СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 9813

Н.В.Красников, Г.Мотц, К.Г.Четыркин

О ЧИСЛЕ ВЫЧИТАНИЙ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДАЙСОНА-ЙОСТА-ЛЕМАНА ДЛЯ ХРОНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ЛОКАЛЬНЫХ ТОКОВ

1976

P2 - 9813

Н.В.Красников, Г.Мотц, К.Г.Четыркин

О ЧИСЛЕ ВЫЧИТАНИЙ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДАЙСОНА-ЙОСТА-ЛЕМАНА ДЛЯ ХРОНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ЛОКАЛЬНЫХ ТОКОВ

В работе [1] В.А.Матвеева, Д.Робашика и Э.Вицорека был поставлен интересный вопрос о зависимости числа вычитаний в представлении Дайсона-Йоста-Лемана /ДЙЛ/ для среднего по одночастичному состоянию Т-произведения локальных токов от поведения формфакторов в глубоконеупругой области. Как известно, наблюдаемое на эксперименте автомодельное поведение структурных функций глубоконеупругого $e-p$ -рассеяния V_1, V_2 может быть описано спектральными функциями, имеющими квазипредел $a<0$. Все до сих пор рассмотренные спектральные функции с квазипределом $a<0$ допускают представление Дайсона-Йоста-Лемана для Т-произведения без вычитаний. Авторами работы [1] было высказано предположение, что все спектральные функции, имеющие отрицательный квазипредел, не требуют вычитаний при построении Т-произведения.

В настоящей работе выяснен вопрос о числе необходимых вычитаний для спектральных функций, обладающих квазипределом любого порядка, в частности, подтверждена гипотеза, высказанная в [1]. Нам будет удобнее иметь дело не с Т-произведением, а с запаздывающим R-произведением токов. Из равенства

$$T(j(x)j(0)) = \Theta(x^0)[j(x), j(0)] + j(0)j(x)$$

вытекает, что в отношении числа вычитаний Т и R -произведения эквивалентны.

Итак, пусть для некоторой функции $V(q)$ справедливо представление Дайсона-Йоста-Лемана:

$$V(q) = \int \epsilon(q_0)\,\delta(q_0^2 - (\vec{q}-\vec{u})^2 - \lambda^2)\,\Psi(\vec{u},\lambda^2)\,d\vec{u}\,d\lambda^2 \qquad /1/$$

$$\operatorname{supp}\Psi = [(\vec{u},\lambda^2):\ |\vec{u}| \le 1,\ \ \lambda^2 \ge (1-\sqrt{1-\vec{u}^{\,2}})^2]$$

и пусть $\Psi(\vec{u},\lambda^2)$ имеет по переменной λ^2 квазипредел порядка α, т.е. существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Psi(\vec{u},k\lambda^2)}{k^\alpha} = \Psi_0(\vec{u},\lambda^2) \neq 0. \qquad /2/$$

Нам необходимо определить произведение

$$\frac{1}{2\pi}\tilde{R}(x) = \Theta(x^\circ)\tilde{V}(x), \qquad \tilde{V}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-iqx}\, V(q)\,dq .$$

Действуя формально, получаем

$$R(q) = \lim_{\epsilon\to 0} \int \frac{\Psi(\vec{u},\lambda^2)\,d\vec{u}\,d\lambda^2}{(q^\circ - i\epsilon)^2 - (\vec{q}-\vec{u})^2 - \lambda^2} . \qquad /3/$$

Интеграл в выражении /3/ нужно понимать в слабом смысле, т.е. для любой основной функции $\phi(q)\in S(R_4)$, (ϕ, R) определяется как значение функционала $\Psi(\vec{u},\lambda^2)$ на функции

$$\bar{\phi}(\vec{u},\lambda^2) = \lim_{\epsilon\to 0} \int \frac{\phi(q)\,dq}{(q^\circ - i\epsilon)^2 - (\vec{q}-\vec{u})^2 - \lambda^2} . \qquad /4/$$

Корень трудностей в определении произведения $\Theta(x^\circ)\tilde{V}(x)$ лежит в том, что функция $\bar{\phi}(\vec{u},\lambda^2)$ в общем случае не принадлежит $S(R_4)$ - области определения обобщенной функции $\Psi(\vec{u},\lambda^2)$. Покажем, что если $\alpha<0$, то область определения функционала $\Psi(\vec{u},\lambda^2)$ может быть естественным образом расширена на класс функций, включающий в себя функции вида /4/.

