



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

98-157

P2-98-157

Г.Н.Афанасьев, В.Г.Картавенко

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА,  
РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ В ВЕЩЕСТВЕ

Направлено в журнал «Известия РАН, серия физическая»

14 и 15  
и ссылки [22]

1998

# 1 Введение

Специфическое электромагнитное излучение, возникающее при движении высокоэнергетических электронов в среде, было открыто С.И. Вавиловым и П.А. Черенковым в 1934 году [1]. И.Е. Тамм и И.М. Франк [2] решили задачу об излучении точечного заряда, равномерно движущегося в диэлектрике с постоянной (то есть не зависящей от частоты) электрической проницаемостью  $\epsilon_0$ . Они показали, что такой заряд излучает, если его скорость превышает скорость света в веществе. В отсутствие дисперсии электромагнитные напряженности имеют  $\delta$ -образные особенности на поверхности так называемого черенковского конуса. Внутри этого конуса напряженности электромагнитного поля (ЭМП) убывают на больших расстояниях как  $r^{-2}$  и потому не дают вклад в излучение.

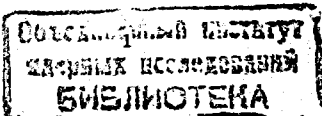
Сообщение об этом удивительном явлении было сделано в 1937 году И.М. Франком на второй Всесоюзной конференции по атомному ядру [3]. Аналогом этого явления в акустике является ударная волна, возникающая при движении тела со сверхзвуковой скоростью в атмосфере. Эта ударная волна имеет форму так называемого конуса Маха, в вершине которого находится движущееся тело. Между прочим, известно, что ударная волна возникает не только при превышении скорости звука  $v_s$ , но и в том случае, когда скорость тела снижается ниже  $v_s$ . В этом случае ударная волна отделяется от движущегося тела и распространяется со скоростью звука (бытовой пример: звуковые хлопки от сверхзвукового самолета). Подобная ситуация имеет место и в электродинамике [4].

Следует упомянуть, что в отсутствие дисперсии ЭМП заряженной частицы, движущейся равномерно в веществе с произвольной скоростью (в том числе, и со скоростью, большей скорости света в веществе), было найдено Хевисайдом в конце прошлого века [5]. Подробно этот вопрос был исследован А.А. Тяпкиным [6]. Ввиду того, что в отсутствие дисперсии электромагнитные напряженности сингулярны на конусе Маха, интегралы от их произведений расходятся. Это, в частности, относится и к потоку энергии (мы имеем в виду вектор излучения Умова - Пойнтинга  $\vec{S} = c(\vec{E} \times \vec{H})/4\pi$ ). Чтобы избежать этой трудности Тамм и Франк сделали Фурье-преобразование компонент ЭМП и интегрировали компоненты напряженностей поля до некоторой граничной частоты  $\omega_0$ .

Цель данного рассмотрения состоит в изучении ЭМП, возникающего при равномерном движении точечного заряда в диэлектрике ( $\mu = 1$ ), свойства которого описываются следующей, зависящей от частоты, электрической проницаемостью:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_f^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1.1)$$

Мы ограничимся классической теорией излучения Вавилова - Черенкова. Предполагается, что равномерное движение частицы в среде поддерживается некоторой внеш-



ней силой, происхождением которой мы не интересуемся. Выражение (1.1) является удобной интерполяцией между статическим ( $\omega = 0$ ,  $\epsilon(\omega) = 1 + \omega_L^2/\omega_0^2$ ) и высокочастотным ( $\omega = \infty$ ,  $\epsilon(\omega) = 1$ ) пределами. Обычно  $\omega_L$  интерпретируется как плазменная частота:  $\omega_L^2 = 4\pi N_e e^2/m$ . Здесь  $N_e$  - число электронов в единице объема вещества,  $m$  и  $e$  - масса электрона и его заряд;  $\omega_0$  - некоторая резонансная частота. Квантовомеханически она интерпретируется как энергия возбуждения нижайшего атомного уровня. Наше последующее изложение не зависит от этой частной интерпретации  $\omega_L$  и  $\omega_0$ .

Выражение (1.1) является стандартной параметризацией электрической проницаемости, описывающей множество оптических явлений [7]. Оно справедливо, когда длина волны ЭМП, излучаемого зарядом, значительно больше расстояния между частицами среды, на которых это ЭМП рассеивается. Следующие оценки [8] показывают, что физический интервал изменения  $\omega$  простирается значительно дальше  $\omega_0$ . Типичные атомные размеры имеют порядок  $a \sim \hbar/mc\alpha$  ( $\alpha = e^2/\hbar c$  - постоянная тонкой структуры). Поэтому условие применимости (1.1) имеет вид  $\lambda = \frac{c}{\omega} \gg a$  или  $\omega \ll \omega_1 = c/a = mc^2\alpha/\hbar \approx 5 \cdot 10^{18} \text{сек}^{-1}$ . Типичные атомные частоты порядка  $\omega_0 \sim mc^2/\hbar a^2 \approx 10^{16} \text{сек}^{-1}$ . Поскольку  $\omega_1 \gg \omega_0$ , то физическая область изменения  $\omega$  простирается далеко за  $\omega_0$ . При  $\omega \gg \omega_0$  имеем  $\epsilon(\omega) \approx 1$ . Это означает, что при таких частотах атомы среды не успевают возбудиться. Экстраполяция (1.1) на все частоты означает, что мы пренебрегаем возбуждением ядерных уровней и дискретной структурой вещества.

Итак, мы рассмотрим следствия, возникающие при равномерном движении точечного заряда в диэлектрике с проницаемостью (1.1). Предполагаем, что это движение поддерживается некоторой внешней силой, происхождением которой мы не интересуемся. Частично это было сделано Э. Ферми [9], который показал, что при таких условиях равномерно движущийся заряд излучает при любой скорости. Он также показал, что потери энергии как функция скорости заряда оказываются существенно меньшими, чем те, которые предсказываются теорией Бора [10].

Однако следующие вопросы остались без ответа:

1. Как электромагнитные напряженности и поток излучаемой энергии распределены в пространстве? В частности, каково их угловое распределение?
2. Как эти величины зависят от скорости заряженной частицы? В частности, каково их отличие при скорости частицы, меньшей и большей скорости света в веществе?

Рассмотрению этих вопросов и посвящена данная работа.

## 2 Необходимые математические сведения

Рассмотрим точечный заряд, движущийся равномерно со скоростью  $v$  вдоль оси  $z$ . Плотности заряда и тока равны

$$\rho(\vec{r}, t) = e\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt), \quad j_z = v\rho.$$

Их фурье-образы равны

$$\rho(\vec{k}, \omega) = \int \rho(\vec{r}, t) \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)] d^3\vec{r} dt = 2\pi e\delta(\omega - \vec{k}v), \quad j_z(\vec{k}, \omega) = v\rho(\vec{k}, \omega). \quad (2.1)$$

Электромагнитные напряженности движущегося заряда удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}, \quad \text{curl } \vec{H} = \frac{1}{c}\dot{\vec{D}} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \quad (2.2)$$

Поскольку рассматриваемая среда - не магнитная, то  $\vec{B} = \vec{H}$ . Второе и третье уравнения Максвелла выполняются автоматически, если положить

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}.$$

Электрическое поле  $\vec{E}$  движущегося заряда приводит к поляризации среды  $\vec{P}(\vec{r}, t)$ , которая вместе с  $\vec{E}$  создает электрическую индукцию  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ . Обычно считается (см., например, [11]), что  $\omega$ -компоненты  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$

$$\vec{P}_\omega = \int e^{-i\omega t} \vec{P}(\vec{r}, t) dt, \quad \vec{E}_\omega = \int e^{-i\omega t} \vec{E}(\vec{r}, t) dt \quad (2.3)$$

связаны соотношением

$$4\pi\vec{P}_\omega = \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \vec{E}_\omega. \quad (2.4)$$

В  $(\vec{k}, \omega)$ -представлении электромагнитные потенциалы равны ([12])

$$\Phi(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{\epsilon} \frac{\rho(\vec{k}, \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon}, \quad A_z(\vec{k}, \omega) = 4\pi\beta \frac{\rho(\vec{k}, \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon}, \quad \beta = v/c. \quad (2.5)$$

