ell+1/2}(pr) J_{\ell+1/2}(p'r). \qquad /6/$$

Если теперь $V_\ell(p,p')$ удается представить в виде:

$$V_\ell(p,p') = \theta(p-p')\sum_{i=1}^{M} f_1^{(i)}(p) f_2^{(i)}(p') + \theta(p'-p)\sum_{i=1}^{N} f_3^{(i)}(p) f_4^{(i)}(p'), \qquad /7/$$

то уравнение /5/ соответствующим числом дифференцирований можно свести к дифференциальному уравнению для $f_\ell(p,p')$ порядка $W \le M+N$. Существует обширный класс квазипотенциалов в координатном пространстве, которые приводят к представлению /7/. Например, в случае квазипотенциалов вида $V(r) = gr^{-2n+1}$ уравнение /5/ с ядром /6/ сводится к неоднородному дифференциальному уравнению порядка $2n$ с n граничными условиями на бесконечности и с n граничными условиями в нуле. Случай $n=2$ подробно рассматривался в работе /5/. Для квазипотенциала $V(r) = gr^{-1}$ $(n=1)$ ядро $V_\ell(p,p')$ имеем вид:

$$V_\ell(p,p') = \frac{g}{2\ell+1}\{\theta(p-p')\frac{p'^{\ell+1}}{p^\ell} + \theta(p'-p)\frac{p^{\ell+1}}{p'^\ell}\}, \mathrm{Re}\,\ell > -\frac{1}{2}, \qquad /8/$$

Тогда нетрудно проверить, что уравнение /5/ с ядром /8/ сводится к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка с соответствующими граничными условиями в нуле и на бесконечности /8/. Задача о связанных состояниях ($k^2 = -\kappa^2 < 0$; $g \to -g$), как известно, сводится к решению однородного интегрального уравнения /5/. Так как граничные условия при этом не меняются, то для нахождения связанных состояний достаточно решить следующую краевую задачу:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \left\{ \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - \frac{\lambda^2}{(x^2+1)^{1/2}\,(x^2+E^2)} \right\} f_\ell(x) = 0, \qquad /9/$$

$$f_\ell(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\ell+1} \;;\quad f_\ell(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{-\ell}, \qquad /10/$$

где введены безразмерные переменные $x = pm^{-1}$, $f_\ell(p) = f_\ell(x)$ и безразмерные параметры $\lambda^2 = gm^{-1}$, $E = \kappa m^{-1}$, причем $0 \le E^2 \le 1$. Рассмотрим задачу на связанные состояния /9/, /10/ подробно для S-волны, хотя используемые нами методы пригодны для исследования высших парциальных волн. Перепишем краевую задачу для S-волны в более удобном виде:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \gamma(x) f(x) = 0; \quad \gamma(x) = \lambda^2 (1+x^2)^{-1/2} (x^2+E^2)^{-1},$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \;;\quad f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \text{const}, \qquad /12/$$

Для того, чтобы найти спектр связанных состояний, применим к уравнению /11/ метод эталонного уравнения /МЭУ/ [8,10,13]. Основная идея МЭУ весьма проста. Уравнение

$$\frac{d^2 \mho(\sigma)}{d\sigma^2} + \Gamma(\sigma)\mho(\sigma) = 0. \qquad /13/$$

называют эталонным по отношению к уравнению /11/, если: 1/ решения $\mho(\sigma)$ известны аналитически или численно; 2/ $\Gamma(\sigma)$ зависит от σ приблизительно так же, как

$\gamma(x)$ зависит от x. Решение /11/ будем искать в виде:

$$f(x) = \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{-1/2} \mho(\sigma(x)). \qquad /14/$$

Подставляя /14/ в /11/ и используя /13/, получаем уравнение для $\sigma(x)$:

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{1/2} \Gamma(\sigma) = \gamma(x) + \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^{-1/2}. \qquad /15/$$

