



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

98-181

P2-98-181

e
.

А.И.Голохвастов*

KNO-СКЕЙЛИНГ

Направлено в журнал «Успехи физических наук»

*E-mail: golokhv@lhel7.jinr.dubna

1998

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО МНОЖЕСТВЕННОСТИ

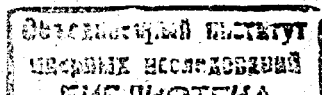
Первые экспериментальные данные, получаемые в 4π -геометрии на новых ускорителях, это обычно распределения по множественности. Распределение по множественности — это вероятность рождения n вторичных частиц определенного сорта в неупругом взаимодействии двух первичных частиц: $P_n = \sigma_n / \sigma_{in}$, где σ_n — сечение рождения n таких частиц, а σ_{in} — сечение неупругого взаимодействия, $\sigma_{in} = \Sigma \sigma_n$.

Обычно изучаются распределения по числу всех заряженных частиц — их проще всего регистрировать. Но при этом возникают проблемы. Во-первых, не кажется очень естественной процедура суммирования числа рожденных мезонов с числом провзаимодействовавших протонов, например в pp -взаимодействиях. Тем более, в ядро-ядерных реакциях, где даже не все эти протоны неупруго провзаимодействовали. Во-вторых, закон сохранения заряда приводит к тривиальной неоднородности (осцилляциям) в этом распределении, например в e^+e^- -взаимодействиях, где все нечетные вероятности отсутствуют. Более того, в ограниченном фазовом объеме, например в неполном быстротном интервале, они появляются и даже становятся близки к четным вероятностям при сильном ограничении фазового объема.

Чтобы не решать эти проблемы, рассмотрим распределения по множественности отрицательных адронов (практически π^- -мезонов, с небольшой добавкой K^- -мезонов) в e^+e^- -аннигиляции [1-13], а также в неупругих pp - [14-37] и ядро-ядерных [38-41] взаимодействиях. К счастью, эти распределения для первых двух реакций взаимнооднозначно связаны с распределениями по всем заряженным частицам (в полном фазовом объеме), которые приводятся в экспериментальных работах. В каждом событии из сохранения заряда получается

$$n_{ch} = 2n_{neg} \quad \text{для } e^+e^- \quad \text{и} \quad n_{ch} = 2n_{neg} + 2 \quad \text{для } pp \quad (1)$$

(далее число отрицательных частиц обозначается просто n). А данные по ядро-ядерным взаимодействиям часто приводятся именно для отрицательных частиц — в экспериментах с неподвижной мишенью их легче сосчитать, чем фрагменты мишени. Распределения в π^+p и K^+p очень близки к pp и отдельного рассмотрения не требуют [31, 38].



2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ KNO-СКЕЙЛИНГ

Коба, Нильсен и Олесен, исходя из некоторых физических соображений, сформулировали утверждение о независимости формы распределения по множественности от первичной энергии — KNO-скейлинг [42]. То же, из других соображений, ранее сделал Поляков [43]. В отличие от самого утверждения, его теоретические основания экспериментом не подтвердились, и KNO-скейлинг остался эмпирическим фактом.

Рис. 1 иллюстрирует смысл этого утверждения, которое было сформулировано для очень больших энергий, т.е. очень больших множественностей, когда распределения по множественности выглядят как непрерывные функции. На рис. 1а изображен возможный вид этих функций для разных первичных энергий. Площадь под каждой кривой равна 1, т.к. это сумма всех вероятностей: $\int P_n dn = \sum P_n = 1$. Средняя множественность, $\langle n \rangle = \sum n P_n = \int n P_n dn$, растет с энергией.

Каждую из кривых можно линейно сжать по горизонтали пропорционально какому-либо ее горизонтальному размеру, например среднему значению $\langle n \rangle$, как на рис. 1б (или наиболее вероятному значению, или ширине на полувысоте и т.д.), и растянуть во столько же раз по вертикали, чтобы площади опять стали одинаковыми (рис. 1в). Утверждение KNO-скейлинга заключается в том, что тогда кривые совпадут в каждой точке [44]. То есть

$$\langle n \rangle P_n = \Psi\left(\frac{n}{\langle n \rangle}\right), \quad (2)$$

где $\Psi(z)$ — не зависящая от энергии функция, нормированная согласно

$$\int_0^{\infty} \Psi(z) dz = 1 \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} z \Psi(z) dz = 1, \quad (3)$$

первое вытекает из равенства единице суммы всех вероятностей, а второе — из того, что мы сжимали функции P_n , пока среднее значение каждой не стало равным 1. Формула (2) не накладывает никаких ограничений, кроме (3), на вид функции $\Psi(z)$. Это просто определение понятия подобия для непрерывных нормированных функций.

В формуле (2) масштабный параметр $\langle n \rangle$ можно заменить на любой другой, линейный по n , горизонтальный размер функции P_n ,

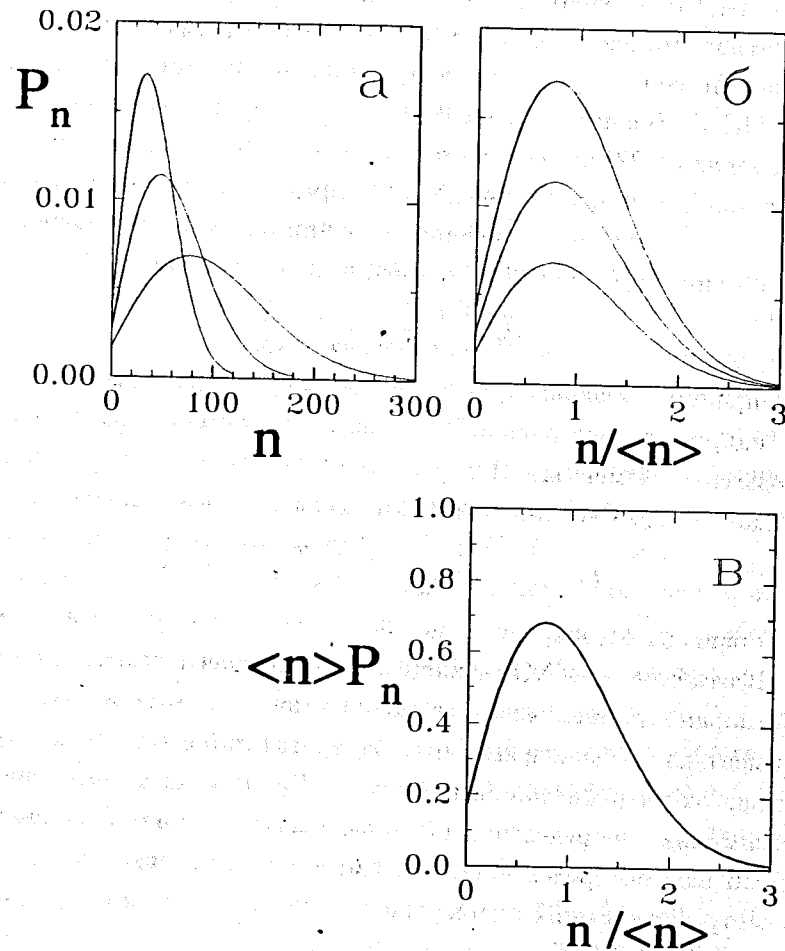


Рис. 1. Определение понятия подобия непрерывных функций (KNO-скейлинг). Нормированные функции (а) подобны, если после линейного сжатия каждой по горизонтали пропорционально какому-либо ее горизонтальному размеру, например $\langle n \rangle$ (б), и линейного растяжения по вертикали во столько же раз (в), они совпадут в каждой точке

например дисперсию $D_2 \equiv [\Sigma(n - \langle n \rangle)^2 P_n]^{1/2}$, или другой центральный момент в соответствующей степени $D_q \equiv [\Sigma(n - \langle n \rangle)^q P_n]^{1/q}$, или абсолютный момент $\langle n^q \rangle^{1/q} \equiv (\Sigma n^q P_n)^{1/q}$ и т.д. Все они меняются с энергией пропорционально друг другу, если выполняется асимптотический КНО-скейлинг $\langle n \rangle \propto \langle n^q \rangle^{1/q} \propto D_q$ (см. (10), (11)).

Скейлинг (2) является частным случаем более слабой симметрии, при которой одинаковость формы распределений проверяется только после совмещения как их средних значений (сдвигом по горизонтали), так и ширин (изменением масштаба, пропорциональным D_2) [45]:

$$P_n = \frac{1}{D_2} \Psi' \left(\frac{n - \langle n \rangle}{D_2} \right). \quad (4)$$

Здесь пропорциональны друг другу только размеры, связанные с формой (например, центральные моменты), но не с началом координат (абсолютные моменты). При $\langle n \rangle / (\sqrt{s}) / D_2(\sqrt{s}) = const$, скейлинг (4) совпадает с (2). Скейлинг (4) можно также записать в виде [46]

$$P_n = \frac{1}{\langle n \rangle - \alpha(\sqrt{s})} \Psi'' \left(\frac{n - \alpha(\sqrt{s})}{\langle n \rangle - \alpha(\sqrt{s})} \right) \quad (5)$$

(где α зависит от энергии) подстановкой $\alpha \equiv \langle n \rangle - \eta D_2$, где $\eta = const$.

В отличие от КНО-скейлинга (2), имеющего только один свободный параметр, зависящий от энергии, например $\langle n \rangle$, скейлинг (4), (5) имеет два независимых друг от друга свободных параметра, зависящих от энергии, например $\langle n \rangle$ и D_2 . В этом к нему близка аппроксимация распределений по множественности отрицательным биномиальным распределением [47, 48], также имеющая два свободных параметра, зависящих от энергии.

3. ВНУТРЕННЕЕ ПРОТИВОРЕЧИЕ

При современных ускорительных энергиях, когда не выполнено условие $\langle n \rangle \gg 1$ ($\langle n_{ch} \rangle \gg 2$), с функцией P_n невозможно работать как с непрерывной. Например, в pp -взаимодействиях при $p_{\text{лаб}} = 100$ ГэВ/с, $\langle n \rangle \sim 2$; при $\sqrt{s} = 60$ ГэВ, $\langle n \rangle \sim 5$; при $\sqrt{s} = 546$ ГэВ, $\langle n \rangle \sim 13$. В этом случае, независимо от физического обоснования, формула (2) становится внутренне противоречивой — чисто математически не согласуется с нормировочным условием $\Sigma_0^\infty P_n = 1$ [49].

Это противоречие очевидно на рис. 2а [50]. Согласно формуле (2), чтобы получить некоторое распределение по множественности с данным $\langle n \rangle$ из непрерывной универсальной функции $\Psi(z)$ на рис. 2а, надо проделать операцию, обратную изображенной на рис. 1, т.е. выбрать на оси z масштаб $z_0 = 1/\langle n \rangle$, и тогда вероятность P_n будет равна площади прямоугольника, касающегося левым углом кривой $\Psi(z)$ в точке $z = nz_0 = n/\langle n \rangle$. Высота этого прямоугольника равна $\Psi(z) = \langle n \rangle P_n$, а основание — $1/\langle n \rangle$, т.е. площадь равна P_n .

