ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 9888

Е.Н.Румянцева

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СФЕРИЧЕСКОГО МИРА ФРИДМАНА

1976

Р2 - 9888

Е.Н.Румянцева

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СФЕРИЧЕСКОГО МИРА ФРИДМАНА

Направлено в сб. "Проблемы теории гравитации
и элементарных частиц"

Здесь построена статистическая модель сферического мира Фридмана, геометрические свойства которого определяются газом безмассовых скалярных частиц. Для решения этой задачи используются бисферические координаты на сфере S_3. Хотя эта задача уже была решена в однородных координатах на сфере S_3 /1/, представляет особый интерес ее решение именно в бисферических координатах, поскольку бисферические координаты позволили решить аналогичную задачу для нейтринного и фотонного газов /2,3/.

Основой работы послужила квантовая теория безмассового скалярного поля в мире де Ситтера, построенная в работе /4/, и доказанная в /5/ конформная инвариантность этой теории. Необходимые для решения задачи общие принципы квантовой статистики использовались нами без изменений /6/.

Полевой оператор ϕ безмассовых скалярных частиц в мире с метрикой $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ подчиняется уравнению /4/

$$\Box \phi + \frac{R}{6} \phi = 0. \qquad /1/$$

Тензор энергии-импульса имеет вид /4/

$$T_{\mu\nu} = T^{can}_{\mu\nu} - \frac{1}{6} (R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \Box) \phi^2 , \qquad /2/$$

где

$$T^{can}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\phi_\mu \phi_\nu + \phi_\nu \phi_\mu) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \Box \phi^2 .$$

След $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ и дивергенция $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$ равняется нулю. В мире с метрикой $ds'^2 = B^2 ds^2$ уравнению $\Box' \phi' +$

$+\frac{1}{6}R'\phi'=0$ подчиняется полевой оператор $\phi'=B^{-1}\phi$ [5].

Тензор энергии-импульса $T'_{\mu\nu}$, построенный из $\phi'=B^{-1}\phi$ и $g'_{\mu\nu}=B^2 g_{\mu\nu}$ так же, как построен $T_{\mu\nu}$ из ϕ и $g_{\mu\nu}$, равняется

$$T'_{\mu\nu}=B^{-2}\,T_{\mu\nu}. \qquad /3/$$

Рассмотрим теперь статический сферический мир с метрикой

$$ds^2=r^2\{\,d\tau^2-\sin^2\zeta\,d\xi^2-\cos^2\zeta\,d\eta^2-d\zeta^2\},$$

где τ - время, ζ, ξ, η - бисферические координаты на единичной сфере S_3 в четырехмерном евклидовом пространстве E_4; $r=\mathrm{const}$ - радиус мира.

Сфера S_3 задается уравнениями

$$x_1=\sin\zeta\,\sin\xi, \qquad x_3=\cos\zeta\,\sin\eta,$$
$$x_2=\sin\zeta\,\cos\xi, \qquad x_4=\cos\zeta\,\cos\eta,$$

где x_a - декартовы координаты в E_4.

Сферический мир Фридмана отличается от статического сферического мира лишь конформным множителем $B^2(\tau)$ в метрике

$$ds'^2=B^2(\tau)\,r^2\{d\tau^2-\sin^2\zeta\,d\xi^2-\cos^2\zeta\,d\eta^2-d\zeta^2\}.$$

Решение уравнения /1/ в бисферических координатах есть

$$\phi=\sqrt{hc}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=-p/2}^{p/2}\sum_{n=-p/2}^{p/2}\{C^p_{mn}U^p_{mn}+C^{p+}_{mn}\overset{*}{U}{}^p_{mn}\},$$

где

$$u^p_{mn}=\frac{1}{2\pi r}\,e^{-i(p+1)\theta}\,e^{i(m+n)\xi}\,e^{i(m-n)\eta}\,P^{p/2}_{m,-n}(\cos 2\zeta),$$

$P^{\ell}_{m,n}(\cos 2\zeta)$ - специальные функции [7]; C^p_{mn}, C^{p+}_{mn} - операторы, не зависящие от ξ, η, ζ, τ и подчиняющиеся коммутационным соотношениям [4]

$$[C^p_{mn},C^q_{ab}]=0, \quad [C^{p+}_{mn},C^{q+}_{ab}]=0,$$
$$[C^p_{mn},C^{q+}_{ab}]=\delta_{ma}\delta_{nb}\delta_{pq}. \qquad /4/$$

Операторы C^{p+}_{mn}, C^q_{ab} являются соответственно операторами рождения и уничтожения частиц.