В приложении доказаны следующие две важные леммы:

1. Если функция $\Psi(\vec{u},\lambda^2)$ имеет по переменной λ^2 квазипредел порядка α, то Ψ допускает представление вида

$$\Psi(\vec{u},\lambda^2) = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\right)^n [\Psi^{-n}(\vec{u},\lambda^2)] \qquad /5/$$

$$n = 0,1,\ldots, \qquad n+\alpha > 0,$$

где $\Psi^{-n}(\vec{u},\lambda^2)$ есть непрерывная по λ^2 функция, имеющая на асимптотику $(\lambda^2)^{n+\alpha}$, т.е. существует предел

$$\lim_{\lambda^2\to\infty} \frac{\Psi^{-n}(\vec{u},\lambda^2)}{(\lambda^2)^{n+\alpha}} \neq 0.$$

2. Функция $\bar{\phi}(\vec{u},\lambda^2)$ бесконечно дифференцируема по всем переменным, и ее k-ая производная по λ^2 имеет асимптотику $(\lambda^2)^{-(k+1)}$ при $\lambda^2\to\infty$.

Пусть $g(\vec{u})\in S(R_3)$.

Т.к. последовательность

$$\Phi_k(\vec{u}) = \frac{\Psi^{-n}(\vec{u},k)}{(1+k)^{n+\alpha}}$$

сходится в пространстве $S^*(R_3)$, то из совершенности пространства $S(R_3)$ /3/ вытекает, что существует такое число $\sigma = 1,2,3,\ldots$, что

$$|(g,\Phi_k)| \le C\cdot P_\sigma\{g\} \qquad /6/$$

$$P_\sigma\{g\} \equiv \max_{\substack{\sum_i \beta_i \le \sigma \\ \beta_i \ge 0}} \ \sup_{|\vec{u}|\le 2} \left| \frac{\partial}{\partial u_1^{\beta_1}} \frac{\partial}{\partial u_2^{\beta_2}} \frac{\partial}{\partial u_3^{\beta_3}} g(\vec{u}) \right|,$$

где β_i - целые числа, а C - постоянная, общая для всех функций g и чисел k.

Для любой $J(\vec{u},\lambda^2)\in S(R_4)$

справедливо равенство

$$\int J(\vec{u},\lambda^2)\Psi(\vec{u},\lambda^2)\,d\vec{u}\,d\lambda^2 = (-1)^n \int\left[\int J^n(\vec{u},\lambda^2)\ \Psi^{-n}(\vec{u},\lambda^2)\,d\vec{u}\right]d\lambda^2 \qquad /7/$$

$$J^n(\vec{u},\lambda^2) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\right)^n J(\vec{u},\lambda^2),$$

где интеграл по λ^2 в правой части понимается в обычном смысле. Используя неравенство /6/, можно оценить интеграл по λ^2 в /7/

$$|(J,\Psi)| \le C \int_0^{\infty} P_\sigma\{J^n\}(\lambda^2)(1+\lambda^2)^{n+\alpha}\, d\lambda^2,$$

где $P_\sigma\{J\}(\lambda^2)$ означает норму P_σ функции $J(\vec{u},\lambda^2)$, рассматриваемой как функция от $\vec{u}$ при фиксированном λ^2. Выберем положительное число δ, удовлетворяющее неравенствам:

$$1 > \delta > 1+\alpha .$$

Легко убедиться, что при таком выборе числа δ справедлива оценка

$$\int_0^{\infty} P_\sigma\{J^n\}(\lambda^2)(1+\lambda^2)^{n+\alpha}\, d\lambda^2 \le P_n(J) \int_0^{\infty} \frac{d\lambda^2}{(1+\lambda^2)^{\delta-\alpha}} \qquad /9/$$

$$P_u(J) = \max_{0\le k\le n} \sup_{\lambda^2\ge 0} |(1+\lambda^2)^{k+\delta} P_\sigma\{J^k\}(\lambda^2)| . \qquad /10/$$

Из неравенства /9/ вытекает, что обобщенная функция $\Psi(\vec{u},\lambda^2)$ непрерывна по норме /10/. Отсюда следует, что Ψ может быть однозначно расширена на пополнение пространства $S(R_4)$ по полунорме /10/. Из леммы 2 видно, что функция вида /4/ принадлежит этому пополнению, а следовательно, функционал $\Psi(\vec{u},\lambda^2)$ однозначно определен на этом классе функций. Таким образом, при $\alpha<0$ вычитаний делать не нужно.