При $z_0 \rightarrow 0$ ($\langle n \rangle \rightarrow \infty$) сумма площадей прямоугольников (полная вероятность) равна площади под кривой, т.е. равна 1. Однако при увеличении z_0 (уменьшении энергии) эта сумма, конечно, не может оставаться такой же при каждой величине z_0 . Наше “численное интегрирование” становится слишком грубым. Распределение на рис. 2а примерно соответствует 100 ГэВ/с в pp -взаимодействиях. Распределение по всем заряженным частицам выглядит так же, только вероятности переобозначаются согласно (1): $P_0 \rightarrow P_2$, $P_1 \rightarrow P_4$ и т.д.

Менять с энергией нормировку $\Psi(z)$ означало бы ввести зависимость $\Psi(z)$ от энергии, т.е. отказаться от исходной гипотезы. Конечно, КНО-скейлинг формулировался только как приближенная закономерность, однако, чтобы проверить, выполняется ли он хотя бы приближенно, надо либо все сделать аккуратно, либо в каждом случае знать количественно, какое искажение вносит некорректность используемой математики. В общем, прежде чем экспериментально проверять гипотезу о подобии распределений по множественности, надо сначала дать определение понятия подобия для дискретных функций. Оно должно быть внутренне непротиворечивым при $\langle n \rangle \sim 1$ и возвращаться к асимптотическому виду (2) при $\langle n \rangle \rightarrow \infty$.

4. КОРРЕКТНЫЙ КНО-СКЕЙЛИНГ

Очевидная возможность корректного получения разных распределений по множественности из одной непрерывной функции $\Psi(z)$ показана на рис. 2б, где вероятность P_n равна просто площади под кривой в интервале z_0 . Ясно, что сумма вероятностей теперь всегда равна

1, а при $z_0 \rightarrow 0$, рисунки а и б совпадают. Это можно записать так [49]

$$P_n = \int_{nz_0}^{(n+1)z_0} \Psi(z) dz. \quad (6)$$

Нормировочные условия (3) для $\Psi(z)$ конечно остаются. Теперь можно угадать функцию $\Psi(z)$ или получить ее из очень больших энергий, когда справедлива приближенная формула (2), и вычислить разные распределения по множественности $P_n(z_0)$ по формуле (6), задавая разные масштабы z_0 . Отметим, что $\langle n \rangle$ уже не равно $1/z_0$, его теперь можно получить только из распределения по множественности P_n , так же, как и другие моменты.

Экспериментально проверить справедливость скейлинга (6) можно и не зная функцию $\Psi(z)$. Из рис. 26 ясно, что если мы имеем экспериментальное распределение по множественности при какой-то энергии, мы можем получить распределение для некоторой меньшей энергии, соответствующей в 2 раза большему z'_0 . При этом соседние площади складываются: $P'_0 = P_0 + P_1$; $P'_1 = P_2 + P_3$; $P'_2 = P_4 + P_5$ и т.д. То же можно повторить для $z''_0 = 3z_0$: $P''_n = P_{3n} + P_{3n+1} + P_{3n+2}$, и т.д. На рисунках 3, 4 приведено сравнение точек, полученных таким способом из данных ISR [36], с данными при меньших энергиях. Видно, что они совпадают до самых маленьких энергий. Заметим, кстати, что из (2) получился бы другой рецепт: $P'_n = 2P_{2n}$; $P''_n = 3P_{3n}$ и т.д. И тогда, вообще говоря, $\sum P'_n \neq 1$ и $\sum P''_n \neq 1$.

Запишем формулу (6) в другом виде, для чего введем непрерывный параметр $m \equiv z/z_0$, который заполнит промежутки в дискретной оси n на рис. 1а и который мы должны были ввести еще до получения (2), чтобы не интегрировать по дискретному параметру n . Тогда [49]

$$P_n = \int_n^{n+1} P(m) dm, \quad (7)$$

$$\text{где } P(m) \equiv \frac{1}{\langle m \rangle} \Psi\left(\frac{m}{\langle m \rangle}\right); \quad \langle m \rangle \equiv \int_0^{\infty} m P(m) dm = 1/z_0. \quad (8)$$

То есть, дискретное распределение P_n представляется в виде гистограммы с шагом, равным 1, от непрерывной КНО-инвариантной функции $P(m)$. В работах [51, 52] использовался почти такой же способ

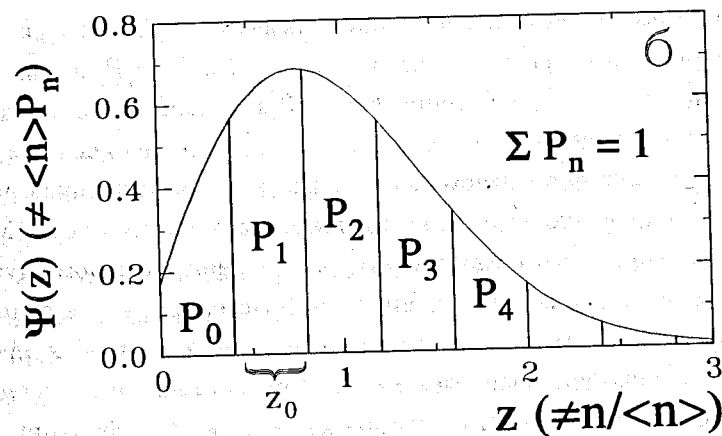
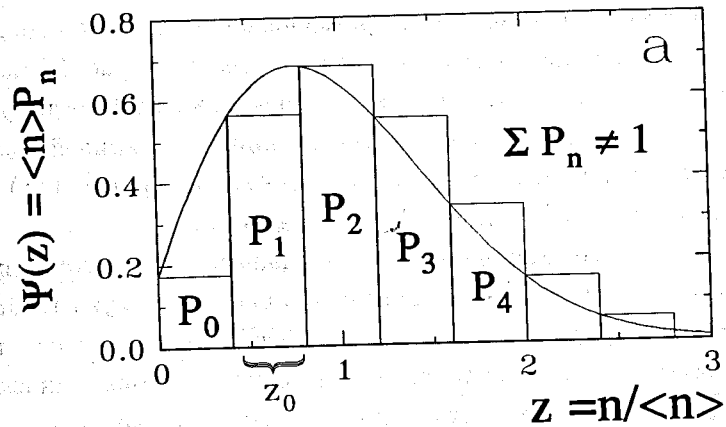


Рис. 2. Получение дискретного распределения по множественности из непрерывной нормированной универсальной функции $\Psi(z)$:

(а) — согласно обычному рецепту $P_n = 1/\langle n \rangle \Psi(n/\langle n \rangle)$, при этом парциальная вероятность P_n равна площади прямоугольника с основанием $z_0 \equiv 1/\langle n \rangle$ и высотой $\langle n \rangle P_n$; понятно, что сумма площадей прямоугольников не может оставаться равной площади под кривой при каждом значении z_0 , т.е. $\sum P_n \neq 1$;

(б) — согласно корректному рецепту, вероятность P_n равна площади под кривой в интервале $n z_0 \div (n+1) z_0$. Здесь $\sum P_n = 1$, но $z_0 \neq 1/\langle n \rangle$

$pp \rightarrow n_{neg}$

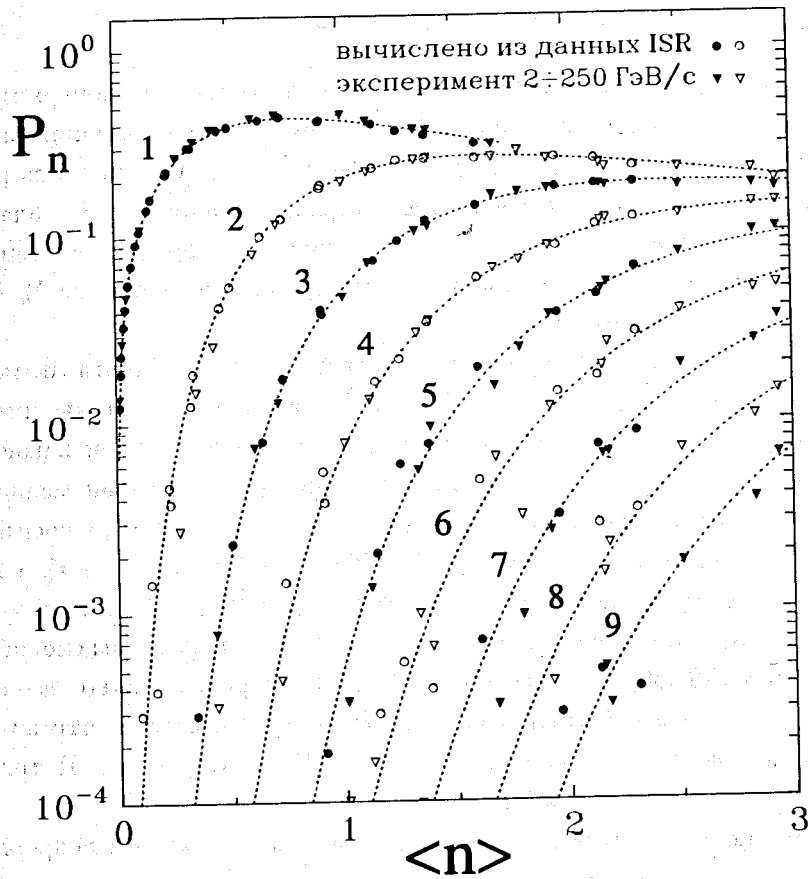


Рис. 3. Сравнение экспериментальных распределений по множественности с вычисленными из экспериментальных же распределений, но полученных при более высоких энергиях, по рецепту $P'_n = P_{2n} + P_{2n+1}$, $P''_n = P_{3n} + P_{3n+1} + P_{3n+2}$ и т.д. — если вероятности какого-то распределения P_n равны площади под кривой в интервале z_0 (рис. 2б), то вероятности распределения, соответствующего $z'_0 = 2z_0$, равны сумме соседних площадей на оси z : $P'_0 = P_0 + P_1$ и т.д. Ошибки точек не приведены. Кривые получены по формуле корректного KNO-скейлинга (6) для функций $\Psi_{pp}(z)$ (21), (22) (на глаз не отличаются)

