СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-98-4

Х.М.Бештоев, В.Х.Шогенов*

К ВЕРОЯТНОСТНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА—ФОКА—ГОРДОНА (КФГ)

*НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г.Нальчик

1998

1. Введение

В учебной литературе по релятивистской квантовой механике утверждается, что одночастичное волновое уравнения КФГ не позволяет вводить положительно- определенную величину плотности вероятности– плотности числа частиц (см., например, [1-7] и др.). Действительно, плотность вероятности ρ

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - (\frac{\partial \psi^*}{\partial t})\psi], \tag{1}$$

получаемая из уравнения КФГ

$$(E^2 - cp^2 - m^2c^4)\psi(x) = 0 \tag{2}$$

для свободной частицы (где $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$),не является положительно-определенной величиной.

Обычно ρ интерпретируется как плотность заряда (строго говоря заряд еще не введен, т.к. рассматриваются невзаимодействующие частицы), а j

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im}[\psi^*\vec{\nabla}\psi - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi] \tag{3}$$

как плотность потока заряда; $\vec{j}$ и ρ подчиняются уравнению непрерывности

$$div\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Но, видимо, более адекватным является определение этих величин: ρ как плотности числа частиц, а j как плотность потока частиц. Но, такая интерпретация, как уже отмечалось выше, не выдерживает критики, т.к. ρ не является положительно-определенной величиной.

На этом основании считается, что уравнение КФГ играет основную роль только в квантовой теории поля. Однако, видимо, это уравнение позволяет ввести понятие плотности вероятности, аналогичное уравнению Шредингера. Тем самым снимается возражение против обычного истолкования волновой функции уравнения КФГ. Эта работа посвящена обоснованию этого утверждения.

Если ρ в (1) определять как плотность вероятности, то средняя величина от $F(x)$, по обычной схеме квантовой механики, есть

$$< F(x) >= \int \psi^*(x)F(x)\psi(x)dV. \tag{5}$$

В принципе, можно предложить и другие варианты конструкции для плотности вероятности, отличные от (1), тогда средние величины будут определяться выражениями типа (5), где ρ заменяются на соответствующие ρ'. А тогда нормированная вероятность есть

$$\rho''(x) = \frac{\rho'(x)}{\int \rho'(x)dV}. \tag{6}$$

В качестве наиболее адекватной схемы (в полной аналогии с нерелятивистской квантовой механикой) мы предлагаем выбрать плотность вероятности ρ в виде

$$\rho(x) = \psi^*(x)\psi(x), \tag{7}$$

тогда ρ будет положительно-определенной величиной. А нормированное выражение для ρ есть

$$\rho'(x) = \frac{\psi^*(x)\psi(x)}{\int \psi^*(x)\psi(x)dV}. \tag{8}$$

Очевидно, средние величины в этом случае не будут отличаться от средних значений, получаемых из усреднения по ρ из (1), т.к. при замене $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to E$ ρ преобретает вид

$$\rho = \frac{E}{mc^2}\psi^*\psi. \tag{9}$$

Уравнение КФГ представляет интерес и с другой точки зрения. Как известно [10-11], Фейнман развил гидродинамический подход, основанный на уравнении Шредингера, к проблеме сверхпроводимости. Поскольку сверхпроводящие куперовские пары–скалярные частицы, то к ним можно применить уравнение КФГ, если удастся истолковать волновую функцию обычным образом. Тем самым обобщаются результаты [10-11] на релятивистскую область.

2. Уравнение КФГ для свободной частицы

Как хорошо известно, уравнение КФГ для свободной частицы массы m имеет вид

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -c^2\hbar^2\nabla^2\psi + m^2c^4\psi. \tag{10}$$

Мы пользуемся обычной системой единиц и стандартными обозначениями (см., например, [1-2,7]).

Представим волновую функцию $\psi(\vec{r},t)$ аналогично [9-11] в форме

$$\psi = \rho^{1/2}\exp(iS/\hbar), \tag{11}$$

где $\rho = \psi^*\psi$ и S – действительные функции. Здесь ρ положительно-определённая величина, которую можно интерпретировать обычным образом как плотность вероятности.

Подставляя (11) в (10), после несложных вычислений, разделяя действительные и мнимые части, получим два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial S}{\partial t}\right) = c^2\nabla(\rho\nabla S); \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - c^2(\nabla S)^2 - m^2c^4 = \hbar^2\left(\frac{1}{\rho^{1/2}}\frac{\partial^2\rho^{1/2}}{\partial t^2} - c^2\frac{\nabla^2\rho^{1/2}}{\rho^{1/2}}\right). \tag{13}$$

Уравнения (12) и (13) можно записать и в явно ковариантной форме. Имеем

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial^\mu S\partial_\mu S - m^2c^4 & = & \hbar\frac{\partial^\mu\partial_\mu\rho^{1/2}}{\rho^{1/2}} \\ \partial^\mu j_\mu & = & 0 \end{array}\right\}, \tag{14}$$

где $j^\mu = (\rho\frac{\partial S}{\partial t}, \vec{j})(\vec{j} = -c\rho\nabla S)$; $\mu = 0,1,2,3$; по μ идет суммирование, а ∂^μ и ∂_μ имеют обычный смысл [2,8].