Здесь  $\epsilon(\omega)$  - электрическая проницаемость среды. Ее зависимость от частоты выбираем в стандартном виде (1.1). В статическом пределе  $\epsilon(\omega)$  переходит в  $\epsilon_0 = \epsilon(\omega = 0) = 1 + \omega_L^2/\omega_0^2$ . Далее,  $\epsilon(\omega)$  имеет полюса при  $\omega = \pm\omega_0$ .  $\epsilon(\omega)$ , будучи положительной при  $\omega^2 < \omega_0^2$ , изменяется скачком от  $+\infty$  до  $-\infty$  при прохождении точки  $\omega^2 = \omega_0^2$ :  $\epsilon(\omega)$  обращается в нуль при  $\omega^2 = \omega_3^2 = \omega_0^2 + \omega_L^2$  и стремится к 1 при  $\omega \rightarrow \infty$ . Выражение (1.1) для  $\epsilon(\omega)$  отрицательно при  $\omega_0^2 < \omega^2 < \omega_3^2$ . Это приводит к затуханию свободной электромагнитной волны даже при вещественных  $\epsilon(\omega)$  (см., напр., [11, 13]). Очевидно, что  $\epsilon^{-1}(\omega) = 1 - \omega_L^2/(\omega_0^2 - \omega^2)$  имеет нуль при  $\omega^2 = \omega_0^2$  и полюс при  $\omega^2 = \omega_3^2$ .

Условия затухания ЭМП точечного заряда, равномерно движущегося в среде, модифицируются. Оказывается [14], затухание имеет место при  $1 - \beta^2 \epsilon > 0$ . В противном случае ( $1 - \beta^2 \epsilon < 0$ ) затухания нет.

Найдем области, где  $1 - \beta^2 \epsilon > 0$  и  $1 - \beta^2 \epsilon < 0$ .

При  $\beta < \beta_c$  имеем:  $1 - \beta^2 \epsilon > 0$  при  $\omega^2 < \omega_0^2$  и при  $\omega^2 > \omega_0^2$ ;

$1 - \beta^2 \epsilon < 0$  при  $\omega_c^2 < \omega^2 < \omega_0^2$ .

При  $\beta > \beta_c$  получаем:  $1 - \beta^2 \epsilon > 0$  при  $\omega^2 > \omega_0^2$ ;  $1 - \beta^2 \epsilon < 0$  при  $0 < \omega^2 < \omega_0^2$ .

Здесь  $\beta_c = \epsilon_0^{-1/2} = 1/\sqrt{1 + \omega_L^2/\omega_0^2}$ ,  $\omega_c = \omega_0\sqrt{1 - \bar{\epsilon}}$ ,  $\bar{\epsilon} = \beta^2 \gamma^2/\beta_c^2 \gamma_c^2$ ,

$\gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1}$ ,  $\gamma_c^2 = (1 - \beta_c^2)^{-1}$ .

В дальнейшем мы увидим, что  $\beta_c$ , несмотря на независимость от  $\omega$ , будет играть важную роль при описании ЭМП заряда, равномерно движущегося в среде с зависящей от частоты электрической проницаемостью. В статическом пределе ( $\omega \rightarrow 0$ )  $\beta_c$  совпадает со скоростью света в среде.

Легко видеть, что  $\beta_c$  меняется от  $\beta_c = 0$  при  $N \gg 1$  до  $\beta_c = 1$  при  $N = 0$ . Мы будем относить эти предельные случаи к оптически плотной и разреженной средам, соответственно.

Строго говоря, выражение (1.1) справедливо при  $\epsilon_0 \approx 1$  (например, для газов).

В дальнейшем мы будем рассматривать движение заряженных частиц в среде с  $\beta_c = 0.75$ ,  $n = \sqrt{\epsilon_0} = 1/\beta_c = 1.333$ . Оптические свойства такой среды близки к свойствам воды, для которой  $n = 1.334$ . При таком значении показателя преломления  $n$  необходимо использовать формулу Клаузиуса - Мосотти (или Лорентца-Лоренца) ([8,9,11,13]):

$$\epsilon' = \frac{1 + 2\alpha(\omega)/3}{1 - \alpha(\omega)/3} = 1 + \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \alpha(\omega) = \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \omega_0^2 = \omega_0^2 - \omega_L^2/3. \quad (2.6)$$

В этом случае условие затухания ЭМП выглядит следующим образом:  $1 - \beta^2 \epsilon' > 0$ . В противном случае ( $1 - \beta^2 \epsilon' < 0$ ) затухания нет. При  $\omega_0^2 < \omega_L^2/3$  соотношение  $1 - \beta^2 \epsilon' > 0$  всегда выполнено, что приводит к отсутствию излучения равномерно движущимся зарядом.

Пусть теперь  $\omega_0^2 > \omega_L^2/3$ . Тогда, при  $\beta < \beta_c'$  ( $\beta_c'^2 = 1 - \omega_L^2/(\omega_0^2 + 2\omega_L^2/3)$ ), получаем:  $1 - \beta^2 \epsilon' > 0$  как при  $\omega^2 < \omega_c'^2$  ( $\omega_c'^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \gamma^2 \omega_L^2$ ), так и при  $\omega^2 > \omega_0^2$ ;

$1 - \beta^2 \epsilon' < 0$  при  $\omega_c'^2 < \omega^2 < \omega_0^2$ .

С другой стороны, при  $\beta > \beta_c'$ :

$1 - \beta^2 \epsilon' > 0$  при  $\omega^2 > \omega_0^2$  и  $1 - \beta^2 \epsilon' < 0$  при  $0 < \omega^2 < \omega_0^2$ .

Мы видим, что качественное поведение  $\epsilon$  and  $\epsilon'$  почти одно и то же, если мы отождествим  $\beta_c, \omega_0$  и  $\omega_L$  с  $\beta_c', \omega_0'$  и  $\omega_L$ , соответственно и отвлечемся от отсутствия при  $\omega_0^2 < \omega_L^2/3$  решения соответствующего  $1 - \beta^2 \epsilon' < 0$ . Это позволяет ограничиться представлением  $\epsilon$  в виде (1.1). Все последующие выражения будут справедливы для  $\epsilon'$  в виде (2.6) если в них заменить  $\beta_c, \omega_0$  и  $\omega_L$  на  $\beta_c', \omega_0'$  и  $\omega_L$ , соответственно.

В  $\vec{r}, t$ -представлении  $\Phi(\vec{r}, t)$  и  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  имеют вид

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{e}{\pi v} \int \frac{d\omega}{\epsilon} e^{i\omega(t-z/v)} \frac{k dk}{k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \epsilon)} J_0(k\rho).$$

$$A_z(\vec{r}, t) = \frac{e}{\pi c} \int d\omega e^{i\omega(t-z/v)} \frac{k dk}{k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \epsilon)} J_0(k\rho). \quad (2.7)$$

Выполним интегрирование по  $k$ . Для этого мы воспользуемся табличным интегралом [15]

$$\int_0^\infty \frac{k dk}{k^2 + q^2} J_0(k\rho) = K_0(\rho q), \quad (2.8)$$

где в правой части должно быть взято значение квадратного корня, соответствующее его положительной вещественной части.

### 3 Электромагнитные потенциалы и напряженности

Выпишем неисчезающие компоненты электромагнитных потенциалов, напряженностей и индукции:

$$\Phi = \frac{e}{\pi v} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{\epsilon} e^{i\alpha} K_0(k\rho), \quad A_z = \frac{e}{\pi c} \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{i\alpha} K_0(k\rho),$$

$$H_\phi = \beta D_\rho = \frac{e}{\pi c} \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{i\alpha} k K_1(k\rho), \quad E_\rho = \frac{e}{\pi v} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{\epsilon} e^{i\alpha} k K_1(k\rho),$$

$$E_z = -\frac{ie}{\pi c^2} \int_{-\infty}^\infty d\omega \omega (1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon}) e^{i\alpha} K_0(k\rho), \quad D_z = \frac{ie}{\pi v^2} \int_{-\infty}^\infty d\omega \omega (1 - \beta^2 \epsilon) e^{i\alpha} K_0(k\rho). \quad (3.1)$$

Здесь  $\alpha = \omega(t - z/v)$ ,  $k^2 = (1 - \beta^2 \epsilon)\omega^2/v^2$ . Опять-таки,  $k$  в (3.1) означает значение  $\sqrt{k^2}$ , соответствующее  $Re k > 0$ . Эти выражения были получены Э.Ферми [9]. Их недостаток в том, что модифицированные функции Бесселя  $K$  имеют мнимую часть даже при вещественном  $\epsilon$  (при  $1 - \beta^2 \epsilon < 0$ ).