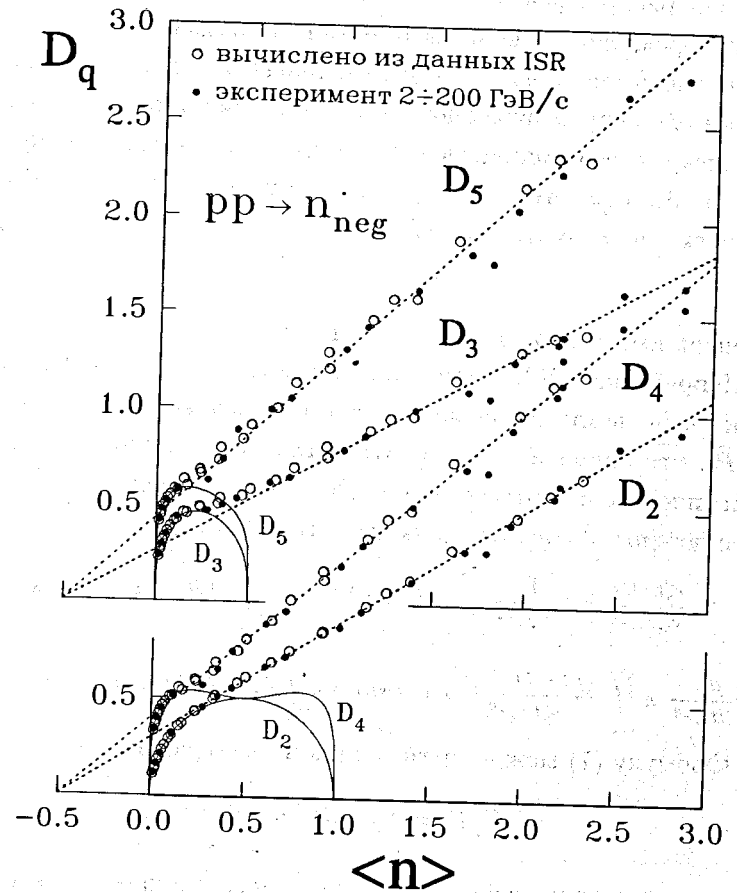


Рис. 4. Зависимость центральных моментов распределений $D_q \equiv (\sum (n - \langle n \rangle)^q P_n)^{1/q}$ от $\langle n \rangle$. Четные и нечетные моменты разнесены на 1. Вычисленные точки получены, как на рис. 3. Ошибки точек не приведены. Видно, что зависимости $D_q(\langle n \rangle)$ для экспериментальных и вычисленных точек совпадают. Приведены прямые Врублевского (16). Показаны нижние границы значений D_q — величина D_q минимальна при данном $\langle n \rangle$, когда только две соседние вероятности P_n не равны нулю. Эти границы являются еще одной математической причиной того, что прямые Врублевского не могут проходить через 0

получения распределений по множественности из непрерывной функции, которая, однако, не была КНО-инвариантна.

Можно сказать, что определение понятия подобия осталось определением для непрерывных функций, а изменился только способ получения дискретного распределения по множественности из непрерывной функции. Вместо внутренне противоречивого рецепта, которым мы фактически пользовались в (2)

$$P_n = P(m)|_{m=n}, \quad (9)$$

мы теперь имеем корректный рецепт (7).

Непрерывная КНО-инвариантная функция $P(m)$ обладает простыми свойствами, которые часто приписываются дискретной функции P_n , что приводит к недоразумениям. Абсолютные и центральные статистические моменты функции $P(m)$ пропорциональны ее среднему значению $\langle m \rangle$ в соответствующей степени ($z \equiv m/\langle m \rangle$):

$$\frac{\langle m^q \rangle}{\langle m \rangle^q} \equiv \frac{1}{\langle m \rangle^q} \int_{-\infty}^{\infty} m^q P(m) dm = \int_{-\infty}^{\infty} z^q \Psi(z) dz = const; \quad (10)$$

$$\frac{\mu_q}{\langle m \rangle^q} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(m - \langle m \rangle)^q}{\langle m \rangle^q} P(m) dm = \int_{-\infty}^{\infty} (z - 1)^q \Psi(z) dz = const. \quad (11)$$

Формулу (7) можно представить в интегральном виде [49]

$$\sum_k^{\infty} P_n = \int_k^{\infty} P(m) dm \equiv \Phi(k). \quad (12)$$

В статистике часто используется подобная (точнее, равная $1 - \Phi(k)$) накопленная функция распределения, вместо дискретных и непрерывных производных от нее вероятностных функций P_n и $P(m)$ [53].

Нормированная на $\langle m \rangle$ (по оси k) интегральная вероятность $\Phi(k/\langle m \rangle)$ связана с $\Psi(z)$ равенством $\Phi(z) \equiv \int_z^{\infty} \Psi(z) dz$ и удовлетворяет условиям $\Phi(0) = 1$ и $\int_0^{\infty} \Phi(z) dz = 1$, вытекающим из (3) [54]. Вероятности P_n вычисляются из $\Phi(z)$ проще, чем из $\Psi(z)$ в (6):

$$P_n = \Phi(nz_0) - \Phi((n+1)z_0). \quad (13)$$

Функция $\Phi(z)$, в отличие от $\Psi(z)$, позволяет нанести распределения по множественности при разных энергиях на одну кривую (рис. 5) [55].

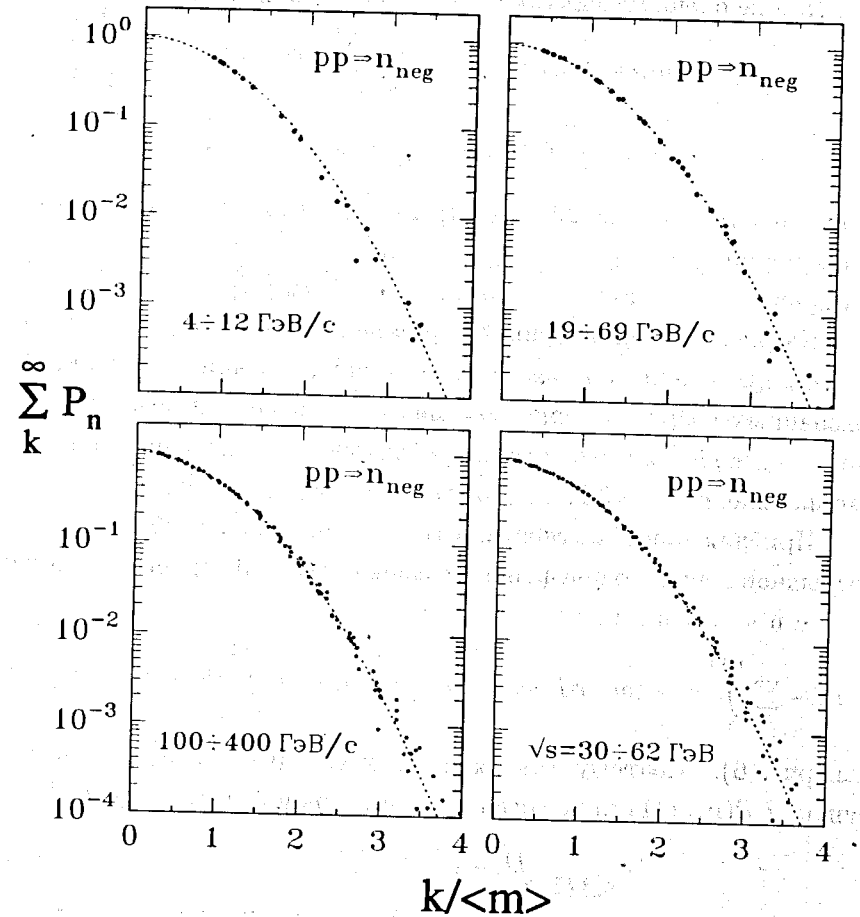


Рис. 5. Интегральная функция $\Phi(z) \equiv \int_z^{\infty} \Psi(z) dz$ (12), позволяющая, в отличие от $\Psi(z)$, нанести распределения по множественности при разных энергиях на одну кривую. В качестве $\langle m \rangle$ использована приближенная формула $\langle m \rangle = \langle n \rangle + 0,5$ (14). Кривая на рисунках получена по аппроксимациям $\Psi^{pp}(z)$ (21), (22) (на глаз не различаются). Ошибки точек не приведены

5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ СЛЕДСТВИЯ

При не очень маленьких $\langle n \rangle$ из (7), (8) приближенно получается

$$\begin{aligned} \langle m \rangle &= \int_0^{\infty} mP(m)dm = \sum_n \int_n^{n+1} mP(m)dm \approx \\ &\approx \sum_n (n+0,5) \int_n^{n+1} P(m)dm = \sum_n (n+0,5)P_n = \langle n \rangle + 0,5, \end{aligned} \quad (14)$$

что и так видно на рис. 26 — центр тяжести каждого бина P_n находится примерно при $z/z_0 \approx (n+0,5)$, значит, центр тяжести всей фигуры под кривой лежит при $z/z_0 \equiv m \approx \sum (n+0,5)P_n$ [55].

На рис. 6 (нижние кривые) приведены точные зависимости $\langle n \rangle$ от $\langle m \rangle$, полученные по формулам (7), (8), для аппроксимаций $\Psi(z)$, показанных на рис. 7, описывающих e^+e^- и pp -взаимодействия. Видно, что для pp -взаимодействий приближение (14) хорошо выполняется уже начиная с $\langle n \rangle \sim 0,2$, что соответствует $p_{\text{лаб}} \sim 3$ ГэВ/с.

Приближенное соотношение между центральными моментами непрерывной и дискретной функций оказывается еще проще, т.к. добавка 0,5 в n и $\langle n \rangle$ сокращается:

$$\mu_q = \sum_n \int_n^{n+1} (m - \langle m \rangle)^q P(m)dm \approx \sum_n (n - \langle n \rangle)^q \int_n^{n+1} P(m)dm = D_q^q \quad (15)$$

(см. рис. 6). Поэтому точная пропорциональность $\mu_q^{1/q} \propto \langle m \rangle$ для функций $P(m)$ (11) приводит к приближенной формуле для P_n [50, 54]

$$D_q \propto (\langle n \rangle + 0,5), \quad (16)$$

откуда, при переходе ко всем заряженным частицам в pp -взаимодействиях, согласно (1), получаются “прямые Врублевского” [56, 57]

$$D_q^{ch} \propto (\langle n_{ch} \rangle - 1). \quad (17)$$

На рис. 4 показаны эти прямые в виде (16). До появления корректной формулы (6) считалось, что эти эмпирические прямые свидетельствуют о нарушении KNO-скейлинга, т.к. не проходят через 0.