3. Интерпретация фазы волновой функции и закон сохранения энергии

3а. Выясним теперь физический смысл (12) и (13). Если в (13) пренебречь квантовыми эффектами, т.е. положить $\hbar = 0$, то (13) переходит в релятивистское уравнение Гамильтона – Якоби [8], где S есть классическое действие. В общем случае смысл S, при вероятностном истолковании ρ, можно установить следующими рассуждениями.

Найдем среднее значение оператора $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla$. Имеем

$$<\hat{\vec{p}}> = -i\hbar \int \psi^* \nabla\psi dV, \qquad (15)$$

где $dV = dxdydz$.

Подставляя (11) в (15), с учетом, что на бесконечности $\rho \to 0$ (по поводу нормировки одночастичных волновых функций см.[2]), легко получаем

$$<\hat{\vec{p}}> = \int \rho\nabla S dV. \qquad (16)$$

Из (16) видно, что если $\nabla S = \vec{p}$ импульс частицы в данной точке, то координаты этой частицы могут быть любые с вероятностью ρ. Это соответствует принципу неопределенности. Тем самым устанавливается смысл ∇S.

Чтобы установить смысл $\frac{\partial S}{\partial t}$, запишем сначала уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \qquad (17)$$

Умножая (17) на ψ^* слева и интегрируя, получим

$$i\hbar\int\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}dV = \int\psi^*\hat{H}\psi dV. \qquad (18)$$

Подставляя (11) в левую часть (18), с учетом нормировки ρ, получим

$$-\int\rho\frac{\partial S}{\partial t}dV = \int\psi^*\hat{H}\psi dV, \quad \text{т.е.} < \frac{\partial S}{\partial t} > = - < \hat{H} > . \qquad (19)$$

Выражение (19) устанавливает смысл $\frac{\partial S}{\partial t}$ в нерелятивистском случае. В релятивистском случае (19) можно обосновать следующим образом.

В классической механике имеем $\frac{\partial S_{кл}}{\partial t} = -H$, перейдем к операторам $S_{кл} \to \hat{S}$ и $H \to \hat{H}$. С учетом (11) составим равенство

$$\int\rho^{1/2}e^{-i\frac{S}{\hbar}}\frac{\partial\hat{S}}{\partial t}\rho^{1/2}e^{i\frac{S}{\hbar}}dV = -\int\psi^*\hat{H}\psi dV.$$

Поскольку $\hat{S}$ функция координат и времени, то $\hat{S} = S$, и приходим к (19). Если ψ имеет много компонент, то (19) можно обосновать

и в этом случае, только (11) записывается для каждой компоненты. Таким образом, выражения (16) и (19) дают смысл ∇S и $\frac{\partial S}{\partial t}$.

Вернемся теперь к уравнению (12). Интегрируя (12) по dV и применяя к правой части теорему Остроградского – Гаусса, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\rho\frac{\partial S}{\partial t}dV = c^2\int_\sigma\rho\nabla S d\vec{\sigma}, \qquad (20)$$

где σ - поверхность, а $d\vec{\sigma}$ - вектор элемента поверхности по нормали. Предполагается, что ρ достаточно быстро стремится к нулю, и, устремляя $\sigma \to \infty$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\rho\frac{\partial S}{\partial t}dV = 0. \qquad (21)$$

С учетом (19) выражение (21) дает закон сохранения энергии. Отсюда видно, что уравнение (20) есть закон сохранения энергии в интегральной форме, а (12) - в дифференциальной.

Эти рассуждения позволяют нам сделать вывод: уравнения КФГ дает закон сохранения энергии, а не плотности вероятности, соответственно, не плотности числа частиц.

Из вышеизложенного видно, что знак ρ никак не связан с уравнением неразрывности,вытекающим из уравнения КФГ.

Подставляя (11) в уравнение неразрывности, получаемое из уравнения КФГ традиционным путем [6-7], легко можно прийти к (12).

Возвращаясь к (12) и (13), видно, что эти уравнения эквивалентны уравнению КФГ.

3б. Дадим еще одну интерпретацию уравнения (12). Представим S в виде

$$S(\vec{r}, t) = S_0(\vec{r}) - Et, \qquad (22)$$

где $E = const$.