Представим (3.1) в явно вещественной форме (это значительно упрощает вычисления). Для этого необходимо удовлетворить условию  $Re \sqrt{1 - \beta^2 \epsilon} > 0$ . Оно выполнено автоматически, если  $1 - \beta^2 \epsilon > 0$ . В этом случае аргумент  $K_0$  функции равен  $\frac{\omega_L}{v} \sqrt{1 - \beta^2 \epsilon}$ , где под корнем квадратным подразумевается его арифметическое значение.

Пусть теперь  $1 - \beta^2 \epsilon < 0$ . Рассмотрим сначала случай, когда  $\epsilon$  имеет мнимую часть:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i p \omega}, \quad p > 0. \quad (3.2)$$

Положительность  $p$  приводит к тому, что полюса  $\epsilon(\omega)$  лежат только в верхней  $\omega$ -комплексной полуплоскости. Это необходимо, чтобы удовлетворить условию причинности (подробности см., напр., в [16]). Иногда в физической литературе [11, 16] встречается утверждение, что условие причинности выполняется, если полюса  $\omega$  лежат в нижней  $\omega$ -полуплоскости. Это обязано иному определению фурье-преобразования, которое соответствует противоположному знаку  $\omega$  в экспоненциальном множителе в (2.3). Перепишем  $1 - \beta^2\epsilon$  в виде

$$1 - \beta^2\epsilon = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos \phi + i \sin \phi), \quad (3.3)$$

где

$$a = 1 - \beta^2 - \beta^2\omega_L^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}, \quad b = \beta^2\omega_L^2 \frac{\omega p}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + p^2\omega^2},$$

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Теперь извлечем корень квадратный из  $1 - \beta^2\epsilon$ . Положительность  $Re\sqrt{1 - \beta^2\epsilon}$  определяет его однозначно:

$$\sqrt{1 - \beta^2\epsilon} = (a^2 + b^2)^{1/4}(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2}),$$

$$\cos \frac{\phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}})^{1/2}, \quad \sin \frac{\phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{b}{|b|}(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}})^{1/2}. \quad (3.4)$$

Поэтому аргумент  $K$  функций, входящих в (3.1), равен

$$\rho \frac{|\omega|}{v} (a^2 + b^2)^{1/4} (\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2}). \quad (3.5)$$

Хотя подынтегральные выражения в (3.1) - комплексны, интегралы, определяющие электромагнитные потенциалы и напряженности, - вещественны (см. [14]). Это связано с тем, что  $\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega)$ .

Теперь перейдем к пределу  $p \rightarrow 0+$ . Пусть в этом пределе  $1 - \beta^2\epsilon > 0$ . Тогда,  $a > 0$ ,  $b \rightarrow 0$ ,  $\cos \frac{\phi}{2} \rightarrow 1$ ,  $\sin \frac{\phi}{2} \rightarrow 0$  и  $\sqrt{1 - \beta^2\epsilon}$  совпадает со своим арифметическим значением.

Пусть теперь  $1 - \beta^2\epsilon < 0$  при  $p \rightarrow 0$ . Тогда:  $a < 0$ ,  $b \rightarrow 0$ ,  $\cos \frac{\phi}{2} \rightarrow 0$ ,  $\sin \frac{\phi}{2} \rightarrow b/|b|$  и  $\sqrt{1 - \beta^2\epsilon} = i\sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|} \text{sign}(\omega)$  (при этом было принято во внимание, что  $p > 0$ ).

Поэтому  $K$ -функции, входящие в правую часть (3.1), сводятся к

$$K_0(i\rho \frac{|\omega|}{v} \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|}) = -\frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(\rho \frac{|\omega|}{v} \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|}),$$

$$K_1(i\rho \frac{|\omega|}{v} \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|}) = -\frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(\rho \frac{|\omega|}{v} \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|})$$

при  $\omega > 0$  и

$$K_0(-i\rho \frac{|\omega|}{v} \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|}) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(\rho \frac{|\omega|}{v} \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|}),$$

$$K_1(-i\rho \frac{|\omega|}{v} \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|}) = -\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(\rho \frac{|\omega|}{v} \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|})$$

при  $\omega < 0$ .

Теперь мы можем записать электромагнитные потенциалы и напряженности в вещественном виде. При  $\beta < \beta_c$  находим

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{2e}{\pi v} \left( \int_0^{\omega_c} + \int_{\omega_0}^{\infty} \right) \frac{d\omega}{\epsilon} \cos \alpha K_0 + \frac{e}{v} \int_{\omega_c}^{\omega_0} \frac{d\omega}{\epsilon} (\sin \alpha J_0 - \cos \alpha N_0),$$

$$A_z(\vec{r}, t) = \frac{2e}{\pi c} \left( \int_0^{\omega_c} + \int_{\omega_0}^{\infty} \right) d\omega \cos \alpha K_0 + \frac{e}{c} \int_{\omega_c}^{\omega_0} d\omega (\sin \alpha J_0 - \cos \alpha N_0), \quad (3.6)$$

$$H_\phi(\vec{r}, t) = \frac{2e}{\pi cv} \left( \int_0^{\omega_c} + \int_{\omega_0}^{\infty} \right) \omega d\omega \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|} \cos \alpha K_1 + \frac{e}{cv} \int_{\omega_c}^{\omega_0} \omega d\omega \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|} (\sin \alpha J_1 - \cos \alpha N_1),$$

$$E_z = \frac{2e}{\pi c^2} \left( \int_0^{\omega_c} + \int_{\omega_0}^{\infty} \right) \left(1 - \frac{1}{\epsilon\beta^2}\right) \omega d\omega \sin \alpha K_0 - \frac{e}{c^2} \int_{\omega_c}^{\omega_0} \left(1 - \frac{1}{\epsilon\beta^2}\right) \omega d\omega (N_0 \sin \alpha + J_0 \cos \alpha),$$

$$E_\rho = \frac{2e}{\pi v^2} \left( \int_0^{\omega_c} + \int_{\omega_0}^{\infty} \right) d\omega \frac{\omega}{\epsilon} \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|} \cos \alpha K_1 + \frac{e}{v^2} \int_{\omega_c}^{\omega_0} d\omega \frac{\omega}{\epsilon} \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|} (\sin \alpha J_1 - \cos \alpha N_1).$$

С другой стороны, при  $\beta > \beta_c$  получаем:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{2e}{\pi v} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega}{\epsilon} \cos \alpha K_0 + \frac{e}{v} \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{\epsilon} (\sin \alpha J_0 - \cos \alpha N_0),$$

$$A_z(\vec{r}, t) = \frac{2e}{\pi c} \int_{\omega_0}^{\infty} d\omega \cos \alpha K_0 + \frac{e}{c} \int_0^{\omega_0} d\omega (\sin \alpha J_0 - \cos \alpha N_0), \quad (3.7)$$

$$H_\phi(\vec{r}, t) = \frac{2e}{\pi cv} \int_{\omega_0}^{\infty} \omega d\omega \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|} \cos \alpha K_1 + \frac{e}{cv} \int_0^{\omega_0} \omega d\omega \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|} (\sin \alpha J_1 - \cos \alpha N_1),$$

$$E_z = \frac{2e}{\pi c^2} \int_{\omega_0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\epsilon\beta^2}\right) \omega d\omega \sin \alpha K_0 - \frac{e}{c^2} \int_0^{\omega_0} \left(1 - \frac{1}{\epsilon\beta^2}\right) \omega d\omega (N_0 \sin \alpha + J_0 \cos \alpha),$$

$$E_\rho = \frac{2e}{\pi v^2} \int_{\omega_0}^{\infty} d\omega \frac{\omega}{\epsilon} \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|} \cos \alpha K_1 + \frac{e}{v^2} \int_0^{\omega_0} d\omega \frac{\omega}{\epsilon} \sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|} (\sin \alpha J_1 - \cos \alpha N_1).$$

Здесь  $\alpha = \omega(t - z/v)$ . Аргумент всех функций Бесселя равен  $\sqrt{|1 - \beta^2\epsilon|} \rho \omega / v$ .