Из (7), (8) и (14) приближенно получается также [54]

$$P_n \approx P(m) \Big|_{m=n+0,5} \approx \frac{1}{\langle n \rangle + 0,5} \Psi \left(\frac{n+0,5}{\langle n \rangle + 0,5} \right). \quad (18)$$

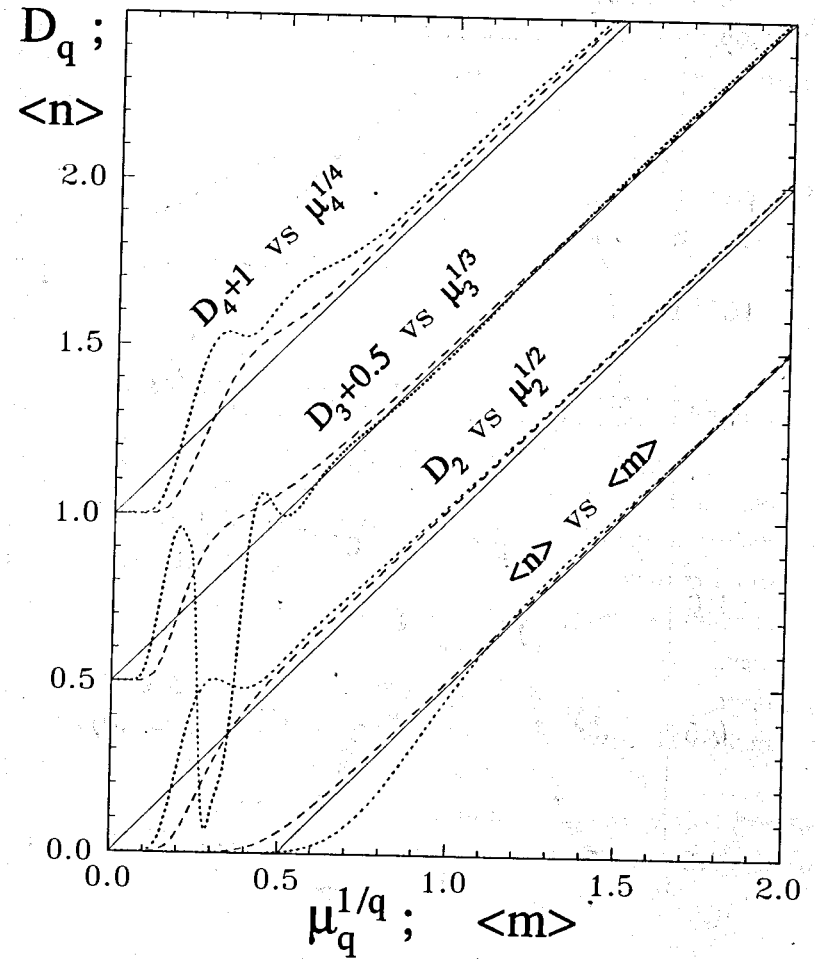


Рис. 6. Зависимость разных параметров дискретной функции P_n от соответствующих параметров непрерывной функции $P(m)$ для аппроксимаций $\Psi(z)$, описывающих e^+e^- -аннигиляцию (20), (22) (точечные линии) и pp -взаимодействия (21), (22) (штриховые линии). Сплошные прямые — приближенные формулы (14), (15). Значения D_3 и D_4 смещены вверх на 0,5 и 1 соответственно.

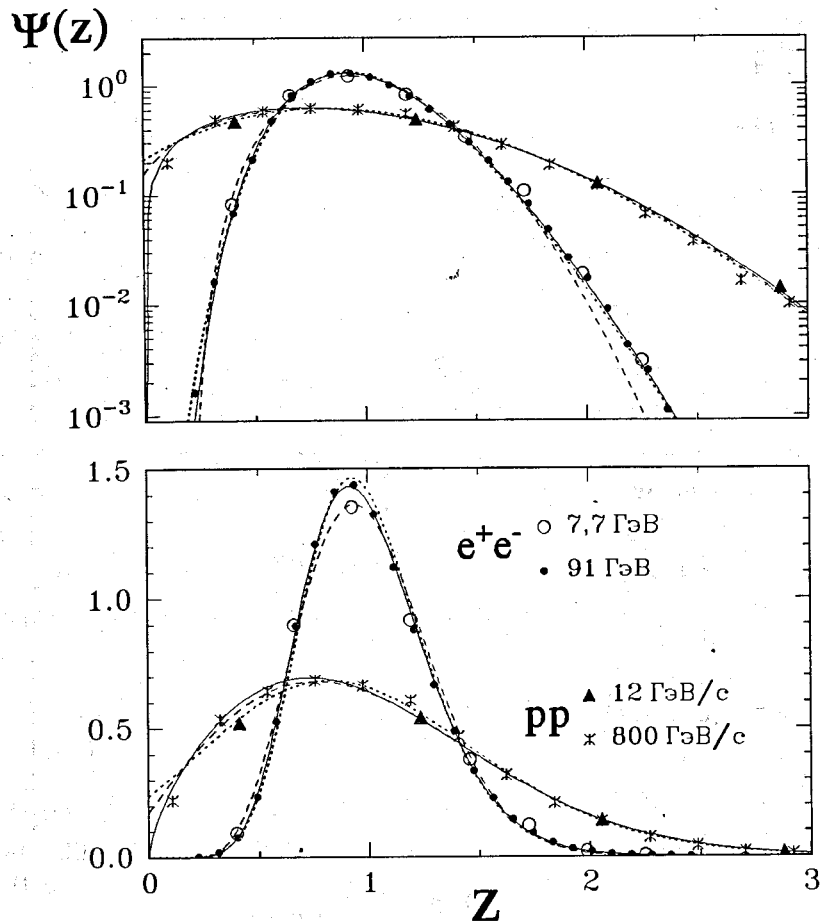


Рис. 7. Примеры распределений по множественности отрицательных частиц для e^+e^- - и pp -взаимодействий (логарифмический и линейный масштабы), построенные в координатах "исправленного KNO" (18): $z = (n + 0,5) / (\langle n \rangle + 0,5)$ и $\Psi = (\langle n \rangle + 0,5) P_n$. Кривые для e^+e^- и pp : Ψ_1 (20), (21) (—); Ψ_2 (20), (21) (- - - -); Ψ_3 (22) (.....). Ошибки точек не приведены; они порядка или больше расстояний между кривыми

На рис. 7 приведены примеры распределений в этих координатах для e^+e^- - и pp -взаимодействий. Из (18), при переходе ко всем заряженным частицам в pp -взаимодействиях (1), следует эмпирический "исправленный" KNO-скейлинг, предложенный в [56, 57]:

$$P_{n_{ch}} = \frac{1}{\langle n_{ch} \rangle - 1} \Psi \left(\frac{n_{ch} - 1}{\langle n_{ch} \rangle - 1} \right). \quad (19)$$

Для всех заряженных частиц в e^+e^- -аннигиляции из (16), (18) и (1) получаются такие же соотношения, как (17) и (19), только все знаки "-" меняются на "+".

6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ e^+e^- и pp

На рис. 8, 9 приведены отношения $(\langle n \rangle + 0,5) / D_2$ и D_q / D_2 для e^+e^- -аннигиляции при $\sqrt{s} = 3 \div 161$ ГэВ и для pp -взаимодействий при $\sqrt{s} = 2,7 \div 62$ ГэВ ($p_{\text{лаб}} = 2,8 \div 2000$ ГэВ/с), а также $\bar{p}p$ при $\sqrt{s} = 546$ ГэВ. Из (16) ясно, что эти величины, в отличие от часто используемых C_q (см. ниже), должны быстро выходить на плато с ростом энергии.

В математической статистике величина D_2^2 называется дисперсией, величина $(D_3/D_2)^3$ — асимметрией, а $[(D_4/D_2)^4 - 3]$ — эксцессом [53]. В физике множественного рождения эти величины обычно используются без соответствующих степеней.

Кривые получены по формуле (6) при подстановке в нее функций $\Psi(z)$, изображенных на рис. 7. Первые две функции для e^+e^- [11], [50]

$$\Psi_1^{ee}(z) = a_1 z^{c_1} \exp(-b_1 z); \quad \Psi_2^{ee}(z) = a_2 (z - c_2)^3 \exp[-b_2 (z - c_2)^2] \quad (20)$$

(при $z < c_2$, $\Psi_2^{ee}(z) \equiv 0$). Свободные параметры: $c_1 = 11$; $c_2 = 0,2$; а коэффициенты, получающиеся из условий (3), $\hat{a}_1 = 223367$; $b_1 = c_1 + 1 = 12$; $a_2 = 15,2$; $b_2 = 2,76$. Для pp -взаимодействий [58], [50, 54, 57, 59]:

$$\Psi_1^{pp}(z) = a_1 z^{c_1} \exp(-b_1 z^2); \quad \Psi_2^{pp}(z) = a_2 (z + c_2) \exp[-b_2 (z + c_2)^2], \quad (21)$$

где параметры: $c_1 = 0,66$; $c_2 = 0,14$; а коэффициенты, получающиеся из условий (3), $a_1 = 1,19$; $b_1 = 0,62$; $a_2 = 1,25$; $b_2 = 0,62$. Третья функция $\Psi(z)$ имеет общий вид для e^+e^- - и pp -взаимодействий [60, 61]

$$\Psi_3 = \frac{N}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \frac{1}{z+c} \exp\left(-\frac{[\ln(z+c) - \mu]^2}{2\sigma^2}\right), \quad (22)$$

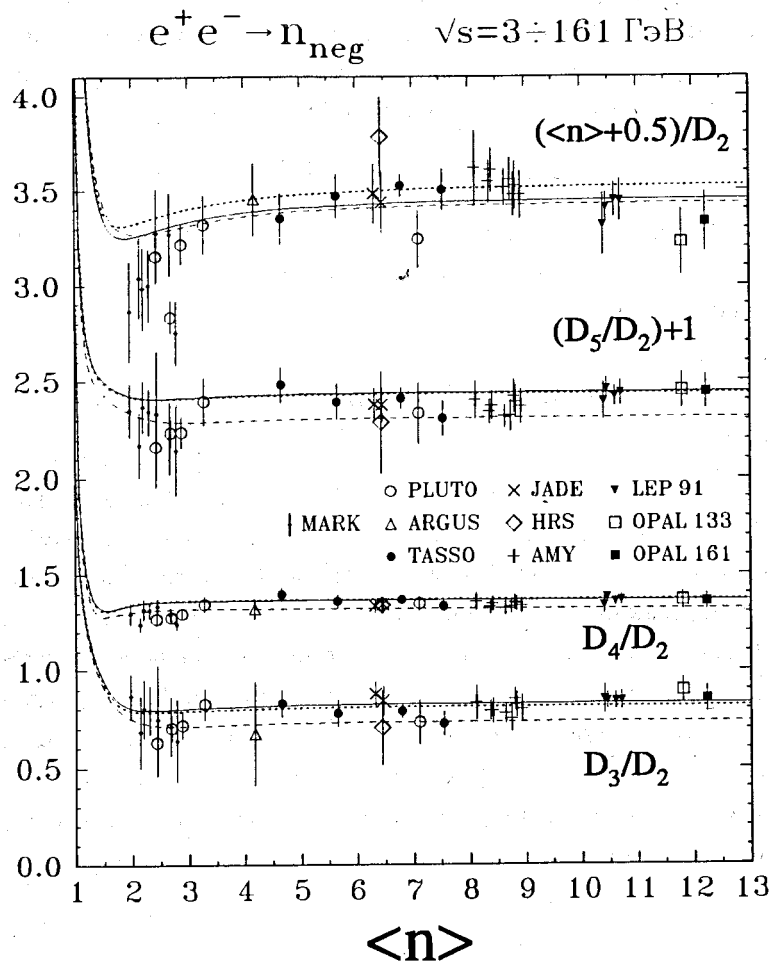


Рис. 8. Отношения моментов распределений по множественности отрицательных частиц в e^+e^- -аннигиляции ($D_q \equiv [\sum(n - \langle n \rangle)^q P_n]^{1/q}$). Величина D_5/D_2 смещена вверх на 1. Кривые получены по формуле корректного KNO-скейлинга (6) при подстановке в нее аппроксимаций $\Psi_1^{e^e}$ (20) (—); $\Psi_2^{e^e}$ (20) (- - -); $\Psi_3^{e^e}$ (22) (.....). При вычислении кривых P_0 полагалось равным 0, т.к. в эксперименте не измерялось