Оператор числа частиц N имеет вид

$$N=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=-p/2}^{p/2}\sum_{n=-p/2}^{p/2}C^{p+}_{mn}C^p_{mn}. \qquad /5/$$

Гамильтониан рассматриваемой системы частиц имеет вид

$$H=\frac{hc}{r}\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)\sum_{m=-p/2}^{p/2}\sum_{n=-p/2}^{p/2}C^{p+}_{mn}C^p_{mn}. \qquad /6/$$

Операторы N и H не зависят от конформного множителя B.

Таким образом, зная коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения частиц и вид гамильтониана, мы тем самым получили возможность решать основную задачу статистической физики - определение наблюдаемых - средних по ансамблю частиц.

Мы хотим удовлетворить уравнениям Эйнштейна в мире Фридмана:

$$R'_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}R'\,g'_{\alpha\beta}=-\frac{8\pi\gamma}{c^4}\langle :T'_{\alpha\beta}:\rangle, \qquad /7/$$

где двоеточие означает, как обычно, нормальное произведение операторов. Знаком $\langle\ \rangle$ обозначаются статистические средние по большому каноническому ансамблю. Для любого оператора A

$$<A> = \frac{Sp\, A \exp\{-\frac{H-\mu N}{\theta}\}}{Sp \exp\{-\frac{H-\mu N}{\theta}\}},$$

где H и N - операторы /5/ и /6/, μ - химический потенциал, θ - глобальная температура газа[/8/].

Тензор энергии-импульса газа, стоящий в правой части уравнений /7/, есть среднее от тензора энергии-импульса поля /2/.

Поскольку след $T'_{\alpha\beta}$ равняется нулю, то в силу уравнений Эйнштейна и скаляр R' должен равняться нулю. Способ нахождения такой метрики дан в работе[/2/]. Искомой метрикой будет метрика $ds'^2 = B^2 ds^2$, где ds^2 - произвольная метрика, а B есть решение уравнения $\Box B + \frac{R}{6} B = 0$. Интересно отметить, что уравнение для B совпадает с уравнением скалярного поля /1/. Без ограничения общности положим $B = \cos r$. Итак, сферический мир Фридмана определен с точностью до константы

$$ds'^2 = r^2 \cos^2 r \{ dr^2 - \sin^2\zeta\, d\xi^2 - \cos^2\zeta\, d\eta^2 - d\zeta^2 \}.$$

Для этой метрики

$$R'_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta,$$

$$R'_{00} = -\frac{3}{\cos r}, \quad R'_{11} = \frac{\sin^2\zeta}{3} R'_{00}, \; R'_{22} = \frac{\cos^2\zeta}{3} R'_{00},$$

$$R'_{33} = \frac{1}{3} R'_{00}.$$

Согласно же /3/

$$<:T'_{\alpha\beta}:> = \frac{1}{\cos^2 r} <:T_{\alpha\beta}:>.$$

Таким образом, уравнения Эйнштейна накладывают на тензор энергии-импульса следующие условия:

$$<:T_{\alpha\beta}:> = 0 \quad \text{при} \; \alpha \neq \beta,$$

$$<:T_{11}:> = \frac{c^4}{8\pi\gamma} \sin^2\zeta,$$

$$<:T_{22}:> = \frac{c^4}{8\pi\gamma} \cos^2\zeta,$$

$$<:T_{33}:> = \frac{1}{3} <:T_{00}:> = \frac{c^4}{8\pi\gamma}. \qquad /8/$$

Наоборот, при этих условиях уравнения Эйнштейна удовлетворяются.

Докажем, что

$$<:T_{\alpha\beta}:> = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta,$$

$$<:T_{11}:> = \sin^2\zeta <:T_{00}:> \frac{1}{3},$$

$$<:T_{22}:> = \cos^2\zeta <:T_{00}:> \frac{1}{3},$$

$$<:T_{33}:> = <:T_{00}:> \frac{1}{3}. \qquad /9/$$

Из коммутационных соотношений /4/ и вида гамильтониана /6/ получаем

$$< C^p_{ab} C^q_{mn} > = < C^{p+}_{ab} C^{q+}_{mn} > = 0,$$

$$< C^{p+}_{ab} C^q_{mn} > = \delta_{pq} \delta_{am} \delta_{bn} \Lambda_{p+1},$$