Отметим, что интегралы, содержащие обычные ( $J$ ,  $N$ ) и модифицированные ( $K$ )

функции Бесселя, берутся по областям пространства, где  $1 - \beta^2 \epsilon < 0$  и  $1 - \beta^2 \epsilon > 0$ , соответственно.

Рассмотрим частные случаи этих выражений.

При  $\omega_L \rightarrow 0$  находим:  $\epsilon \rightarrow 1, \beta_c \rightarrow 1, \omega_c \rightarrow \omega_0$ ,

$$\Phi = \frac{2e}{\pi v} \int_0^\infty d\omega \cos \alpha K_0 \left( \frac{\rho \omega}{v \gamma} \right) = \frac{e}{[(z - vt)^2 + \rho^2 / \gamma^2]^{1/2}}, \quad A_z = \beta \Phi, \quad \gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2},$$

то есть получаем поле заряда, равномерно движущегося в вакууме.

Пусть  $v \rightarrow 0$ . Тогда  $\omega_c = \omega_0$  и

$$\Phi = \frac{2e}{\pi \epsilon_0} \int_0^\infty d\omega \cos \left( \frac{\omega z}{c} \right) K_0 \left( \frac{\rho \omega}{c} \right) = \frac{e}{\epsilon_0 \sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad A_z = 0,$$

то есть получаем поле заряда, покоящегося в среде.

Пусть  $\omega_0 \rightarrow \infty, \omega_L \rightarrow \infty$ , но  $\omega_L / \omega_0$  - конечно. Тогда:

$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2 \gamma^2 \omega_L^2 / \omega_0^2} \rightarrow \infty, \epsilon(\omega) \rightarrow \epsilon_0$  и

$$\Phi = \frac{2e}{\pi v \epsilon_0} \int_0^\infty d\omega \cos \alpha K_0 \left( \frac{\rho \omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2 \epsilon_0} \right) = \frac{e}{\epsilon_0 [(z - vt)^2 + \rho^2 / \gamma_n^2]^{1/2}}, \quad A_z = \beta \epsilon_0 \Phi$$

при  $\beta < \beta_c$  и

$$\Phi = \frac{e}{v \epsilon_0} \int_0^\infty d\omega (\sin \alpha J_0 - \cos \alpha N_0) = \frac{2e}{\epsilon_0 [(z - vt)^2 - \rho^2 / \gamma_n^2]^{1/2}} \Theta(vt - z - \rho / \gamma_n), \quad A_z = \beta \epsilon_0 \Phi$$

при  $\beta > \beta_c$ . Эдесь  $\gamma_n = 1 / \sqrt{1 - \beta_n^2}, \beta_n = v / c_n, c_n = c / \sqrt{\epsilon_0}$ .

В итоге получаем поле заряда, равномерно движущегося в среде с постоянной электрической проницаемостью  $\epsilon = \epsilon_0$ . Подчеркнем, что интегрирование по всем  $\omega$  необходимо, чтобы получить правильные частные случаи и гарантировать обратимость фурье-преобразования.

Распределения напряженности магнитного поля  $H_\phi$  в зависимости от  $z - vt$  на поверхности цилиндра  $C_\rho$  радиуса  $\rho$  (рис. 1) показаны на рис. 2-4. При пренебрежении зависимостью  $\epsilon$  от  $\omega$  ( $\epsilon(\omega) = \epsilon_0$ ) ЭМП при  $\beta > \beta_c$  отлично от нуля только внутри черенковского конуса с углом раствора  $2\theta_c, \sin \theta_c = \beta_c / \beta$  (рис. 1). Это означает, что на поверхности  $C_\rho$  ЭМП поле равно нулю при  $z_c < z < \infty, z_c = -\rho \sqrt{\frac{\beta^2}{\beta_c^2} - 1}$ . Что следует из этих рисунков? При малой скорости заряда ( $\beta \leq 0.4$ ) магнитное поле совпадает с магнитным полем заряда, движущегося равномерно в среде с постоянной проницаемостью  $\epsilon = \epsilon_0$ . При  $\beta$  чуть меньше  $\beta_c$  ( $\beta \approx 0.6$ ) осцилляции появляются при отрицательных значениях  $z$ . Их амплитуда увеличивается с ростом  $\beta$ . При  $\beta \approx \beta_c$  виден большой пик при  $z = 0$  и пики с меньшей амплитудой в области  $z < 0$ . При  $\beta > \beta_c$  имеется большой пик при  $z = z_c$  (то есть в том месте, где в отсутствие

дисперсии сингулярный черенковский конус пересекает  $C_\rho$ ) и меньшие в области  $z < z_c$ . Период этих осцилляций приближенно равен периоду осцилляций поляризации среды  $T_z \approx 2\pi v \beta_c / \omega_0$ . Рис. 2-4 показывают как магнитное поле распределено на поверхности цилиндра  $C_\rho$  в фиксированный момент времени  $t$ . Поскольку в рассматриваемой задаче все электромагнитные величины зависят от  $z$  и  $t$  посредством  $z - vt$ , то в данной точке поверхности цилиндра должна наблюдаться периодическая зависимость от времени с периодом  $2\pi \beta_c / \omega_0$ . Очевидно, что несмотря на зависимость  $\epsilon$  от  $\omega$ , критическая скорость  $\beta_c = 1 / \sqrt{\epsilon_0}$  все же сохраняет физический смысл. В самом деле, при  $\beta > \beta_c$  электромагнитное поле очень мало вне конуса Маха (это соответствует области  $z > z_c$  на поверхности  $C_\rho$ ) и осциллирует внутри конуса Маха (область  $z < z_c$  на поверхности  $C_\rho$ ). При  $\beta < \beta_c$  конус Маха исчезает. При этом ЭМП значительно меньше, чем при  $\beta < \beta_c$ .

Поведение магнитного поля представленное на рис. 2-4 можно сравнить с его неосциллирующим поведением для не зависящей от частоты проницаемости  $\epsilon = \epsilon_0$ :

$$H_\phi = \frac{e \beta \rho (\beta^2 \epsilon_0 - 1)}{[(z - vt)^2 - \rho^2 (\beta^2 \epsilon_0 - 1)]^{3/2}} \Theta(vt - z - \rho / \gamma_n) + \frac{e \beta}{\gamma_n} \frac{\delta(vt - z - \rho / \gamma_n)}{[(z - vt)^2 - \rho^2 (\beta^2 \epsilon_0 - 1)]^{1/2}}.$$

Обратимся снова к выражениям (3.6) and (3.7). Фурье образы  $\Phi$  и  $\vec{E}$  имеют полюс при  $\omega = \omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}$ . Это приводит к расходимости интегралов определяющих  $\Phi$  и  $\vec{E}$ . К счастью, оказывается, что только их нерасходящиеся части (содержащие обычные функции Бесселя  $J_\mu$  и  $N_\mu$  дают вклад в излучение (см. следующий раздел). Расходящиеся части  $\Phi$  и  $\vec{E}$ , содержащие модифицированные функции Бесселя  $K_\mu$ , описывают электромагнитное поле переносимое движущимся зарядом с собой. Они становятся конечными для комплексной электрической проницаемости (3.2) (см. [14]).