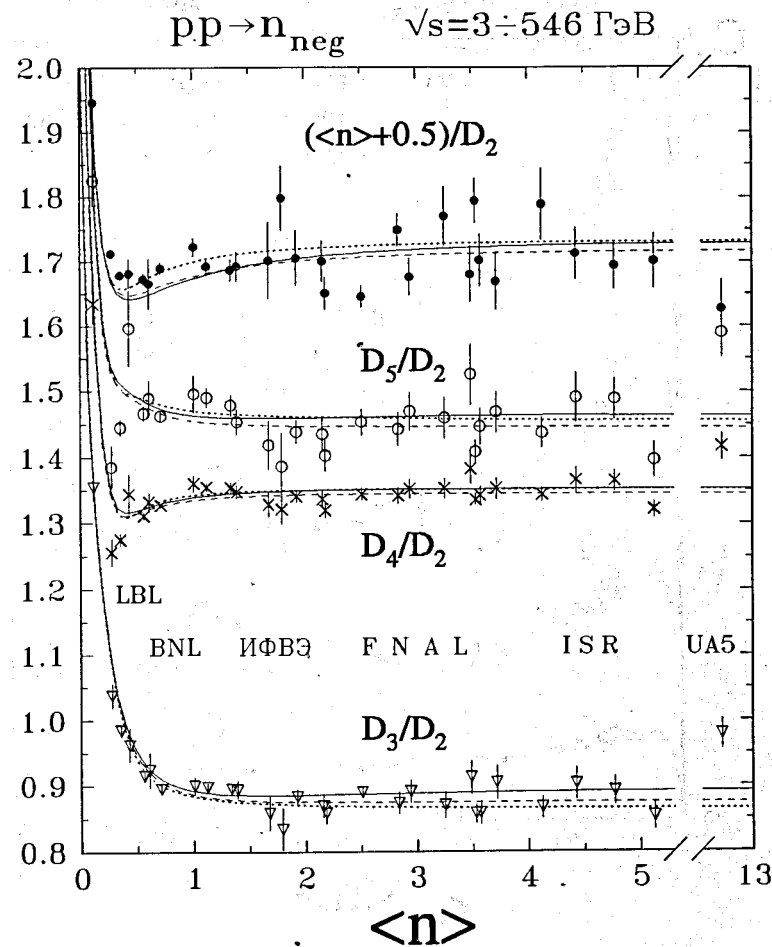


Рис. 9. Отношения моментов распределений по множественности отрицательных частиц в pp -взаимодействиях ($D_q \equiv [\sum(n - \langle n \rangle)^q P_n]^{1/q}$). Кривые получены по формуле корректного KNO-скейлинга (6) с функциями Ψ_1^{pp} (21) (—); Ψ_2^{pp} (21) (- - -); Ψ_3^{pp} (22) (.....)

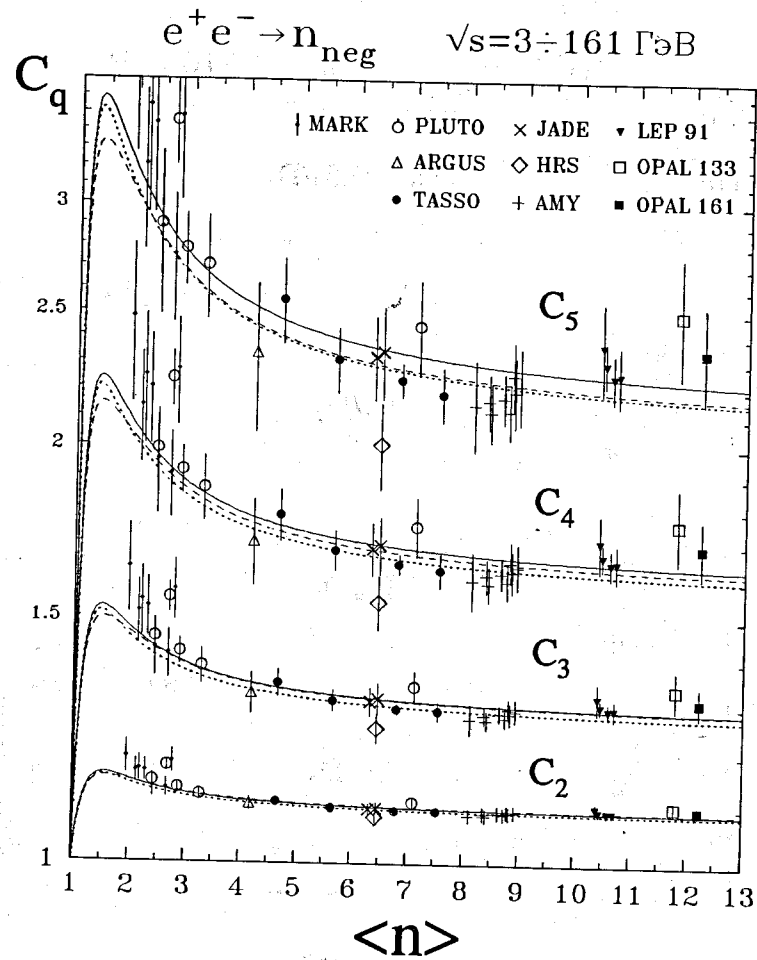


Рис. 10. Нормированные моменты распределений по множественности отрицательных частиц в e^+e^- -аннигиляции $C_q \equiv \langle n^q \rangle / \langle n \rangle^q$, где $\langle n^q \rangle \equiv \sum n^q P_n$. Кривые получены по формуле корректного КНО-скейлинга (6) с функциями Ψ_1^{ec} (20) (—); Ψ_2^{ec} (20) (- - - -); Ψ_3^{ec} (22) (.....). Видно, что эти моменты не должны были еще выйти на плато при этих энергиях, если выполняется корректный КНО-скейлинг (6). При вычислении кривых P_0 полагалось равным 0, т.к. в эксперименте не измерялось. Это приводит к провалу значений C_q при $\langle n \rangle \rightarrow 1$

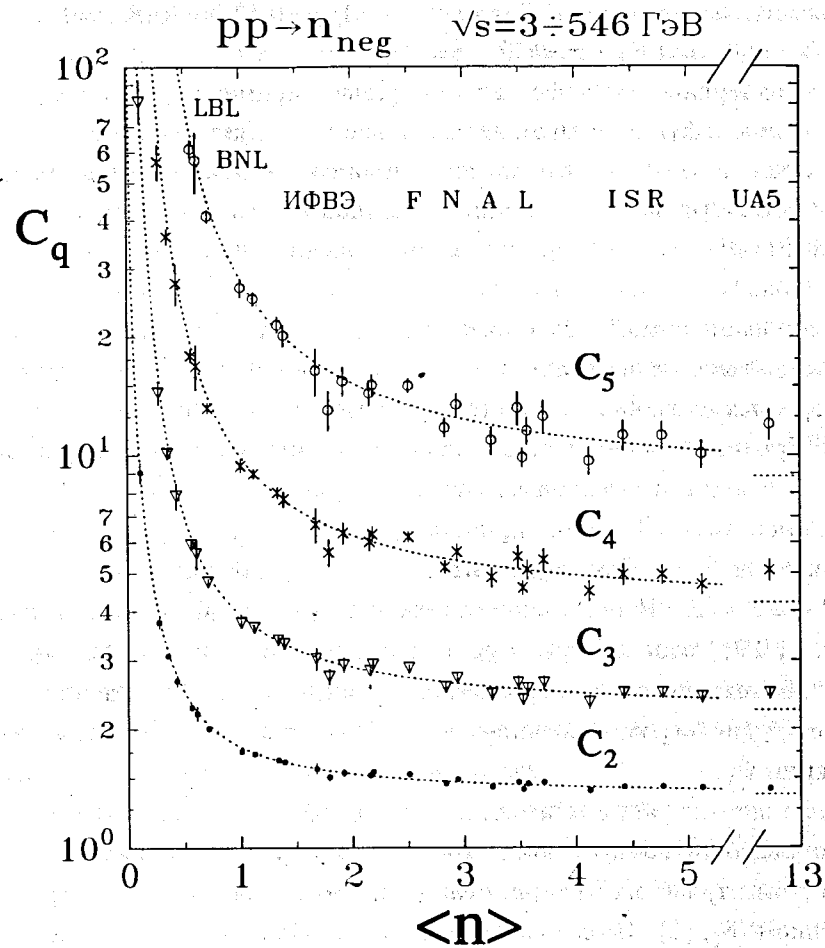


Рис. 11. Нормированные моменты распределений по множественности отрицательных частиц в pp -взаимодействиях $C_q \equiv \langle n^q \rangle / \langle n \rangle^q$, где $\langle n^q \rangle \equiv \sum n^q P_n$. Кривые получены по формуле корректного КНО-скейлинга (6) при подстановке в нее функций $\Psi^{pp}(z)$ (21), (22) (на глаз не различаются). Видно, что эти моменты не должны были еще выйти на плато при этих энергиях, если выполняется корректный КНО-скейлинг

где 2 из 4 параметров c , μ , N , и σ являются свободными, а остальные 2 связаны условиями (3). Для e^+e^- : $N=1$; $\mu=0,43$; $\sigma=0,18$; $c=0,56$. Для pp : $N=1,06$; $\mu=1,638$; $\sigma=0,121$; $c=4,25$ [61].

Подчеркнем, что все эти свободные параметры, задающие конкретный вид функций $\Psi(z)$, не связаны с самим утверждением о KNO-скейлинге, в отличие от зависящих от энергии параметров из разд. 2.

Несмотря на существенные различия в аналитическом виде функций $\Psi_1 - \Psi_3$, все три группы кривых на рис. 8 (а также на рис. 9) очень близки. Близки они также на рисунках 10, 11, где приведены нормированные моменты $C_q \equiv \langle n^q \rangle / \langle n \rangle^q$ для тех же данных. Величины C_q не выходят на плато даже при энергиях ISR. Из (18) видно, что быстро выходить на плато могли бы моменты $\langle (n+0,5)^q \rangle / \langle n+0,5 \rangle^q$.

При вычислении кривых для e^+e^- -аннигиляции P_0 приравнялось нулю, т.к. в экспериментах не измерялось (остальные P_n перенормировались к 1), что, впрочем, существенно только для самых маленьких энергий. Это приводит к провалу значений C_q на рис. 10 при $\langle n \rangle \rightarrow 1$. В остальном поведение кривых в e^+e^- -аннигиляции (рис. 8, 10) такое же, как в pp -взаимодействиях (рис. 9, 11), кривые отличаются только по абсолютной величине. Такое поведение определяется гистограммированием (6), (7) и не зависит от конкретной функции $\Psi(z)$.

Различные аппроксимации $\Psi(z)$, в том числе $\Psi_{1-3}(z)$ (20)-(22), как правило, не имеют физического обоснования (см., однако, [62, 63]), во всяком случае, их интерпретация никак не связана с гистограммированием (6), (7). Но использование какой-либо из них помогает увидеть, как должны вести себя экспериментальные данные при не очень больших энергиях, в случае выполнения корректного KNO-скейлинга.