Подставляя (22) в (12), получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0, \qquad (23)$$

где $\vec{j} = \frac{c^2}{E}\nabla S_0\rho$, или $\vec{j} = \frac{\hbar c^2}{2iE}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$.

Если $\nabla S_0 = \vec{p}$ импульс частицы (обобщенный импульс), а E - полная энергия, то $\vec{j} = \rho\vec{v}$, где $\vec{v} = c^2\vec{p}/E$. В общем случае E может иметь оба знака $\pm$. Если $E < 0$, то, чтобы (14) имело обычный смысл уравнения сохранения, можно $t \to -t$ в определении скорости $\vec{v}$, т.е. частица движется назад во времени, такое состояние, как известно, интерпретируется как античастица, движущаяся нормально во времени.

Уравнение (23) можно интерпретировать как закон сохранения заряда.

4. Случай нерелятивистского перехода

Рассмотрим теперь нерелятивистский предел (12) и (13). Представим S в виде

$$S = S_0 - mc^2t. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (12) и (13), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho\frac{\nabla S_0}{m}\right) &= \frac{1}{mc^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial S_0}{\partial t}\right); \\ \frac{\partial S_0}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S_0)^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\rho^{1/2}}{\rho^{1/2}} &= \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{2mc^2}\frac{\partial^2\rho^{1/2}/\partial t^2}{\rho^{1/2}} \end{aligned}\right\}. \tag{25}$$

Из (25) видно, что в пределе $c \to \infty$ эти уравнения переходят в соответствующие уравнения, получаемые из уравнения Шредингера для свободной частицы при подстановке (11) [9-11]. В [9-11] величина $Q = -\hbar^2\nabla^2\rho^{1/2}/2m\rho^{1/2}$ названа "квантовым потенциалом" или "квантово-механической энергией".

Возможные истолкование правой части (13) ждут своего решения.

5. Уравнение КФГ в электродинамике

Вышеприведенные рассуждения легко обобщаются для заряженной частицы в электромагнитном поле.

Пусть q - заряд частицы, а $\vec{A}$ и ϕ - векторный и скалярный потенциалы. Тогда, записывая уравнение КФГ для заряда в поле $\vec{A}$ и ϕ и

делая подстановку (11) по схожей схеме, что и выше, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(\frac{\partial S}{\partial t} + q\phi\right)\right\} &= c^2\nabla\left\{\rho\left(\nabla S - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\right\}; \\ \left(\frac{\partial S}{\partial t} + q\phi\right)^2 - c^2\left(\nabla S - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 - m^2c^4 &= \hbar^2\left(\frac{1}{\rho^{1/2}}\frac{\partial\rho^{1/2}}{\partial t^2} - c^2\frac{\nabla^2\rho^{1/2}}{\rho^{1/2}}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{26}$$

Уравнения (26) обобщают подход к исследованию сверхпроводимости, проведенный в [10-11] на релятивистский случай. Более подробный анализ (14) и (26) выходит за рамки данного сообщения.

6. Заключение

Отметим, что уравнения (12) и (13) легко можно получить из лагранжиана $L = \frac{1}{2}\partial^\mu\psi\partial_\mu\psi^* - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi$ при подстановке (11).

Предложен подход в интерпретации волновой функции уравнения КФГ из которого следует, что и для одночастичного уравнения КФГ можно ввести положительно-определенную величину плотности вероятности. Дано релятивистское обобщение подхода Фейнмана к сверхпроводимости.

Литература

[1] А.Н. Матвеев, Атомная физика, М., "Высшая школа", 1989.

[2] С. Швебер, Введение в релятивистскую теорию поля, М., "Иностр. лит.", 1963.
М. Райдер, Квантовая теория поля, М., "Мир", 1987.

[3] Ф. Хелзен, А. Мартин, Кварки и лептоны, М., "Мир", 1987.

[4] В.В. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, Релятивистская квантовая теория, часть 1., М., "Наука", 1968.

[5] А. Рамакришнан, Элементарные частицы и космические лучи, М., "Мир", 1965.

[6] В.Г. Левич, Ю.А. Вдовин, А. Мямлин, Курс теоретической физики, т. 2., М., "Наука", 1969.

[7] А.А. Соколов, И.М.Тернов, Квантовая механика и атомная физика, М., "Просвещение", 1970.

[8] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля. М., "Наука", 1967.

[9] Ж.П. Вижье, Доклады о парадоксе ЭПР. Проблемы физики: классика и современность. М., "Мир", 1982.

[10] Р. Фейнман, Статистическая механика, М., "Мир", 1978.

[11] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэнд, Фейнмановсие лекции по физике. Выпуск 9, М., "Мир", 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 января 1998 года.