СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Н.А.Черников

Р2-98-247

ФИГУРА, ОПИСЫВАЕМАЯ ВЕКТОРОМ СКОРОСТИ ПЛАНЕТЫ, В ЗАДАЧЕ КЕПЛЕРА

1998

Иоганн Кеплер (1571—1630), развивая модель Вселенной, выдвинутую Николаем Коперником (1473—1543), и обрабатывая астрономические наблюдения Тихо Браге (1546—1601), открыл законы движения планет в Солнечной системе.

Модель Коперника, в которой планеты движутся по законам Кеплера, называется моделью Кеплера.

В модели Кеплера рассматривается Солнце, вокруг которого движутся планеты. Солнце и все планеты представляются в виде материальных точек. В отличие от планет, Солнце неподвижно и действует на все планеты. Напротив, планеты не действуют ни на Солнце, ни друг на друга, выступая в модели в виде пробных тел. Модель как бы рассыпается на отдельные детали, в каждой из которых вместе с покоящимся Солнцем остается всего лишь одна из притягиваемых Солнцем планет, выступающих как пробное тело.

Для такой детали Кеплер открыл следующие законы:

1. Секторная скорость планеты относительно Солнца постоянна.

2. Планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

3. Отношение квадрата времени обращения планеты к кубу большой оси эллипса ее движения одинаково для всех планет.

Из законов Кеплера Исаак Ньютон (1643—1727) вывел уравнение

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\alpha r^{-3}\mathbf{r}, \qquad (1)$$

где

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad (2)$$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — зависящий от времени t радиус-вектор планеты, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ — вектор скорости планеты, $r = |\mathbf{r}|$, $\alpha = \gamma M$; в свою очередь M — масса Солнца, γ — постоянная Ньютона, равная

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{см}^3\ \text{с}^{-2}\ \text{г}^{-1}. \qquad (3)$$

На основе (1) Ньютон открыл закон всемирного тяготения.

В данной работе будет доказано, что вектор скорости планеты заметает круг, или что конец вектора скорости планеты описывает окружность. При этом невольно вспоминается древняя теория эпициклов. Но, в отличие от эпициклов Гиппарха и Птолемея, окружность, описывающая движение планеты, находится не в видимом нами мире, а в незримом пространстве скоростей.

Естественно, что в механике Ньютона, созданной задолго до открытия геометрии Лобачевского, древняя геометрия Евклида господствует не только в пространстве положений материальной точки (т.е. в видимом мире), но и в пространстве ее скоростей.

Обозначим видимый мир через P, пространство скоростей — через V. Поместим Солнце в начало декартовых координат x, y, z пространства P, а скорость Солнца — в начало декартовых координат v_1, v_2, v_3 пространства V.

Пространство V совместим с пространством P, причем плоскость $v_3 = 0$ совместим с плоскостью xy, плоскость $v_2 = 0$ — с плоскостью zx, а плоскость $v_1 = 0$ — с плоскостью yz. Общее начало координат x, y, z и v_1, v_2, v_3 обозначим через O. Тем самым два евклидовых пространства, P и V, поставим в отношение подобия друг к другу, что отнюдь не сводится к их отождествлению, так как расстояния в P измеряются в см, а расстояния в V измеряются в см $\cdot$ с$^{-1}$.

При этом центр подобия, т.е. точка O, изображает и положение, и скорость Солнца. Радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ начинается в точке O и кончается в точке, изображающей положение планеты в момент времени t. Его конец описывает траекторию планеты. Вектор скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ тоже начинается в точке O, но кончается в точке $A(t)$, изображающей скорость планеты в момент времени t безотносительно к выбору какой-либо системы отсчета.

После этих замечаний перейдем к интегрированию уравнений (1)—(2). Как обычно, сначала докажем, что сохраняется удельный угловой момент

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\,\mathbf{v}]. \tag{4}$$

Из (1) и (2) следует, что вектор $\mathbf{L}$ от времени не зависит. Действительно,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\dot{\mathbf{r}}\,\mathbf{v}] + [\mathbf{r}\,\dot{\mathbf{v}}] = [\mathbf{v}\,\mathbf{v}] - \alpha r^{-3}[\mathbf{r}\,\mathbf{r}] = 0. \tag{5}$$

Следовательно,

$$\mathbf{L} = \text{const}. \tag{6}$$

Модуль вектора $[\mathbf{r}\, d\mathbf{r}]$ равен удвоенной площади треугольника, заметаемого радиусом-вектором $\mathbf{r}$ за время dt. Следовательно, секторная скорость планеты равна $\frac{1}{2}L$, так что первый закон Кеплера является следствием уравнения (1).