7. ДАННЫЕ $S\bar{p}pS$

Точки $S\bar{p}pS$ [37] (эксперимент UA5, $\sqrt{s}=546$ ГэВ) на рис. 9, 11 получены при таком же переходе от всех заряженных частиц к отрицательным, как для pp -взаимодействий (1), т.е. в предположении, что лидирующих протонов и антипротонов в $\bar{p}p$ -взаимодействиях при каждой множественности в среднем столько же, сколько протонов в pp .

Нормированные моменты для всех заряженных частиц в e^+e^- -взаимодействиях $C_q^{ch} \equiv \langle n_{ch}^q \rangle / \langle n_{ch} \rangle^q$ равны моментам для отрицательных частиц, что видно из (1). В pp -взаимодействиях это не так, из-за сдвига на двойку в (1). На рис. 12 приведены эти моменты для pp -взаимодействий. Кривые получены с теми же функциями $\Psi(z)$ для распределений отрицательных частиц (21), (22), с последующим переходом ко всем заряженным согласно (1). Из сравнения кривых на рис. 11 и 12 видно, что они еще не вышли на плато даже при энергии $S\bar{p}pS$ — при очень больших энергиях моменты C_q должны стать равными C_q^{ch} . На рисунках 9, 11 и 12 заметно указание на нарушение KNO-скейлинга в эксперименте UA5 — точки не лежат на кривых.

Впрочем, на этих рисунках встречаются точки, выпадающие и за большее число ошибок, чем точки UA5, например данные [29] при $p_{\text{лаб}}=147$ ГэВ/с ($\langle n \rangle \simeq 2,5$; $\langle n_{ch} \rangle \simeq 7$). Часто именно с этой энергии начинаются графики, демонстрирующие постоянство моментов C_q^{ch} до энергий ISR и их внезапный рост при $S\bar{p}pS$ (см. рис. 12), что связывается с нарушением KNO-скейлинга. Однако, на рис. 11 (фактически эквивалентном рис. 12) точки UA5 лежат даже ниже точек 147 ГэВ/с (и почти всех остальных точек). На самом деле указание на нарушение корректного KNO-скейлинга для отрицательных частиц связано здесь только с тем, что точки не лежат на кривых.

На рис. 13 показан процент событий с множественностью, превышающей среднюю в заданное число раз ($\kappa=1,5; 2,0; 2,5$) [37]. Кривая здесь, конечно, не может быть плавной, как в [37]. Разрывы происходят, когда величина ($\kappa \langle n_{ch} \rangle$) при возрастании $\langle n_{ch} \rangle$ становится больше очередного четного числа, т.к. тогда очередная частичная вероятность $P_{n_{ch}}$ уже не входит в этот процент [50]. На этом рисунке указание на нарушение KNO-скейлинга слабее, чем на предыдущем.

Подчеркнем, что здесь речь идет только о полных неупругих частичных сечениях в pp -взаимодействиях. Часто обсуждаются распределения по множественности во взаимодействиях “без однократной дифракции” (NSD), не включающих события с “характерной” топологией, например события, в которых все вторичные частицы попадают в одну полусферу (в с.д.м.), или события с маленькой множественностью

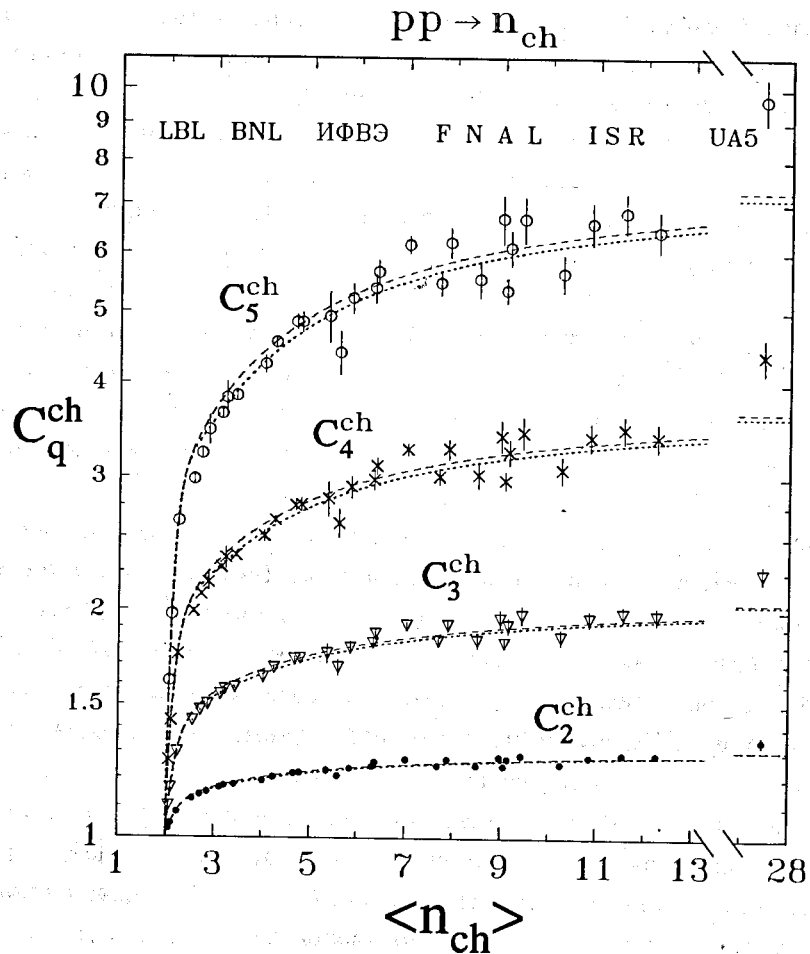


Рис. 12. Нормированные моменты распределений по множественности заряженных частиц в pp -взаимодействиях $C_q^{ch} \equiv \langle n_{ch}^q \rangle / \langle n_{ch} \rangle^q$, где $\langle n_{ch}^q \rangle \equiv \sum n_{ch}^q P_{n_{ch}}$. Кривые получены по формуле корректного KNO-скейлинга для распределений отрицательных частиц (6) с последующим переходом ко всем заряженным согласно (1). В (6) использовались функции Ψ^{pp} (21), (22) (на глаз почти не различаются). Видно, что эти моменты не должны были еще выйти на плато при этих энергиях, если выполняется корректный KNO-скейлинг (6)

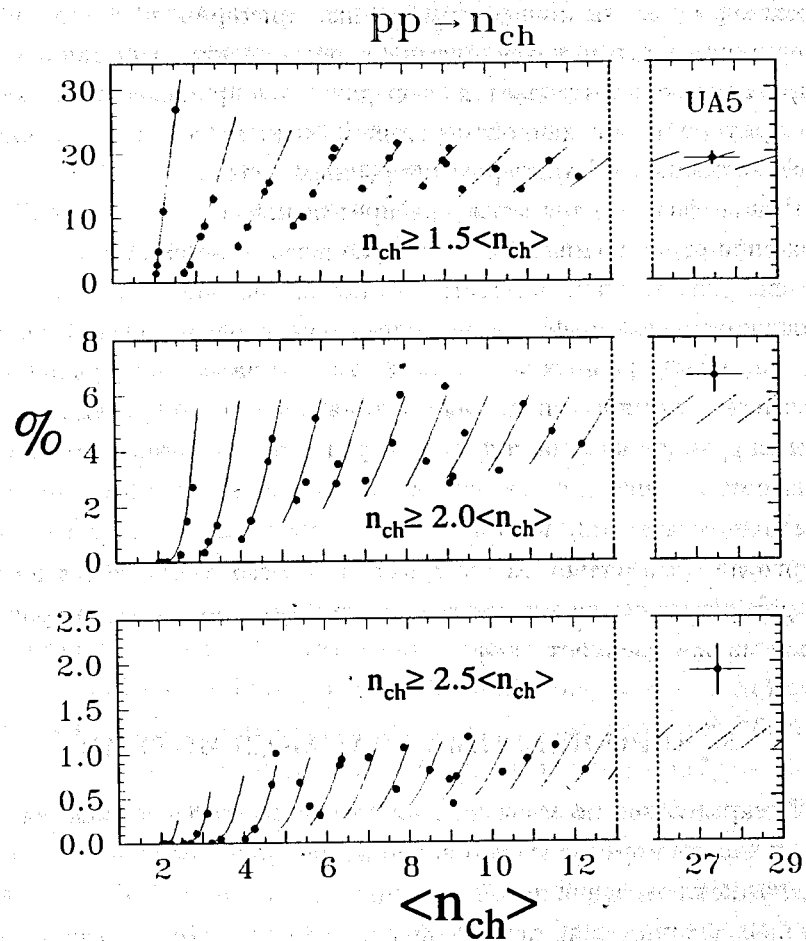


Рис. 13. Процент событий с множественностью, превышающей среднюю в заданное число раз ($\kappa=1,5; 2,0; 2,5$). Кривые получены по формуле корректного KNO-скейлинга для распределений отрицательных частиц (6), с последующим переходом ко всем заряженным согласно (1). В (6) использовались функции Ψ^{pp} (21), (22) (на глаз почти не различаются). Скачки кривой происходят, когда величина ($\kappa \langle n_{ch} \rangle$) при возрастании $\langle n_{ch} \rangle$ проходит очередное четное число --- тогда очередная парциальная вероятность $P_{n_{ch}}$ уже не входит в этот процент

и очень энергичной лидирующей частицей и т.д. Необходимость такой отбраковки событий и ее разнообразные критерии часто диктуются экспериментальными трудностями их регистрации. Принципиальная неопределенность заключается здесь даже не в произвольности каких-либо критериев при данной первичной энергии, а в невозможности ввести "одинаковые" критерии для разных энергий.

Часто фитируются также распределения по множественности в каких-либо ограниченных областях фазового объема, например в быстротных интервалах. Заметим, что предположение о существовании одной универсальной функции, описывающей распределения по множественности в разных интервалах, влечет за собой сильное предположение о наличии специальных динамических корреляций, точно компенсирующих кинематические корреляции, связанные с очевидной зависимостью спектров от полной множественности. Кажется полезным сначала проверить, не является ли чисто случайным попадание каждого пиона в заданный интервал, что легко вычисляется из полного распределения по множественности и быстротных спектров при каждой множественности [64].

8. ЯДРО-ЯДЕРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Распределения по множественности во взаимодействиях элементарных частиц нормируются обычно на неупругое сечение — сечение рождения хотя бы одной новой частицы ($P_n = \sigma_n / \sigma_{in}$). При нормировке на полное сечение распределение не получится гладким, появится выброс в нулевом канале, соответствующем упругому рассеянию. И этот пик будет расти с энергией относительно остальных каналов, т.к. доля упругого сечения почти не зависит от энергии, а неупругое сечение с ростом энергии (множественности) делится на все большее число каналов, соответствующих разным множественностям. То есть, при такой нормировке гипотезу о подобии распределений можно не проверять. Конечно, при сравнении достаточно полной теории с экспериментом безразлично, каким определением пользоваться, однако теории мягких процессов в сильных взаимодействиях пока нет.