## 4 Поток энергии и число фотонов

Вычислим теперь поток энергии на единицу длины поверхности цилиндра  $C_\rho$  (рис. 1) за все время движения заряда. Он равен

$$W_\rho = 2\pi \rho \int_{-\infty}^{+\infty} S_\rho dt = \frac{2\pi \rho}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\rho dz, \quad S_\rho = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})_\rho = -\frac{c}{4\pi} E_z H_\phi. \quad (4.1)$$

Подставляя сюда  $E_z$  и  $H_\phi$  из (3.6) и (3.7) и принимая во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \sin \omega t \cos \omega' t = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt \sin \omega t \sin \omega' t = \pi [\delta(\omega - \omega') - \delta(\omega + \omega')],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \cos \omega t \cos \omega' t = \pi [\delta(\omega - \omega') + \delta(\omega + \omega')],$$

получаем потери энергии на единицу длины

$$W_p = \frac{e^2}{c^2} \int_{\beta^2 \epsilon > 1} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\epsilon \beta^2}\right). \quad (4.2)$$

Это выражение было получено И. Таммом и И. Франком [2]. Подставляя в него  $\epsilon(\omega)$ , определенное соотношением (1.1), находим

$$W_p = \frac{e^2}{c^2} \int_{\omega_c}^{\omega_0} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\epsilon \beta^2}\right) = -\frac{e^2 \omega_0^2}{2c^2 \beta_c^2 \gamma_c^2} \left[1 + \frac{1}{\beta^2} \ln(1 - \beta^2)\right] \quad (4.3)$$

при  $\beta < \beta_c$  и

$$W_p = \frac{e^2}{c^2} \int_0^{\omega_0} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\epsilon \beta^2}\right) = \frac{e^2 \omega_0^2}{2c^2} \left[-\frac{1}{\beta^2 \gamma^2} + \frac{1}{\beta^2 \beta_c^2 \gamma_c^2} \ln(\gamma_c^2)\right] \quad (4.4)$$

при  $\beta > \beta_c$ . Подобные же выражения были получены Э. Ферми [9]. Справедливость (4.2) также подтверждается результатами Штернхаймера [17] (чьи уравнения переходят в (4.2) в пределе  $p \rightarrow 0$ ) и Гинзбурга [18]. Точно те же выражения (4.2)-(4.4) получаются, если для комплексного  $\epsilon(\omega)$ , определенного соотношением (3.1), вычислить напряженности и радиальный поток и затем перейти к пределу  $p \rightarrow 0$  [14].

Отметим, что только те члены в (3.6) и (3.7), которые содержат обычные функции Бесселя ( $J_\mu$  и  $N_\mu$ ) и соответствуют условию  $1 - \beta^2 \epsilon < 0$  отсутствия затухания, дают вклад в радиальный поток энергии за все время движения заряда. Это позволяет избежать трудностей, связанных с полюсом  $\epsilon^{-1}$  (при  $\omega = \omega_3$ ), который появляется только в членах, содержащих модифицированные функции Бесселя в области затухания, где  $1 - \beta^2 \epsilon > 0$ .

При  $\beta \rightarrow 0$  потери энергии  $W_p$  стремятся к 0, тогда как при  $\beta \rightarrow 1$  (именно этот предел был рассмотрен Таммом и Франком [2]), они стремятся к конечной величине  $\frac{e^2 \omega_0^2}{2c^2 \beta_c^2 \gamma_c^2} \ln(\gamma_c^2)$ .

На рис. 5 представлена безразмерная величина  $F = W/(e^2 \omega_0^2 / c^2)$  как функция скорости заряда  $\beta$ . Цифры при кривых означают  $\beta_c$ . Вертикальные линии со стрелками рассекают каждую кривую на две части, соответствующие потерям энергии со скоростями  $\beta < \beta_c$  и  $\beta > \beta_c$  и лежащие слева и справа от вертикальной линии. Мы видим, что заряд, равномерно движущийся в среде с электрической проницаемостью (1.1), излучает при любой скорости.

Безразмерные спектральные распределения  $f(\omega) = w(\omega)/(e^2 \omega_0 / c^2)$  потерь энергии  $W = \int_0^{\omega_0} w(\omega) d\omega$  показаны на рис. 6. Числа при кривых означают  $\beta$ . Видно, что при  $\beta > \beta_c$  в потери энергии вносят вклад все  $\omega$  из интервала  $0 < \omega < \omega_0$ . При  $\beta < \beta_c$  область допустимых  $\omega$  сужается:  $\omega_c < \omega < \omega_0$ .

Полное число фотонов на единицу длины, испущенных за все время движения заряда, равно

$$N = \frac{e^2}{\hbar c^2} \int_{\omega_c}^{\omega_0} d\omega \left(1 - \frac{1}{\epsilon \beta^2}\right) = \frac{e^2}{\hbar c^2} \left[\frac{\omega_c - \omega_0}{\beta^2 \gamma^2} + \frac{\omega_L^2}{2\beta^2 \omega_3} \ln\left(\frac{\omega_3 + \omega_0}{\omega_3 - \omega_0} \frac{\omega_3 - \omega_c}{\omega_3 + \omega_c}\right)\right]$$

при  $\beta < \beta_c$ , и

$$N = \frac{e^2}{\hbar c^2} \int_0^{\omega_0} d\omega \left(1 - \frac{1}{\epsilon \beta^2}\right) = \frac{e^2}{\hbar c^2} \left[-\frac{\omega_0}{\beta^2 \gamma^2} + \frac{\omega_L^2}{2\beta^2 \omega_3} \ln\left(\frac{\omega_3 + \omega_0}{\omega_3 - \omega_0}\right)\right]$$

при  $\beta > \beta_c$ . Видно, что  $N$  растет от 0 при  $\beta = 0$  до

$$N = \frac{e^2}{\hbar c^2} \frac{\omega_L^2}{2\beta^2 \omega_3} \ln\left(\frac{\omega_3 + \omega_0}{\omega_3 - \omega_0}\right)$$

при  $\beta = 1$ . На рис. 7 изображена безразмерная величина  $N/(e^2 \omega_0 / \hbar c^2)$  как функция скорости заряда  $\beta$ . Числа при кривых означают  $\beta_c$ . Вертикальные линии со стрелками рассекают каждую кривую на две части, соответствующие числу фотонов, испущенных зарядом со скоростями  $\beta < \beta_c$  и  $\beta > \beta_c$ , и лежащие слева и справа от вертикальной линии. Мы видим, что заряд, равномерно движущийся в среде с электрической проницаемостью (1.1), испускает фотоны при любой скорости.

Спектральное распределение  $n(\omega)$  числа испущенных фотонов на единицу длины ( $N = \int_0^{\omega_0} n(\omega) d\omega$ ) равно

$$n(\omega) = \frac{e^2}{\hbar c^2} (1 - 1/\epsilon \beta^2).$$

При  $\beta < \beta_c$ ,  $n(\omega)$  меняется от 0 при  $\omega = \omega_c$  до  $n(\omega) = e^2 / \hbar c^2$  при  $\omega = \omega_0$ . При  $\beta > \beta_c$ ,  $n(\omega)$  изменяется от  $\frac{e^2}{\hbar c^2} (1 - \beta_c^2 / \beta^2)$  при  $\omega = \omega_c$  до  $e^2 / \hbar c^2$  при  $\omega = \omega_0$ .

Безразмерные спектральные распределения  $n(\omega)/(e^2 / \hbar c^2)$  числа фотонов показаны на рис. 8. Число при данной кривой означает  $\beta$ . Видно, что при  $\beta > \beta_c$  все  $\omega$  из интервала  $0 < \omega < \omega_0$  дают вклад в число испущенных фотонов. При  $\beta < \beta_c$  область допустимых  $\omega$  уменьшается:  $\omega_c < \omega < \omega_0$ , то есть только высокоэнергетические фотоны дают вклад.

До сих пор мы вычисляли полные потери энергии (то есть за все время движения) на единицу длины цилиндрической поверхности. Возникает вопрос: как излученная энергия распределена в пространстве в данный момент времени? Распределения радиального потока  $\sigma_p = 2\pi\rho S_p$  на поверхности цилиндра  $C_p$  радиуса  $\rho$  в зависимости от  $z$  показаны на рис. 9 и 10. Видно, что, несмотря на зависимость  $\epsilon$  от  $\omega$ , критическая скорость  $\beta_c = 1/\sqrt{\epsilon_0}$  все еще сохраняет физический смысл. В самом деле, при  $\beta > \beta_c$  поток электромагнитной энергии очень мал вне конуса Маха (что соответствует области  $z > z_c$  на поверхности  $C_p$ ) и осциллирует внутри конуса Маха (это

соответствует области  $z < z_c$  на поверхности цилиндра). При  $\beta < \beta_c$  конус Маха исчезает, а поток электромагнитной энергии в радиальном направлении уменьшается. Само распределение интенсивности расплывается, при этом максимум интенсивности излучения находится за зарядом на достаточно большом удалении от него. Это показано на рис. 11 ( $\beta = 0.6$ ) и рис. 12 ( $\beta = 0.4$ ). Хотя эти распределения выглядят сплошными, они состоят из множества пиков. Это иллюстрирует рис. 13, на котором представлено распределение рис. 12, но на малом  $z$ -интервале.