Так как ни одна планета не движется по прямой, направленной на Солнце, то $\mathbf{L} \neq 0$. Действительно, производная единичного вектора $\mathbf{n}$, направленного по радиусу-вектору $\mathbf{r}$, в общем случае равная

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{r}}{r} = r^{-2}\left(r\,\mathbf{v} - \frac{dr}{dt}\,\mathbf{r}\right) = r^{-2}\,[\mathbf{L}\,\mathbf{n}], \tag{7}$$

в частном случае, когда $\mathbf{L} = 0$, сама равняется нулю. В этом случае материальная точка не может представлять планету, так как движется по прямой линии, проходящей через Солнце.

Теперь заметим, что скалярное произведение $\mathbf{L}$ на $\mathbf{r}$ по определению (4) равно нулю. Следовательно, планета движется в плоскости, проходящей через Солнце перпендикулярно к удельному угловому моменту (5) планеты.

Направим ось z по угловому моменту $\mathbf{L}$. При таком условии планета движется в плоскости $z = 0$ по часовой стрелке. Действительно, имеем $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = L > 0$, где

$$L = x\,v_2 - y\,v_1. \tag{8}$$

Переходя к полярным координатам по правилу

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \tag{9}$$

получаем

$$L = r\,(v_2\cos\varphi - v_1\sin\varphi) = r^2\frac{d\varphi}{dt}. \tag{10}$$

Так как $L > 0$, то планета движется по часовой стрелке.

Уравнение Ньютона (1) запишем в проекциях на оси x и y

$$\frac{d}{dt}v_1 = -\alpha r^{-2}\cos\varphi, \qquad \frac{d}{dt}v_2 = -\alpha r^{-2}\sin\varphi, \tag{11}$$

где

$$v_1 = \frac{dx}{dt}, \qquad v_2 = \frac{dy}{dt}. \tag{12}$$

Учитывая (10), перейдем в (11) от переменной t к переменной φ по известной формуле

$$L\frac{d}{d\varphi} = r^2\frac{d}{dt}. \tag{13}$$

В результате получим

$$L\frac{d}{d\varphi}v_1 = -\alpha\cos\varphi, \qquad L\frac{d}{d\varphi}v_2 = -\alpha\sin\varphi. \tag{14}$$

Следовательно,

$$v_1 = -\frac{\alpha}{L}\sin\varphi + V_1^{\oplus}, \qquad v_2 = \frac{\alpha}{L}\cos\varphi + V_2^{\oplus}, \tag{15}$$

где $V_1^{\oplus}$ и $V_2^{\oplus}$ — константы интегрирования. Таким образом, конец вектора скорости планеты описывает в пространстве скоростей окружность, лежащую в плоскости $v_3 = 0$. Радиус этой окружности равен

$$V = \frac{\alpha}{L}. \qquad (16)$$

Ее центр $O^{\oplus}$ смещен относительно начала координат O (представляющего скорость Солнца) на вектор $\mathbf{V}^{\oplus}$, компоненты которого равны константам интегрирования $V_1^{\oplus}$ и $V_2^{\oplus}$.

Как видно, следующее скалярное произведение равно нулю:

$$(\mathbf{v} - \mathbf{V}^{\oplus})\, \mathbf{r} = 0. \qquad (17)$$

Это значит, что радиус-вектор $\mathbf{r}$ планеты, компоненты которого равны (9), и скорость $\mathbf{v} - \mathbf{V}^{\oplus}$ планеты относительно инерциальной системы отсчета, движущейся относительно Солнца со скоростью $\mathbf{V}^{\oplus}$, взаимно перпендикулярны. Более точно, вектор $\mathbf{v} - \mathbf{V}^{\oplus}$ повернут на 90° против часовой стрелки относительно вектора $\mathbf{r}$. Вектор $\mathbf{v} - \mathbf{V}^{\oplus}$ начинается в пространстве скоростей в точке $O^{\oplus}$, в которой кончается вектор $\mathbf{V}^{\oplus}$. А кончается вектор $\mathbf{v} - \mathbf{V}^{\oplus}$ в точке A, где кончается вектор $\mathbf{v}$. Модуль вектора $\mathbf{v} - \mathbf{V}^{\oplus}$ равен (16).