В отличие от взаимодействий элементарных частиц, где понятие неупругого сечения имеет вполне однозначный смысл, в ядро-ядерных взаимодействиях могли бы использоваться разные сечения: σ_{prod} — сечение рождения новых частиц (в основном, заряженных и нейтральных π -мезонов); σ_{react} , включающее σ_{prod} , и сечение квазиупругого развала хотя бы одного из ядер; σ_{in} , включающее σ_{react} , и сечение возбуждения ядер (бывает полезна также нормировка на σ_{neg} — сечение рождения хотя бы одной отрицательной частицы [38]). Для распределений по множественности отрицательных частиц эти сечения отличаются только сечением σ_0 ($n = 0$). Из тех же соображений об отсутствии выброса в нулевом канале, соответствующем квазиупругому развалу и возбуждению ядер, было бы естественно нормировать распределения по множественности в ядро-ядерных взаимодействиях на σ_{prod} [38].

На рис. 14 приведены зависимости D_q от $\langle n \rangle$ (при нормировке на σ_{prod}) [65] для взаимодействий α -частиц с разными ядрами при импульсе α -частиц 4,5 ГэВ/с на нуклон (кинетическая энергия 3,7 ГэВ на нуклон) [38] вместе с данными $\alpha\alpha$ при энергии в с.п.м. 26,3 и 31,2 ГэВ на нуклон, что соответствует энергии одной α -частицы в системе покоя второй 370 и 520 ГэВ/нуклон [40]. Точки хорошо лежат на прямых Врублевского $D_q \propto (\langle n \rangle + 0,5)$, что еще раз подтверждает "большую фундаментальность" выражения (16) по сравнению с (17) — в ядро-ядерных взаимодействиях, в отличие от pp , между этими выражениями нет взаимнооднозначной связи. При энергии 3,7 ГэВ/нуклон мишени начинаются только с Li^6 , однако на рисунке видно, что на прямых лежат все приведенные точки, т.е. зависимость формы распределения по множественности от мишени здесь достаточно слабая [38].

На рис. 15 [65] приведены данные по взаимодействиям ядер углерода 3,7 ГэВ/нуклон с разными ядрами [39] вместе с кислород-ядерными данными при энергиях 60 и 200 ГэВ/нуклон [41]. Видно, что все точки лежат на одной прямой. На врезке, в увеличенном масштабе, показаны те же точки при 3,7 ГэВ/нуклон вместе с той же прямой Врублевского. Здесь видно, что эта прямая, так же, как и на рис. 14, пересекает ось абсцисс в точке $\langle n \rangle = -0,5$ в полном согласии с (16).

Прямое сравнение распределений по множественности в $C^{12}Si$

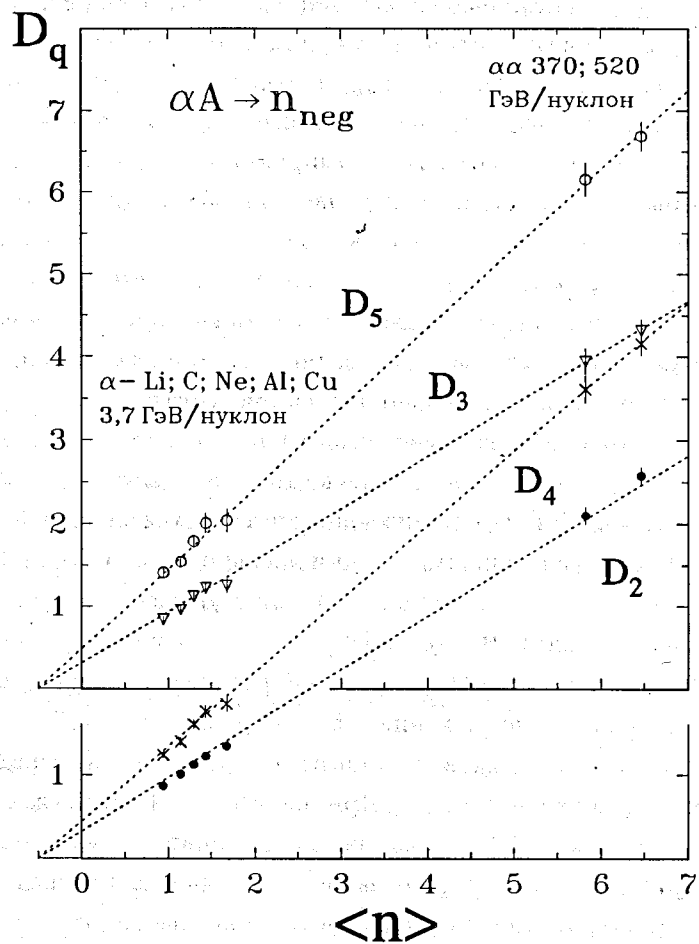


Рис. 14. Зависимости $D_q \equiv (\sum (n - \langle n \rangle)^q P_n)^{1/q}$ от $\langle n \rangle$ для распределений по множественности отрицательных частиц в α -взаимодействиях при $\sqrt{s} = 26$ и 31 ГэВ на нуклон и в αLi^6 , αC , αNe , αCu — при $p_{\text{лаб}} = 4,5$ ГэВ/с на нуклон. Четные и нечетные моменты разнесены на 1. Видно, что точки лежат на прямых Врублевского: $D_q \propto (\langle n \rangle + 0,5)$

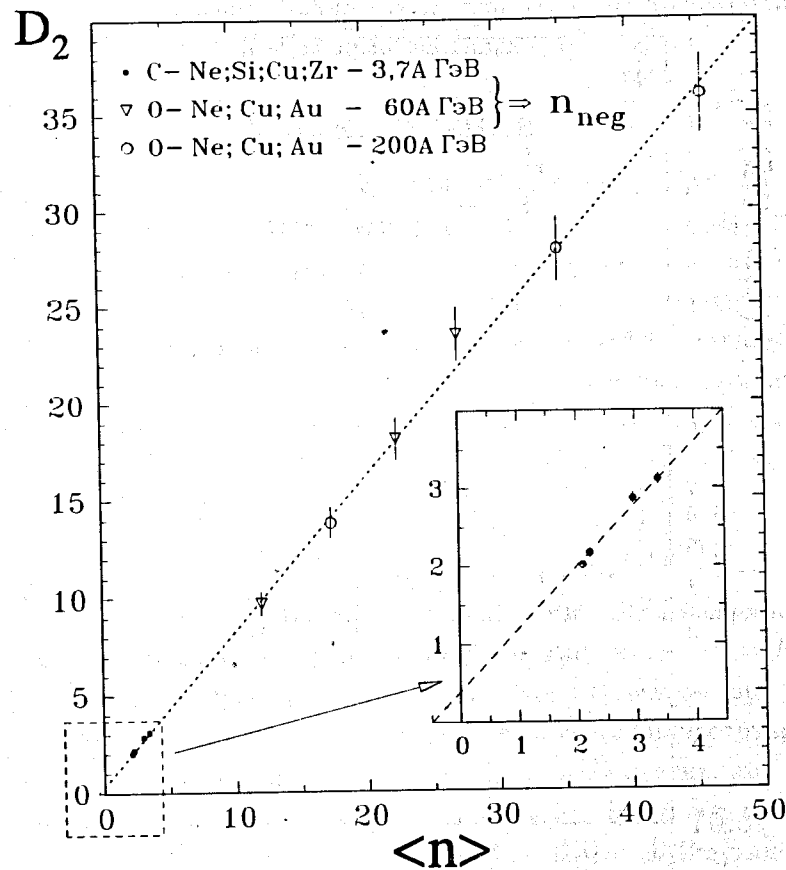


Рис. 15. Зависимость $D_2 \equiv (\sum (n - \langle n \rangle)^2 P_n)^{1/2}$ от $\langle n \rangle$ для распределений по множественности отрицательных частиц в ONe -, OCu - и $O Au$ -взаимодействиях при $p_{\text{лаб}} = 60$ и 200 ГэВ/с на нуклон и в CNe -, CSi -, CCu -, CZr — при $p_{\text{лаб}} = 4,5$ ГэВ/с на нуклон. На врезке в увеличенном масштабе показана часть этого рисунка, близкая к началу координат. Видно, что все точки, так же, как и на рис. 14, хорошо лежат на прямой Врублевского: $D_2 \propto (\langle n \rangle + 0,5)$ (16)

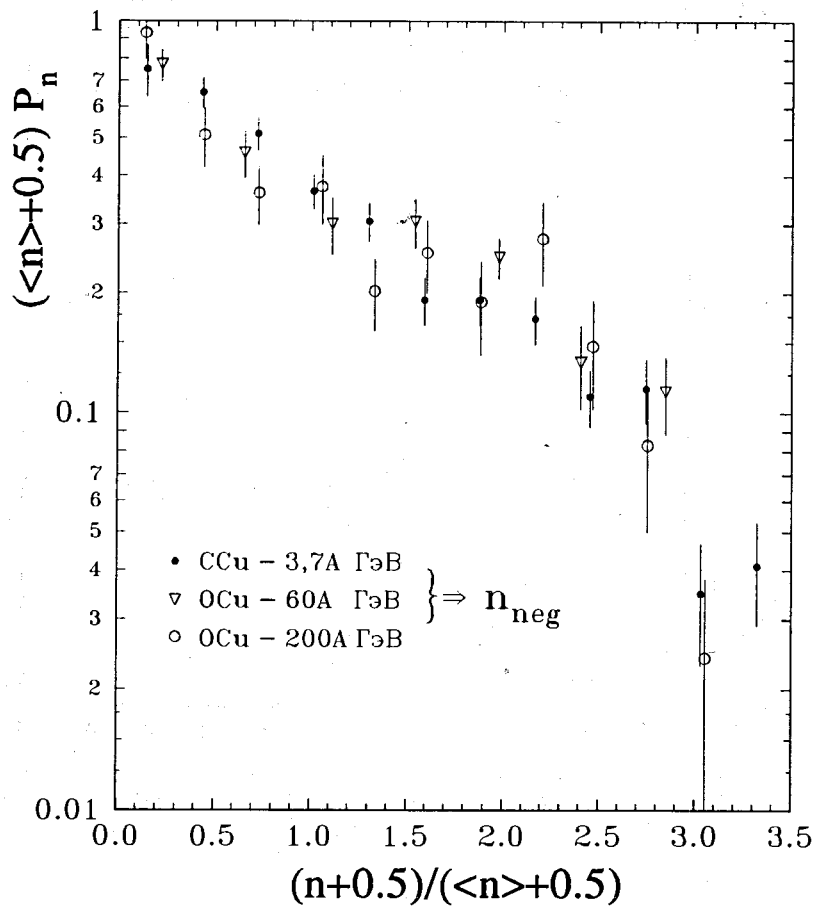


Рис. 16. Непосредственное сравнение распределений по множественности в CCu — 3,7 ГэВ/нуклон и OCu — 60 и 200 ГэВ/нуклон в координатах “исправленного” KNO (18). Видно, что форма распределений совпадает. Видно, также, что она существенно отличается от формы распределений в e^+e^- - и pp -взаимодействиях (рис. 7)

при 3,7 ГэВ/нуклон и $O^{16}Cu$ при 60 и 200 ГэВ/нуклон в координатах “исправленного” KNO (18) приведено на рис. 16. Видно, что форма распределений совпадает. Видно также, что она существенно отличается от формы в e^+e^- - и pp -взаимодействиях (рис. 7).