Чтобы зарегистрировать  $S_p$  компоненту  $\vec{S}$ , необходимо детектор поместить в тонкий коллиматор, направленный перпендикулярно оси движения заряда. Коллиматор должен быть непроницаем для  $\gamma$ -квантов с направлениями, отличными от радиального. Из рис. 9-13 следует, что в фиксированной точке на поверхности цилиндра  $C_p$  должны наблюдаться быстрые осцилляции радиальной интенсивности в зависимости от времени (поскольку в рассматриваемом случае все физические величины и, в частности,  $S_p$  зависят от  $t$  и  $z$  посредством  $z - vt$ ).

Возникает вопрос, почему эти осцилляции до сих пор не были наблюдаемы?

Из рис. 9, на котором представлено распределение интенсивности для  $\beta = 0.99$ ,  $\beta_c = 0.8$ , следует, что имеется примерно 20 осцилляций в интервале  $-100 < z < 0$ , где  $z$  выражено в единицах  $c/\omega_0$ . Типичное значение  $\omega_0$ , взятое из книги И.М. Франка [19], примерно равно  $\omega_0 \approx 6 \cdot 10^{15} \text{сек}^{-1}$ . Это дает  $c/\omega_0 \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{см}$ . Мы видим, что упомянутый интервал по порядку равен  $30 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{см} \approx 10^{-4} \text{см}$ . Быстро движущийся заряд ( $v \approx c$ ) преодолевает это расстояние за время  $10^{-4} \cdot c^{-1} \text{сек} \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{сек}$ . Поэтому 20 осцилляций, показанных на рис. 9 едва ли могут быть в настоящее время разрешены экспериментально.

Обратимся к экспериментам, обсуждаемым в последнее время в физической литературе [20-22]. В них высокоэнергетические электроны двигались в газе с почти постоянной энергией. Измерялась интенсивность излучения как функция давления газа  $P$ , которое связано с плотностью газа  $N_g$  хорошо известным термодинамическим соотношением:  $PV = kN_gT$ . Здесь  $V$  - объем газа,  $T$  - его температура,  $k$  - постоянная Больцмана. Величины  $N_c$ ,  $\omega_L^2$  и  $\beta_c$ , введенные в разделах 1 и 2, связаны с  $N_g$  следующим образом:

$$N_c = N_g \cdot Z, \quad \omega_L^2 = 4\pi N_c e^2 / m \quad \beta_c^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega_L^2},$$

где  $Z$  - атомный номер газа.

Пусть давление газа, при котором  $\beta_c = \beta$ , равно  $p_c$ . В упомянутых экспериментах наблюдалось резкое уменьшение интенсивности излучения при давлении газа  $p \approx p_c/100$ . Чтобы выяснить причину этого явления, обратимся к соотношениям (4.3) и (4.4), которые при заданном  $\beta$  определяют потери энергии на единице длины в зависимости от критической скорости  $\beta_c$ . Для определенности примем, что заряд

в газе движется со скоростью  $\beta = 0.999$ , близкой к скорости света в вакууме. Из (4.3) и (4.4) следует, что при изменении  $\beta_c$  от 0.99 до 0.9999 полная интенсивность излучения падает примерно в 100 раз. Соответствующие распределения радиального потока энергии на поверхности цилиндра  $C_p$  показаны на рис. 14 и 15. Видно, что интенсивность в максимуме распределения интенсивности примерно в 1000 раз меньше при  $\beta_c = 0.9999$ , чем при  $\beta_c = 0.99$ . Кроме того, распределение интенсивности очень узкое при  $\beta_c = 0.99$  и довольно широкое при  $\beta_c = 0.9999$ . Физическая причина падения интенсивности при  $\beta_c > \beta$  обязана увеличению области, в которой электромагнитное излучение равномерно движущегося заряда затухает.

## 5 Заключение

Перечислим вкратце основные результаты, полученные в данной работе:

1. Показано, что точечный заряд, равномерно движущийся в диэлектрике, описываемом стандартной электрической проницаемостью (1.1), излучает при любой скорости. Характер электромагнитного излучения существенно различается при скорости частицы  $v$ , большей и меньшей некоторой критической скорости  $v_c$ , которая зависит от свойств среды и не зависит от частоты (несмотря на учет дисперсии). При  $v > v_c$  поток излучения максимален в той области, где в отсутствие дисперсии находится черенковский сингулярный конус излучения. При  $v < v_c$  поток излучения максимален позади заряда на достаточно большом удалении от него и значительно меньше, чем при  $v > v_c$ .
2. Электромагнитное излучение заряженной частицы, равномерно движущейся в диэлектрике, состоит из множества осцилляций, которые должны наблюдаться экспериментально. Указаны причины их ненаблюдения.
3. Мы подтверждаем результаты экспериментов по черенковскому излучению, обсуждаемых в последнее время в физической литературе ([20-22]) и указывающих на наличие излучения ниже черенковского порога.

Авторы благодарны проф. Зрелову В.П. и проф. Тяпкину А.А. за интерес к работе и полезные обсуждения.



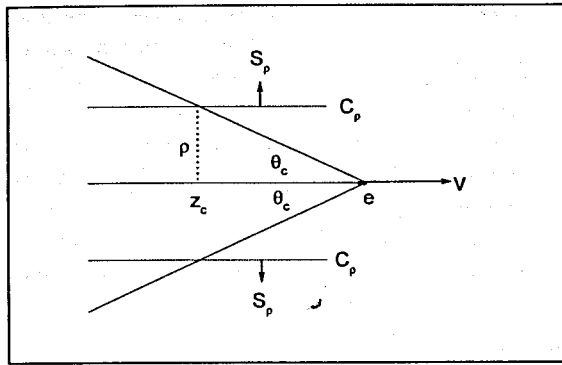


Рис. 1: Схематическое изображение черенковского конуса в отсутствие дисперсии. Вне конуса электромагнитное поле равно нулю. Поле излучения сосредоточено на поверхности конуса, электромагнитное поле внутри конуса не дает вклада в излучение. На поверхности цилиндра  $C_p$  электромагнитное поле равно нулю при  $z > z_c$ ;  $S_p$  означает поток электромагнитной энергии в радиальном направлении через поверхность цилиндра.

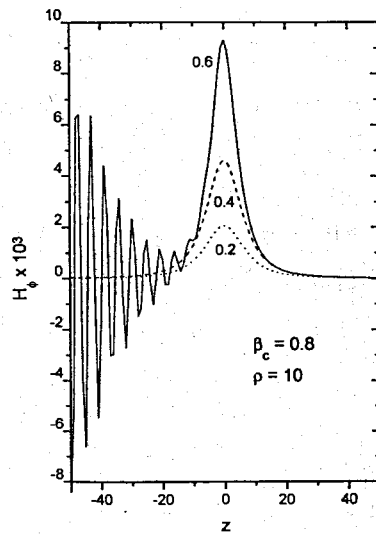


Рис. 2: Распределение напряженности магнитного поля на поверхности цилиндра  $C_p$ . Число при данной кривой означает  $\beta = v/c$ ;  $z$  и  $H_\phi$  выражены в единицах  $c/\omega_0$  и  $e\omega_0^2/c^2$ , соответственно.