Запишем уравнения (15) в другом виде, а именно:

$$V_1^{\oplus} = v_1 + \frac{\alpha}{L}\sin\varphi, \qquad V_2^{\oplus} = v_2 - \frac{\alpha}{L}\cos\varphi. \qquad (18)$$

Возведя равенства (18) в квадрат и сложив квадраты, получим

$$V_1^{\oplus 2} + V_2^{\oplus 2} = v_1^2 + v_2^2 + 2\,\frac{\alpha}{L}\,(v_1 \sin\varphi - v_2\cos\varphi) + \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2.$$

Подставив сюда (10), найдем интеграл энергии E, равный

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\alpha}{r} = E, \qquad (19)$$

где

$$E = \frac{1}{2}\,V^{\oplus 2} - \frac{1}{2}\,V^2, \qquad (20)$$

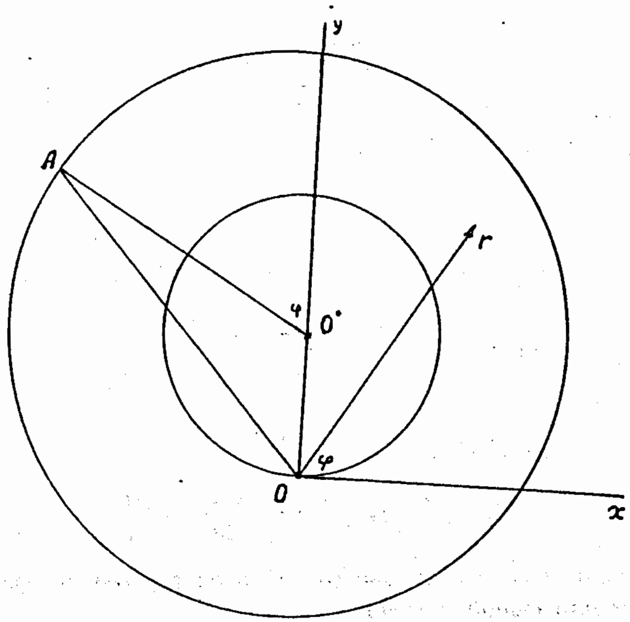
$$v^2 = v_1^2 + v_2^2, \qquad V^{\oplus 2} = V_1^{\oplus 2} + V_2^{\oplus 2}. \qquad (21)$$

Направляя ось по вектору $\mathbf{V}^{\oplus}$ (см. рисунок), полагаем

$$V_1^{\oplus} = 0, \quad V_2^{\oplus} = \varepsilon V, \quad V_3^{\oplus} = 0, \qquad (22)$$

где ε — неотрицательное число, равное отношению

$$\varepsilon = V^{\oplus}/V \qquad (23)$$



модуля $V^{\oplus}$ вектора $\mathbf{V}^{\oplus}$ к радиусу V. В результате приведем уравнения (15) к виду

$$v_1 = -V\sin\varphi, \qquad v_2 = V(\varepsilon + \cos\varphi). \qquad (24)$$

Возведя эти равенства в квадрат и сложив квадраты, получим тригонометрическую формулу для треугольника O A $O^{\oplus}$, а именно:

$$v^2 = V^2(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\varphi), \qquad (25)$$

так как угол при вершине $O^{\oplus}$ равен $\pi - \varphi$.

При этом энергия (20) запишется в виде

$$E = (\varepsilon^2 - 1)\,\frac{1}{2}\,V^2. \qquad (26)$$

Из (19) и (25) (с помощью (16), (26)) без какого-либо добавочного интегрирования получаем уравнение орбиты

$$r\,(1 + \varepsilon\cos\varphi) = \frac{L}{V}. \qquad (27)$$

При $0 < \varepsilon < 1$ это есть уравнение эллипса, один из фокусов которого находится в точке O, с эксцентриситетом ε, равным отношению (23), и параметром p, равным следующему отношению:

$$p = \frac{L}{V} = \alpha V^{-2}. \qquad (28)$$

Таким образом, соблюдается и второй закон Кеплера.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (27) представляет собой уравнение окружности радиуса (28) с центром в точке O.

Конец вектора скорости планеты может быть любой точкой окружности (24). Скорость Солнца O может совпадать с любой точкой внутри окружности (24). В случае кругового движения планеты скорость Солнца совпадает с центром окружности (24).