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнение корректного варианта KNO-скейлинга (KNO-G) с экспериментом содержится также в работах [11, 60] (e^+e^-); [61] (e^+e^- и pp); [31, 54] (π^+p , K^+p и pp); [66, 67] (νA , $\bar{\nu}A$ и μA); [68] (e^+p); [69] (AA). Его теоретическое обоснование отсутствует, хотя существует много моделей, предсказывающих асимптотический KNO-скейлинг.

В заключение заметим, что рецепт (6) получения дискретных распределений по множественности из непрерывной вероятностной функции далеко не нов. Если в (6) подставить $\Psi(z) = \exp(-z)$, то

$$P_n = \int_{nz_0}^{(n+1)z_0} e^{-z} dz = (1 - e^{-z_0}) e^{-nz_0} \left[= \frac{\langle n \rangle^n}{(\langle n \rangle + 1)^{n+1}} \right]. \quad (23)$$

Именно эту процедуру использовал Планк [70] для квантования непрерывного максвелловского вероятностного распределения ($z = E/kT$; $z_0 = h\nu/kT$) в одной из формулировок квантовой гипотезы, при получении теплового спектра (P_n — вероятность n фотонов частоты ν).

В других изложениях проблемы теплового излучения, при квантовании больцмановского спектра, обычно фактически используется рецепт (9): $P'_n = P(n) \propto \exp(-\frac{E}{kT})$, где $E = nh\nu$, с последующей перенормировкой величин P'_n к 1: $P_n = \exp(-\frac{nh\nu}{kT}) / \sum \exp(-\frac{nh\nu}{kT})$. Тем не менее результат такой процедуры совпадает с (23), т.к. для экспоненциальной функции (и только для нее) отношение $P_n/P(m)$ при $n = m$ не зависит от n . Кстати, для этой функции также $\Phi(z) = \Psi(z)$.

Среднее число фотонов (фононов) частоты ν планковского спектра $\langle n \rangle = \sum n P_n = [\exp(z_0) - 1]^{-1} = [\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1]^{-1}$ связано с соответствующей средней величиной больцмановского спектра $\langle m \rangle = 1/z_0 = kT/h\nu$ тем же приближенным соотношением (14) $\langle m \rangle \approx \langle n \rangle + 0,5$. Точная зависимость при больших z_0 (малых $\frac{kT}{h\nu}$), в связи с теорией теплоемкости, приведена, например, в [71, рис. 27, 28] (ср. с рис. 6).

Выраженный через $\langle n \rangle$ результат (23) (в скобках) — распределение Бозе—Эйнштейна, часто используется при интерпретациях описания распределений по множественности отрицательным биномиальным распределением [47, 48].

Математическая процедура (23), независимо от ее физического обоснования в [70], следует из общего принципа, постулированного накануне создания современной квантовой механики — правила квантования Борна—Крамерса [72, 73] — рецепта получения дискретных квантовомеханических величин из соответствующих им непрерывных классических. В наших обозначениях и учитывая наше определение $\partial\Phi(z)/\partial z = -\Psi(z)$ (см. разд. 4), этот принцип можно сформулировать так: дискретная величина P_l , связанная с квантовыми состояниями l и $l + \tau$, равна $\Phi(l) - \Phi(l + \tau)$ (см. (13)), где $\Phi(z)$ вычисляется из $-\tau[\partial\Phi(z)/\partial z] = \tau\Psi(z) = P(m)$, где $P(m)$ — классический аналог квантовой величины P_l .

Литература

- [1] e^+e^- : 3,0÷7,4 ГэВ: J.L.Siegrist et al., Phys.Rev.D 26 (1982) 969.
- [2] 3,6÷44 ГэВ: W.Braunschweig et al., Z.Phys.C 45 (1989) 193.
- [3] 5÷31 ГэВ: M.Althoff et al., Z.Phys.C 22 (1984) 307.
- [4] 10 ГэВ: H.Albrecht et al., Z.Phys.C 54 (1992) 13.
- [5] 12÷35 ГэВ: W.Bartel et al., Z.Phys.C 20 (1983) 187.
- [6] 29 ГэВ: M.Derrick et al., Phys.Rev.D 34 (1986) 3304.
- [7] 52÷61 ГэВ: H.W.Zheng et al., Phys.Rev.D 42 (1990) 737.
- [8] 91 ГэВ: R.Barate et al., Phys.Rep. 294 (1998) 1.
- [9] 91 ГэВ: P.Abreu et al., Z.Phys.C 50 (1991) 185.
- [10] 91 ГэВ: B.Adeva et al., Z.Phys.C 55 (1992) 39.
- [11] 91 ГэВ: P.D.Acton et al., Z.Phys.C 53 (1992) 539.
- [12] 133 ГэВ: G.Alexander et al., Z.Phys.C 72 (1996) 191.
- [13] 161 ГэВ: K.Ackerstaff et al., Z.Phys.C 75 (1997) 193.
- [14] pp : 2,81 ГэВ/c: E.Pickup et al., Phys.Rev. 125 (1962) 2091.
- [15] 4 ГэВ/c: L.Bodini et al., Nuovo Cim. 58A (1968) 475.

- [16] 5.5 ГэВ/c: G.Alexander et al., Phys.Rev. 154 (1967) 1284.
- [17] 6.6 ГэВ/c: E.R.Gellert, LBL-749, Berkeley, 1972.
- [18] 8,8 ГэВ/c: C.N.Booth et al., Phys.Rev.D 27 (1983) 2018.
- [19] 10 ГэВ/c: S.P.Almeida et al., Phys.Rev. 174 (1968) 1638.
- [20] 12; 24 ГэВ/c: V.Blobel et al., Nucl.Phys.B 69 (1974) 454.
- [21] 19 ГэВ/c: H.Boggild et al., Nucl.Phys.B 27 (1971) 285.
- [22] 32 ГэВ/c: М.Ю.Боголюбский и др., ЯФ 46 (1987) 1680.
- [23] 35,7 ГэВ/c: И.В.Богуславский и др., ОИЯИ 1-10134, Дубна, 1976.
- [24] 50 ГэВ/c: V.V.Ammosov et al., Phys.Lett.B 42 (1972) 519.
- [25] 60 ГэВ/c: C.Bromberg et al., Phys.Rev.D 15 (1977) 64.
- [26] 69 ГэВ/c: В.В.Бабинцев и др., ИФВЭ М-25, Серпухов, 1976.
- [27] 100 ГэВ/c: W.M.Morse et al., Phys.Rev.D 15 (1977) 66.
- [28] 102; 405 ГэВ/c: C.Bromberg et al., Phys.Rev.Lett. 31 (1973) 1563.
- [29] 147 ГэВ/c: D.Brick et al., Phys.Rev.D 25 (1982) 2794.
- [30] 205 ГэВ/c: S.Barish et al., Phys.Rev.D 9 (1974) 2689.
- [31] 250 ГэВ/c: M.Adamus et al., Z.Phys.C 32 (1986) 475.
- [32] 300 ГэВ/c: A.Firestone et al., Phys.Rev.D 10 (1974) 2080.
- [33] 360 ГэВ/c: J.L.Bailly et al., Z.Phys.C 23 (1984) 205.
- [34] 400 ГэВ/c: R.D.Kass et al., Phys.Rev.D 20 (1979) 605.
- [35] 800 ГэВ/c: R.Ammar et al., Phys.Lett.B 178 (1986) 124.
- [36] $\sqrt{s}=30\div 60$ ГэВ: A.Breakstone et al., Phys.Rev.D 30 (1984) 528.
- [37] $\sqrt{s}=546$ ГэВ: G.J.Alnner et al., Phys.Rep. 154 (1987) 247.
- [38] V.D.Aksinenko et al., Nucl.Phys.A 324 (1979) 266.
- [39] V.D.Aksinenko et al., Nucl.Phys.A 348 (1980) 518.
- [40] W.Bell et al., Phys.Lett.B 128 (1983) 349.
- [41] A.Bamberger et al., Phys.Lett.B 205 (1988) 583.
- [42] Z.Koba, H.B.Nielsen, P.Olesen, Nucl.Phys.B 40 (1972) 317.
- [43] А.М.Поляков, ЖЭТФ 59 (1970) 542.
- [44] Z.Koba, CERN-JINR School of Phys., CERN 73-12, 1973.
- [45] O.Czyżewski, K.Rybicki, Nucl.Phys.B 47 (1972) 633.
- [46] M.Blažek, Z.Phys.C 32 (1986) 309.

- [47] A.Giovannini, Nuovo Cim.A 15 (1973) 543.
- [48] W.J.Knox, Phys.Rev.D 10 (1974) 65.
- [49] А.И.Голохвастов, ЯФ 27 (1978) 809.
- [50] A.I.Golokhvastov, JINR E2-87-484, Dubna, 1987.
- [51] G.V.Parry, P.Rotelli, IC/73/3, Triest, 1973.
- [52] G.V.Parry, P.Rotelli, Lett.Nuovo Cim. 7 (1973) 649.
- [53] В.Идье и др., Статистические Методы, Атомиздат, 1976.
- [54] R.Szwed, G.Wrochna, Z.Phys.C 29 (1985) 255.
- [55] А.И.Голохвастов, ЯФ 30 (1979) 253.
- [56] A.Wróblewski, Acta Phys.Pol.B 4 (1973) 857.
- [57] A.J.Buras, J.Dias de Deus, R.Møller, Phys.Lett.B 47 (1973) 251.
- [58] G.Bozoki et al., Nuovo Cim. 64A (1969) 881.
- [59] R.Szwed, IFD/3/86, IFD/5/86, Warsaw, 1986.
- [60] R.Szwed, G.Wrochna, Z.Phys.C 47 (1990) 449.
- [61] M.Gazdzicki et al., Mod.Phys.Lett.A 6 (1991) 981.
- [62] R.Szwed, G.Wrochna, A.Wróblewski, Mod.Phys.Lett.A 5 (1990) 1851.
- [63] G.Wrochna, IFD/5/90, IFD/9/90, Warsaw, 1990.
- [64] A.I.Golokhvastov, Z.Phys.C 64 (1994) 301.
- [65] А.И.Голохвастов, ОИЯИ 1-89-698, Дубна, 1989.
- [66] J.T.Jones et al., Z.Phys.C 54 (1992) 45.
- [67] N.Schmitz, Int.J.Mod.Phys.A 8 (1993) 1993.
- [68] S.Aid et al., Z.Phys.C 72 (1996) 573.
- [69] R.Szwed, IFD/6/89, Warsaw, 1989.
- [70] M.Planck, Sitzungsber.Acad.Wiss.Berlin, 1914, S.918; М.Планк, Избранные труды, с.329 (см., также, с.292), Наука, 1975.
- [71] А.Зоммерфельд, Термодинамика и стат. физика, ИЛ, 1955.
- [72] М.Борн, Z.Phys. 26 (1924) 379; М.Борн, Размышления и воспоминания физика, с.133, Наука, 1977; М.Джеммер, Эволюция понятий квантовой механики, с.192, Наука, 1985.
- [73] И.Е.Тамм, Собрание трудов, т.1, с.146; т.2, с.311, Наука, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 июня 1998 года.