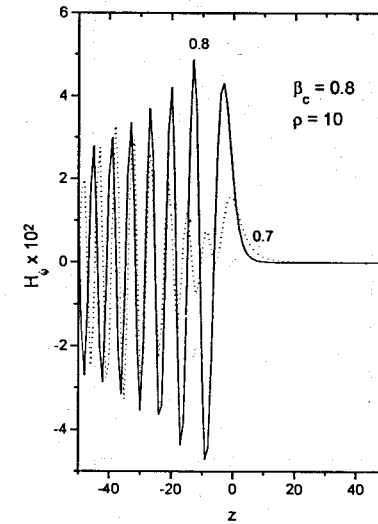


Рис. 3: То же, что на рис. 2, но для  $\beta = 0.7$  и  $0.8$ .

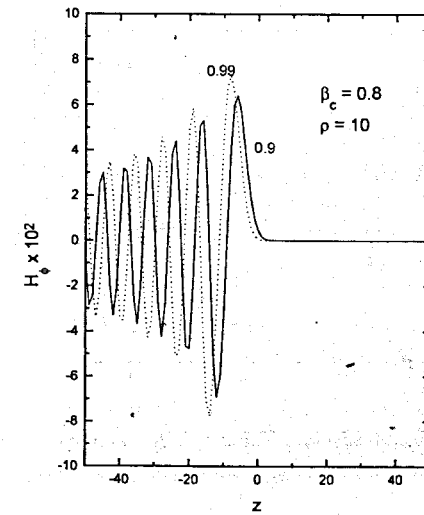


Рис. 4: То же, что на рис. 2, но для  $\beta = 0.9$  и  $0.99$ .

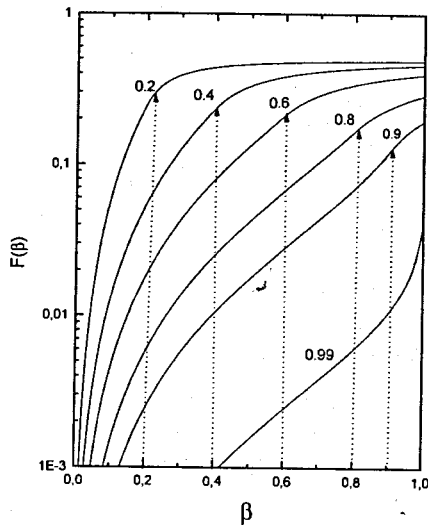


Рис. 5: Потери энергии в радиальном направлении на единицу длины (в единицах  $e^2\omega_0^2/c^2$ ) в зависимости от  $\beta = v/c$ . Число при данной кривой означает критическую скорость  $\beta_c$ .

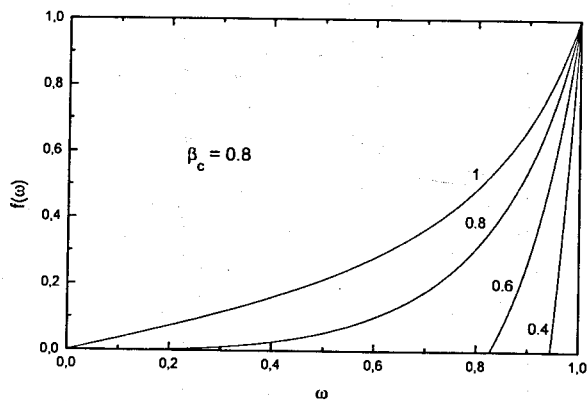


Рис. 6: Спектральное распределение радиальных потерь энергии (в единицах  $e^2\omega_0/c^2$ );  $\omega$  дано в единицах  $\omega_0$ . Число при данной кривой означает  $\beta = v/c$ .

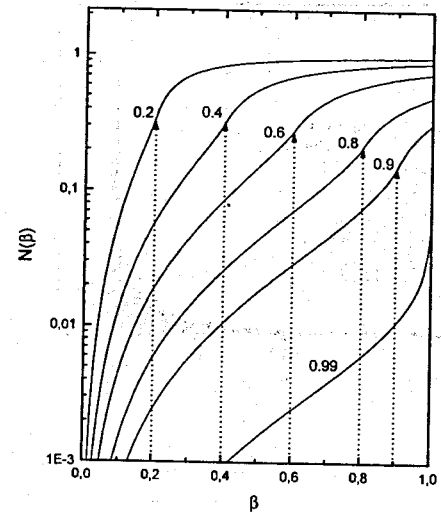


Рис. 7: Число  $\gamma$  квантов, испущенных в радиальном направлении на единицу длины (в единицах  $e^2\omega_0/\hbar c^2$ ) в зависимости от  $\beta = v/c$ . Число при данной кривой означает критическую скорость  $\beta_c$ .

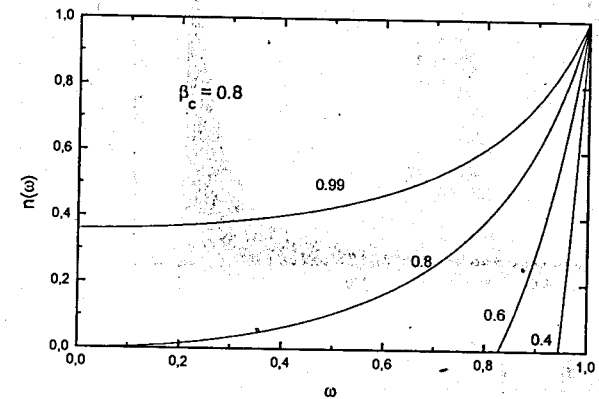


Рис. 8: Спектральное распределение испущенных  $\gamma$ -квантов (в единицах  $e^2/\hbar c^2$ );  $\omega$  дано в единицах  $\omega_0$ . Число при данной кривой означает  $\beta = v/c$ .

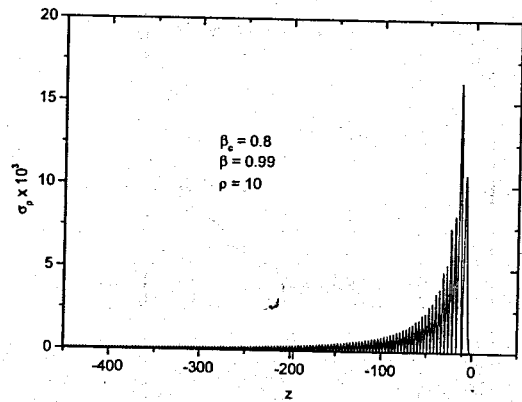


Figure 9.

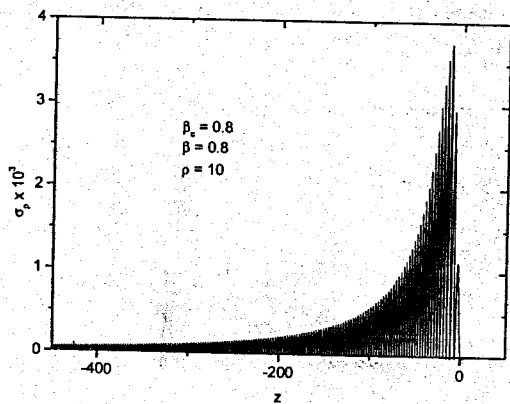


Figure 10.

Рис. 9: Распределение радиального электромагнитного потока энергии (в единицах  $\epsilon^2 \omega_0^3 / c^3$ ) на поверхности цилиндра  $C_\rho$  при  $\beta_c = 0.99$ ;  $z$  в единицах  $c/\omega_0$ . Видно, что основной вклад вносят малые отрицательные значения  $z$ . Рис. 10: То же, что на рис. 9, но для  $\beta = 0.8$ . Видно, что радиальный поток энергии распределен на большем интервале  $z$ .

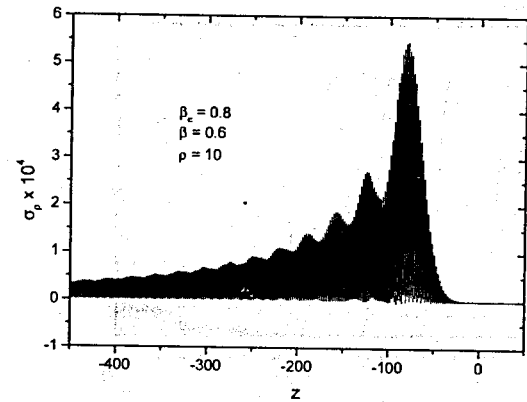


Рис. 11: То же, что на рис. 9, но для  $\beta = 0.6$ . Видно, что распределение радиального потока энергии простирается на большем интервале  $z$  и имеет максимум в области  $z = -100$ .