Это точное основное уравнение МЭУ, в котором второй член правой части во многих случаях, представляющих значительный интерес для приложений, можно рассматривать как малую поправку, и на этой основе удается построить приближенный метод решения уравнения /15/. Если поведение $\Gamma(\sigma)$ достаточно мало отличается от поведения $\gamma(x)$, то $\sigma'(x)$ – медленно меняющаяся функция и поправочным членом в первом приближении можно пренебречь. Тогда из уравнения /15/ следует, что

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \Gamma^{1/2}(\tau)\,d\tau = \int_{x_0}^{x} \gamma^{1/2}(t)\,dt, \qquad /16/$$

где σ_0 и x_0 – "эквивалентные точки" функций $\Gamma(\sigma)$ и $\gamma(x)$, например, точки, где обе эти функции имеют сингулярность или равны нулю. Решив уравнение /16/ относительно $\sigma(x)$, можно получить решение исходного уравнения /11/ по формуле /14/, которая принимает вид:

$$f(x) = \left[\frac{\Gamma(\sigma(x))}{\gamma(x)}\right]^{1/4} \mho(\sigma(x)). \qquad /17/$$

В связи с формулами /14/ и /17/ отметим, что при условии близости поведения $\Gamma(\sigma)$ и $\gamma(x)$ /т.е. при одинаковом числе и характере особых точек и точек поворота уравнений /11/ и /13/ в рассматриваемых областях изменения x и $\sigma(x)$ / можно добиться, чтобы $\sigma'(x)$ была везде конечной ($\sigma'(x) \neq 0, \infty$). Поэтому явление Стокса не возникает и нет никакой проблемы с формулами связи, возникающей в обычной ВКБ теории /11/.

Основываясь на вышеизложенном, выбираем эталонным уравнением по отношению к уравнению /11/ уравнение вида:

$$\frac{d^2 \mathfrak{C}(\sigma)}{d\sigma^2} + \frac{\lambda^2}{\sigma^3}\mathfrak{C}(\sigma) = 0. \qquad /18/$$

Из дальнейшего изложения будет видно, что асимптотические свойства $\Gamma(\sigma) = \lambda^2 \sigma^{-3}(x)$ и $\gamma(x)$ одинаковы. В качестве "эквивалентных" точек естественно выбрать $\sigma_э = x_э = \infty$. Тогда из уравнения первого приближения /16/ для $\sigma(x)$ при подстановке в него явных выражений $\Gamma(\sigma)$ и $\gamma(x)$ получим:

$$\sigma(x) = 4\Phi^{-2}(x, E); \quad \Phi(x, E) = \int_x^\infty (1+t^2)^{-1/4}(t^2+E^2)^{-1/2}dt. \qquad /19/$$

Отсюда нетрудно найти поведение $\sigma(x)$ при больших x:

$$\sigma(x) \underset{x\to\infty}{\simeq} x + \frac{(1+2E^2)}{10}\frac{1}{x} + O(x^{-3}). \qquad /20/$$

Таким образом, поведение $\Gamma(\sigma(x))$ при $x \to \infty$ совпадает с поведением $\gamma(x)$ при $x \to \infty$. Используя эту асимптотику, а также граничное условие /12/, общее решение краевой задачи /11/, /12/, в первом приближении, получим в следующем виде:

$$f(x) = [\sigma^3(x)\,\gamma(x)]^{-1/2}\,\sigma^{1/2}(x) J_1\left(2\lambda\sigma^{-1/2}(x)\right). \qquad /21/$$

Сравним поведение решения /21/ в особых точках уравнения /11/ с поведением точного решения. Легко показать, что при $x \to \infty$ точное и приближенное /21/ решения ведут себя одинаково: $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \mathrm{const} \neq 0$. При $E=0$ возникает регулярная особая точка $x=0$. В этом случае для того, чтобы обеспечить правильное поведение /21/ в особой точке $x=0$ при $E=0$ необходимо в решении /21/

сделать замену $\lambda \to \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}$ /8/ - аналог известной замены Крамерса, которая делается при решении радиального уравнения Шредингера ВКБ методом /1/. Для получения спектральиого условия краевой задачи /11/, /12/ необходимо воспользоваться граничным условием в нуле /12/. Из /19/ следует, что $\sigma(0) = 4F^{-2}(E)$, где

$$F(E) = \int_0^\infty (1+t^2)^{-1/4}(t^2+E^2)^{-1/2}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right){}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4};1-E^2\right). \qquad /22/$$