Совершенно аналогично можно показать, что если $\alpha>0$, то минимально необходимое число вычитаний равняется

$$[\alpha]+1,$$

где символом $[\alpha]$ обозначено наибольшее целое число не превосходящее α.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Б.И.Завьялова за помощь в доказательстве леммы 1 и Э.Вицорека, В.А.Матвеева, Д.Робашика и А.Н.Тавхелидзе за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим обобщенную функцию $\Psi(\vec{u},\lambda^2) \in S^*(R_4)$ такую, что существует слабый предел $\mathrm{supp}\,\Psi = [(u,\lambda^2) : \lambda^2 \ge 0]$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\Psi(\vec{u},k\lambda^2)}{k^\alpha} \equiv \Phi_k(\vec{u},\lambda^2)\right) = \Phi_\infty .$$

Вследствие совпадения в пространствах типа S^* слабой и сильной сходимости[3] существует такое положительное целое n, что последовательность $(g\cdot y_n, \Phi_k)$,

$$g(\vec{u}) \in S(R_3), \quad y_n(\lambda^2) = \frac{\Theta(1-\lambda^2)}{(n-1)!}(1-\lambda^2)^{n-1},$$

сходится при $k\to\infty$ к $(g\cdot y_n, \Phi_\infty)$. Но, с другой стороны,

$$(g\cdot y_n, \Phi_k) \equiv \frac{1}{k^{n+\alpha}} \int \Psi^{-n}(\vec{u},k)\, g(\vec{u})\, d\vec{u},$$

где $\Psi^{-n}(\vec{u},\lambda^2)$ есть n-первообразная по λ^2 функции $\Psi(\vec{u},\lambda^2)$. Замечание, что при достаточно большом n функция Ψ^{-n} непрерывна по λ^2 и завершает доказательство *леммы 1*.

Для доказательства *леммы 2* выберем бесконечно дифференцируемую функцию $C(x^0)$ со свойствами: $C(x^0)=0$ при $x^0 \ge 2$ и $C(x^0)=1$ при $x^0 \le 1$. Представим функцию $\tilde{\phi}(x) \in S(R_4)$ в виде

$$\tilde{\phi}(x) \equiv \tilde{\phi}_1(x) + \tilde{\phi}_2(x), \qquad \tilde{\phi}_1(x) = C(x^0)\tilde{\phi}(x).$$

Из тождества

$$\Theta(x^0)\tilde{\phi}_2(x) \equiv \tilde{\phi}_2(x)$$

следует равенство

$$\tilde{\phi}_2(\vec{u},\lambda^2) = \frac{2\pi}{i} \int \phi_2(q)\,\epsilon(q_0)\,\delta(q_0^2 - (\vec{q}-\vec{u})^2 - \lambda^2)\, dq$$

и, стало быть, лемму 2 необходимо доказывать только для функции $\bar{\phi}_1(\vec{u}, \lambda^2)$. Представляя $\Theta(x^0)\tilde{\phi}_1(x)$ в виде

$$\Theta(x^0)\tilde{\phi}_1(x) = \Theta(x^0) e^{-ax^0} \{\tilde{\phi}_3(x)\}, \quad a > 0$$

получим

$$\bar{\phi}_1(\vec{u}, \lambda^2) = \int \frac{\phi_3(q)\, dq}{(q_0 - i a)^2 - (\vec{q} - \vec{u})^2 - \lambda^2}.$$

Из последнего равенства лемма 2 вытекает непосредственно, т.к. a - фиксированное положительное число.

ЛИТЕРАТУРА

1. *V.A.Matveev, D.Robaschik, E.Wieczorek. JINR, E2-7051, Dubna, 1973.*
2. *Б.И.Завьялов. ТМФ, 17, 178 /1973/.*
3. *В.С.Владимиров. Методы теории функций многих комплексных переменных. Наука, М., 1964.*

Рукопись поступила в издательский отдел 21 мая 1976 года.