где

$$\Lambda_{p+1} = \frac{1}{\exp\{\frac{hc}{r\theta}(p+1) - \frac{\mu}{\theta}\} - 1}.$$

Число частиц N и энергия газа E , являющиеся средними от операторов /5/ и /6/, есть

$$N = \langle N \rangle = \sum_{q=1}^{\infty} q^2 \Lambda_q ,$$

$$E = \langle \underset{\sim}{H} \rangle = \frac{hc}{r} \sum_{q=1}^{\infty} q^3 \Lambda_q . \qquad /10/$$

Рассмотрим функцию

$$G(M;N) = \langle : \phi(M)\, \phi(N) : \rangle,$$

где M ,N - мировые точки с координатами $r^1, \xi^1, \eta^1, \zeta^1$ и $r^2, \xi^2, \eta^2, \zeta^2$. Средние такого типа весьма характерны для задач статистической физики [9] . G (M;N) подсчитываются с помощью соотношений для функций $P^{\ell}_{m,n}(\cos 2\zeta)$ [7] :

$$G(M;N) = \frac{hc}{2\pi^2 r^2} \sum_{q=1}^{\infty} \Lambda_q \frac{\sin q\gamma}{\sin\gamma} \cos q\,(r_1 - r_2),$$

где

$$\cos\gamma = \sin\zeta_1 \sin\zeta_2 \cos(\xi_1 - \xi_2) + \cos\zeta_1 \cos\zeta_2 \cos(\eta_1 - \eta_2).$$

Располагая этим результатом, уже нетрудно найти $\langle : T_{\alpha\beta} : \rangle$ путем, аналогичным использованному в работе [1].

В результате получим $\langle : T_{\alpha\beta} : \rangle = 0, \quad \alpha \neq \beta$,

$$\langle : T_{00} : \rangle = \frac{hc}{2\pi^2 r^2} \sum_{q=1}^{\infty} q^3 \Lambda_q ,$$

$$\langle : T_{11} : \rangle = \sin^2\zeta \frac{hc}{6\pi^2 r^2} \sum_{q=1}^{\infty} q^3 \Lambda_q ,$$

$$\langle : T_{22} : \rangle = \cos^2\zeta \frac{hc}{6\pi^2 r^2} \sum_{q=1}^{\infty} q^3 \Lambda_q ,$$

$$\langle : T_{33} : \rangle = \frac{hc}{6\pi^2 r^2} \sum_{q=1}^{\infty} q^3 \Lambda_q .$$

Таким образом, соотношения /9/ доказаны. Так как $H = r \int : T_{00} : d\Omega$, где $d\Omega = \sin\zeta \cos\zeta\, d\xi d\eta d\zeta$ - элемент площади на S_3 и $\int d\Omega = 2\pi^2$, то в силу условий /8/ должно выполняться равенство

$$\langle H \rangle = \frac{3\pi c^4}{4\gamma} r .$$

Из формулы /10/ и этого условия получаем

$$r^2 = \frac{4\gamma h}{3\pi c^3} \sum_{q=1}^{\infty} q^3 \Lambda_q .$$

Это единственное условие, которое уравнения Эйнштейна накладывают на радиус мира r .

В заключение автор выражает благодарность профессору Н.Н.Боголюбову /мл./ за интерес к работе и полезные замечания.

Литература

1. *Е.Н.Черникова. В сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц", вып. 6, М., Атомиздат, 1975.*
2. *Е.Н.Румянцева. Препринт ОИЯИ, Р2-9169, Дубна, 1975.*
3. *Е.Н.Румянцева. Препринт ОИЯИ, Р2-9300, Дубна, 1975.*
4. **N.A.Chernikov, E.A.Tagirov. Ann.Inst. Henri Poincare; vol.IX, No 2, Section A, 109–141, 1968.**
5. *Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. В сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц", вып. 5, М., Атомиздат, 1974.*

6. *Н.Н.Боголюбов. Лекции по квантовой статистике. Избранные труды, т. 2, Киев, 1970.*
7. *Н.Я.Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. М., Наука, 1965.*
8. *N.A.Chernikov. Acta Physica Polonica, vol.XXVI (1964).*
9. *Н.Н.Боголюбов /мл./. Метод исследования модельных гамильтонианов. М., Наука, 1974.*

Рукопись поступила в издательский отдел
18 июня 1976 года.