Используя /21/, граничное условие в нуле /12/ и учитывая также /22/, получаем дискретный спектр краевой задачи /11/, /12/ в виде:

$$\sqrt{\lambda_n^2 - \frac{1}{4}} = \frac{2\kappa_n}{B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right){}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4};\frac{3}{4};1-E^2\right)}, \quad n = 1,2,3,\ldots \qquad /23/$$

где κ_n - нули фуикции $J_1(x)$, ${}_2F_1(a,b;c;x)$ - гипергеометрическая функция. При $E \to 0$ /слабосвязанные состояния/ гипергеометрический ряд расходится и поэтому необходимо воспользоваться его аналитическим продолжением. Тогда, оставляя лишь главный член в этом разложении, получим, что в пределе $E \to 0$ собственные значения краевой задачи /11/, /12/ ведут себя следующим образом:

$$E_n(\lambda) = \exp\left\{-\frac{\kappa_n}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}} + \psi(1) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{4}\right)\right\}. \qquad /24/$$

Отсюда следует наличие точки сгущения энергетических уровней в пределе $E \to 0$, что полностью аналогично сгущению уровней энергетического спектра уравнения Шредингера с потенциалом $V(r) = -g^2 r^{-2}$ /12/. Однако, в отличие от последнего, в нашем случае не возникает проблемы "падения на центр", что определяет существенное преимущество последовательного релятивистского рассмотрения задачи о связанных состояниях в рамках квазипотенциального подхода. В заключение отметим, что /23/ является асимптотической формулой, т.е.

соответствует лишь первому члену асимптотического разложения для спектра, которое может быть получено, если решение $\sigma(x, E)$ основного уравнения МЭУ /15/ искать в виде ряда по степеням λ^{-1} /13/.

Метод эталонного уравнения позволяет весьма эффективно строить на основе хорошо изученных решений эталонных уравнений достаточно точные приближения для спектра и собственных функций краевых задач, точные решения которых не удается найти среди известных специальных функций математической физики. Кроме рассмотренной выше задачи, этот метод с успехом применим к решению уравнения для релятивистской волновой функции π-мезона /4/ в составной модели /9/, равно как и для решения многих других линейных дифференциальных краевых задач второго и более высокого порядков, часто возникающих в теоретической физике.

Литература

1. *A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cimento, 29, 380 /1963/.*
2. *Р.Н.Фаустов. ЭЧАЯ, 3, 238 /1972/.*
3. *В.А.Ризов, И.Т.Тодоров. ЭЧАЯ, 6, 669 /1975/.*
4. *В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, М.Фриман. ЯФ, 9, 646 /1969/.*
5. *В.Ш.Гогохия, А.Т.Филиппов. ТМФ, 21, 37 /1974/.*
6. *B.A.Arbuzov, A.T.Filippov. Phys. Lett., 13, 95 /1964/.*
7. *Д.П.Мавло, И.В.Пузынин, А.Т.Филиппов. Препринт ОИЯИ, Р2-8689, Дубна, 1975.*
8. *В.Ш.Гогохия, Д.П.Мавло, А.Т.Филиппов. ТМФ, 27, 323 /1976/.*
9. *A.T.Filippov. Preprint JINR, E2-7563, Dubna, 1973; Preprint JINR, E2-7929, Dubna, 1974; Phys. Lett., 51B, 379 /1974/.*
10. *Т.М.Черри. Математика, 9, №4 /1965/.*
11. *Дж.Хединг. Введение в метод фазовых интегралов /метод ВКБ/, М., Мир, 1965.*
12. *K.M.Case. Phys. Rev., 80, 797 /1950/.*
13. *R.Langer. Trans. Am. Math. Soc., 67, 461 /1949/; Enseignment Math. [2], 8, 218 /1962/.*

Рукопись поступила в издательский отдел
21 июня 1976 года.