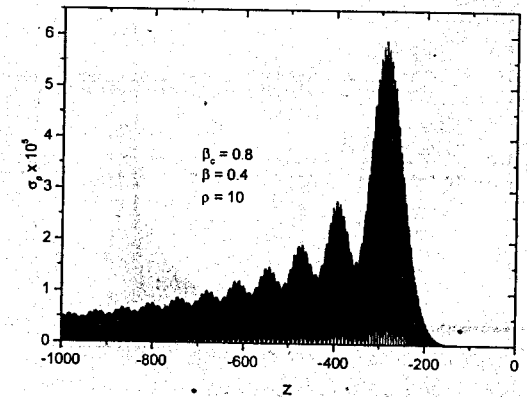


Рис. 12: То же, что на рис. 9, но для  $\beta = 0.4$ . Видно, что распределение радиального потока энергии простирается еще на большем интервале  $z$ , чем на рис. 11 и имеет максимум в области  $z = -300$ .

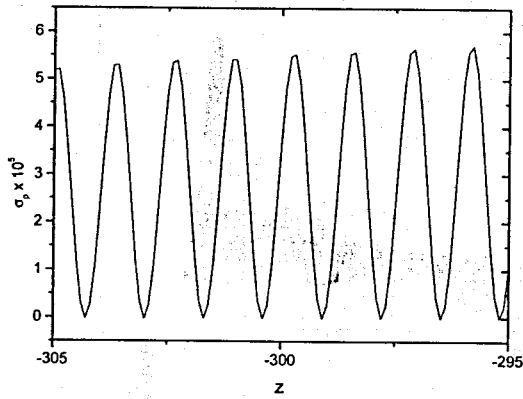


Рис. 13: Тонкая структура радиального потока энергии, изображенного на рис. 12.

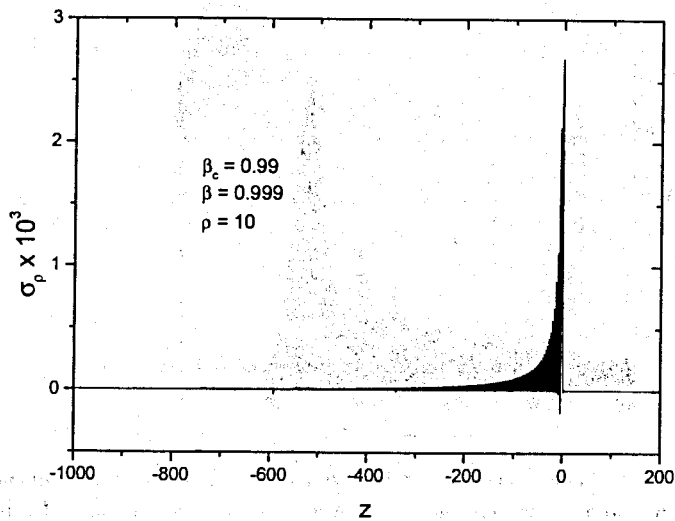


Рис. 14: При скорости заряженной частицы  $\beta$ , чуть меньшей скорости света в вакууме и чуть большей критической скорости  $\beta_c$ , распределение радиального потока энергии на поверхности цилиндра  $C_p$  имеет резкий максимум в том месте, где в отсутствие дисперсии сингулярный черенковский конус перекает  $C_p$ .

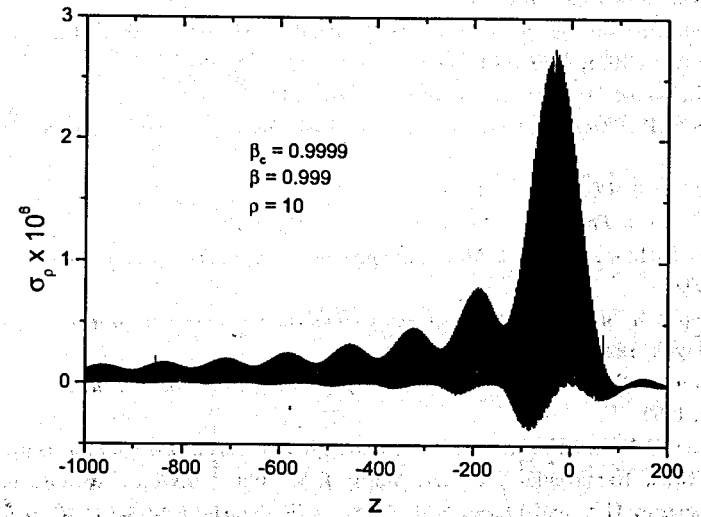


Рис. 15: При скорости заряженной частицы  $\beta$ , чуть меньшей скорости света в веществе ( $= \beta_c$ ), которая, в свою очередь, чуть меньше скорости света в вакууме, распределение радиального потока энергии расплывается вдоль оси движения заряженной частицы. При этом амплитуда в максимуме излучения на три порядка меньше, чем на рис. 14. Этот факт имеет отношение к экспериментам, обсуждаемым в последнее время в физической литературе ([20-22]).

# Литература

1. Черенков П.А., 1934, *ДАН СССР*, 2, 451.
2. Тамм И.Е., Франк И.М., 1937, *ДАН СССР*, 14, 107.
3. Тамм И.Е., Франк И.М., Черенков П.Ф., 1938, *Изв. АН СССР*, No 1-2, 29.
4. Afanasiev G.N., Beshtoev Kh.M. and Stepanovsky Yu.P., 1996, *Helv. Phys. Acta*, 2, 111; Afanasiev G.N., Eliseev S.M. and Stepanovsky Yu.P., 1998, *Proc. Roy. Soc. London, Series A*, 454, No 1972, 1049.
5. Heaviside O., 1888, *Electrician*, Nov. 23, 83.
- Heaviside O., 1889, *Phil. Mag.*, 27, 324.
- Heaviside O., *Electromagnetic Theory*, vol. 3. London, The Electrician, 1912.
6. Тяпкин А.А., 1974, *УФН*, 112, 731.
7. Борн М., Вольф Э., 1975, *Принципы оптики*, (М., Наука).
8. Рязанов М.И., *Электродинамика конденсированного состояния*, Москва, Наука, 1984.
9. Fermi E., 1940, *Phys. Rev.*, 57, 485.
10. Bohr N., 1913, *Phil. Mag.*, 25, 10; 1915, *Phil. Mag.*, 30, 581.
11. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М., *Электродинамика сплошных сред*, Москва, Физматгиз, 1992.
12. Ахизер А.И. и Шульга Н.Ф., *Электродинамика высоких энергий в веществе*, Москва, Наука, 1993.
13. Brillouin L., *Wave Propagation and Group Velocity*, New York and London, Academic Press, 1960.
14. Afanasiev G.N. and Kartavenko V.G., 1997, *JINR Preprint*, E4-97-393, Dubna; Afanasiev G.N., Kartavenko V.G. and Magar E.N., 1998, *JINR Preprint*, E2-98-98, Dubna; Afanasiev G.N. and Eliseev S.M., 1998, *JINR Preprint*, E2-98-143, Dubna.
15. Градштейн И.С. и Рыжик И.М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва, Физматгиз, 1965.
16. Мигдал А.Б., *Качественные методы в квантовой теории*, Москва, Наука, 1975.
17. Sternheimer R.M., 1953, *Phys. Rev.*, 912, 256.
18. Гинзбург В.Л., 1996, *УФН*, No 10, 1033.
19. Франк И.М., *Излучение Вавилова-Черенкова*, Москва, Наука, 1988.
20. Ружичка Я. и Зрелов В.П., 1992, *Препринт ОИЯИ*, P4-92-233, Дубна.
21. Ружичка Я., 1993, *Теоретические и экспериментальные исследования эффекта Вавилова-Черенкова*, Диссертация дфмн, Дубна.
22. Зрелов В.П., Ружичка Я. и Тяпкин А.А., 1998, *Предчеренковское излучение как явление "светового барьера"*, *Краткие сообщения ОИЯИ*, 1[87]-98, 10.

Рукопись поступила в издательский отдел  
4 июня 1998 года.