Большая полуось эллипса (27) равна

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{L}{(1 - \varepsilon^2)\,V}. \qquad (29)$$

Поэтому в силу (16) и (26)

$$E = (\varepsilon^2 - 1)\,\frac{1}{2}\,V^2 = -\frac{L\,V}{2a} = -\frac{\alpha}{2a}. \qquad (30)$$

Таким образом, для планет энергия E отрицательна и равна значению $E = U(2a)$ потенциальной энергии

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad (31)$$

при $r = 2a$. С другой стороны,

$$2\pi\,|E| = S, \qquad (32)$$

где S — площадь в пространстве скоростей кольца, ограниченного концентрическими окружностями с радиусами V и $V^{\oplus}$. Это кольцо изображено на рисунке.

Перейдем к третьему закону Кеплера.

Рассмотрим лежащий на плоскости $x\ y$ сектор, ограниченный лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \text{const}$ и траекторией $\rho = \rho(\varphi)$ планеты. Его площадь согласно (10) равна

$$\Sigma(\varphi) = \int_0^{\varphi} d\mu \int_0^{\rho(\mu)} \xi\, d\xi = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} \rho^2(\mu)\, d\mu = \frac{1}{2}\, Lt. \qquad (33)$$

Удобно считать, что угол φ меняется от $-\pi$ до $+\pi$. При этом условии время t меняется от $-\frac{T}{2}$ до $+\frac{T}{2}$, где T — период обращения планеты вокруг Солнца (ее год). Следовательно,

$$\Sigma(\pi) = \frac{1}{4}\, LT, \qquad (34)$$

где $\Sigma(\pi)$ равняется половине площади эллипса (27), то есть

$$\Sigma(\pi) = \frac{1}{2}\,\pi ab, \qquad (35)$$

где a и b — полуоси эллипса (27). Большая полуось равна (29), а малая полуось равна

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}. \qquad (36)$$

Из (29), (30) и (36) следует

$$T = \frac{2\pi ab}{L} = \frac{2\pi b}{(1 - \varepsilon^2)\,V} = \sqrt{2}\,\pi a\,|E|^{-1/2} = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}}\,|E|^{-3/2}. \qquad (37)$$

Из (30) и (37) следует третий закон Кеплера

$$T^2 = \frac{4\pi}{\alpha}\, a^3. \qquad (38)$$

В заключение заметим, что вектор $\mathbf{V}^{\oplus}$ сохраняется, то есть он является интегралом движения. Это следует из (15). Следовательно, сохраняется и вектор

$$\mathbf{I} = [\mathbf{V}^{\oplus}\,\mathbf{L}] = [\mathbf{v}\,\mathbf{L}] - \frac{\alpha}{r}\,\mathbf{r}, \qquad (39)$$

известный в литературе как вектор Рунге — Ленца.

Если вектор $\mathbf{L}$ направлен по оси z, а вектор $\mathbf{V}^{\oplus}$ направлен по оси y (здесь это так и сделано), то вектор $\mathbf{I}$ направлен по оси x. Все три вектора $\mathbf{I}$, $\mathbf{V}^{\oplus}$ и $\mathbf{L}$ приложены к точке O.

Вектор (39) направлен по вектору ОП, что начинается в точке O, изображающей Солнце, и кончается в точке П, изображающей перигелий планеты. Модуль вектора (39) равен $I = \varepsilon\, VL = \varepsilon\alpha$, а модуль вектора ОП равен $|\text{ОП}| = \frac{p}{1 + \varepsilon}$. Поэтому

$$\mathbf{I} = \varepsilon\,(1 + \varepsilon)\,V^2\,\text{ОП}. \qquad (40)$$

Рукопись поступила в издательский отдел
1 сентября 1998 года.

Черников Н.А. Р2-98-247

Фигура, описываемая вектором скорости планеты, в задаче Кеплера

В работе доказано, что вектор скорости планеты описывает окружность в пространстве скоростей материальной точки. Как следствие, отсюда получается, что радиус-вектор планеты описывает эллипс в пространстве положений материальной точки. Такой подход к решению задачи Кеплера оказывается более простым, чем привычный подход через интеграл энергии. Понятно, что он применим к описанию не только движения планеты вокруг Солнца, но и к описанию движения электрона вокруг протона в атоме водорода.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1998

Перевод автора

Chernikov N.A. P2-98-247

A Figure, Drawn by the Velocity Vector of a Planet, in the Kepler Problem

Here it is shown, that the velocity vector of a planet draws a circle in the velocity space of a material point. As a consequence, from here it can be derived that the radius-vector of planet draws an ellipse in the usual space. Such an approach in solving of the Kepler problem turns out to be simpler than the usual integral energy method. It is also applicable to description of electron movement around a proton.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1998