ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2-98-108

А.П.Нерсесян

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ЧАСТИЦ С ОБОБЩЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

1998

1 Введение

Как известно, кривая в D-мерном пространстве определяется $D-1$ репараметризационными инвариантами (внешними кривизнами) $\tilde{k}_1, ..., \tilde{k}_{D-1}$, являющимися функциями натурального параметра кривой $\tilde{s}$ (см., например, [1]). Поэтому репараметризационно-инвариантное действие можно задать лагранжианом, являющимся функцией внешних кривизн мировой линии:

$$S = \int F(\tilde{k}_1, ..., \tilde{k}_N) d\tilde{s}, \quad 0 \leq N \leq D-1. \tag{1.1}$$

Такие системы мы будем называть моделями частиц с обобщенной жесткостью.

Механические лагранжианы, зависящие от первой и второй кривизн мировой линии, начали относительно интенсивно исследоваться в конце восьмидесятых годов как игрушечные модели жестких струн и $(2+1)$-мерных теорий поля с членом Черна-Саймона [2]. Вскоре стало ясно, в основном благодаря работам М.Плющая, что такие системы представляют самостоятельный интерес, прежде всего в контексте спиновых частиц. Так, при $D = (2+1)$, $F = c_0 + c_1\tilde{k}_1 + c_2\tilde{k}_2$, $c_0 \neq 0$ им отвечает массивный релятивистский анион [3], при $D = (3+1)$, $F = c_0 + c_1\tilde{k}_1$, $c_0 \neq 0$– массивный релятивистский бозон [4], а при $D = (3+1)$, $F = c\tilde{k}_1$– безмассовая частица произвольной (целой и полуцелой) спиральности [5]. Заметим, что при $F = c_0 + k_1^2$ мы имеем эффективное действие релятивистского кинка в поле солитона [6].

Недавно Э.Рамос и Ж.Рока обнаружили, что система с $F = c\tilde{k}_1$ обладает калибровочной W_3 симметрией [7]. Они также показали непрямыми аргументами, что система с лагранжианом $F = c\tilde{k}_N$ обладает $N+1$ калибровочной симметрией, образующей, предположительно, W_{N+2} алгебру [8].

Какие (изо)спиновые частицы описываются моделями с обобщенной жесткостью?

Какими калибровочными W симметриями могут обладать эти модели ?

Ответ на эти вопросы предполагает знание размерности и структуры фазовых пространств рассматриваемых моделей; генераторов калибровочных симметрий; их последующее квантование.

Для этого прежде всего требуется гамильтонова формулировка систем (1.1). Заметим, что лагранжианы моделей частиц с обобщенной жесткостью зависят от производных $(N+1)$-го порядка, так как внешние кривизны определяются выражениями

$$\tilde{k}_I(\tilde{s}) = \frac{\sqrt{\det \hat{g}_{I+1} \det \hat{g}_{I-1}}}{\det \hat{g}_I}, \qquad (g_I)_{ij} \equiv \mathbf{x}_{(i)}\mathbf{x}_{(j)}, \quad i,j = 1, \ldots, I,$$

где $\mathbf{x}_{(i)} \equiv d^i\mathbf{x}(\tilde{s})/(d\tilde{s})^i$.

Потому вначале нужно заменить исходный лагранжиан эквивалентным лагранжианом второго (первого) порядка и лишь после этого перейти к гамильтонову формализму в $2D(N+1)$- мерном фазовом пространстве.

Однако при переходе к гамильтонову формализму большинством авторов игнорируются инвариантные свойства лагранжианов, определяемые их зависимостью от внешних кривизн. В результате даже построение системы первичных связей предполагает проведение утомительных бесструктурных пребразований. Так, в уже упомянутой работе [8] удалось построить полную систему связей лишь для $F = c\tilde{k}_2$, причем существенно нелинейную.

В представляемой работе предлагается более геометричный способ построения гамильтонова формализма для моделей частиц с обобщенной жесткостью, основанный на формулах Френе для подвижного репера, определяющих внешние кривизны.

Полученная таким образом гамильтонова система формулируется в терминах координат исходного пространства $\mathbf{x}$, компонент подвижного репера $\mathbf{e}_i$ и сопряженных им импульсов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_i$, где $i = 1, \ldots, N$. Лагранжевы множители при первичных связях имеют смысл внешних кривизн мировой линии.

Мы продемонстрируем эффективность предложенной нами формулировки, построив полные наборы связей и гамильтонианы для моделей со следующими лагранжианами:

а) $F = \frac{1}{2}\sum_i^N b_i\tilde{k}_i^2 + \sum_{i=1} c_i\tilde{k}_i + c_0, \quad b_1 b_2 \ldots b_N \neq 0$. Эта система характеризуется наименьшим вырождением и отсутствием вторичных связей.

б) $F = c\tilde{k}_N, \forall D, N < D$. Система характеризуется максимальным (при данном N) вырождением и $N+1$ калибровочной степенью свободы. Все возникающие в ней связи квадратичны.

Мы покажем, что системы с лагранжианами, линейно зависящими от внешних кривизн, обладают максимально возможным набором (квадратичных) первичных связей. Наличие в лагранжиане кривизн k_a, $a < N$, существенно определяет набор вторичных связей и уменьшает калибровочную инвариантность лагранжиана. Поэтому мы приводим для иллюстрации полные наборы связей для хорошо изученных моделей с лагранжианами $F = c_0 + c_1\tilde{k}_1$ и $F = c_0 + c_1\tilde{k}_1 + c_2\tilde{k}_2$.

Везде по тексту мы полагаем для простоты сигнатуру пространства $\mathbb{R}^D$ евклидовой, что не должно привести к недоразумениям при переходе к псевдоевклидову пространству.

Мы будем пользоваться следующими группами индексов:

$$i, j, k = 1, \ldots N; \quad a, b, c, d = 1, \ldots (N-1); \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, (N-2);$$

и обозначениями:

$$F_{,i} \equiv \partial F/\partial\tilde{k}_i, \quad F_{ij} \equiv \partial^2 F/\partial\tilde{k}_i\partial\tilde{k}_j,$$

$$\widetilde{\phi}_{0.i} = \mathbf{p}\mathbf{e}_i, \quad \widetilde{\phi}_{i.j} = \mathbf{p}_i\mathbf{e}_j - \mathbf{p}_j\mathbf{e}_i, \quad \widetilde{\Phi}_{00} = \mathbf{p}\hat{L}\mathbf{p}, \quad \widetilde{\Phi}_{0i} = \mathbf{p}\hat{L}\mathbf{p}_i, \quad \widetilde{\Phi}_{ij} = \mathbf{p}_i\hat{L}\mathbf{p}_j, \qquad (1.2)$$

где

$$\hat{L} = \hat{I} - \sum_{i=1}^{N} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \;; \quad \forall \mathbf{a},\ \mathbf{b} : \mathbf{a} \equiv a^A, \mathbf{b} \equiv a^A, \quad \mathbf{ab} = \sum_{A=1}^{D} a^A b^A.$$

2 Формулы Френе и преобразование Лежандра

Рассмотрим гамильтонову формулировку системы (1.1).

Представим действие (1.1) в виде

$$\mathcal{S} = \int F(k_1/s, ..., k_N/s)s d\tau; \quad \text{где} \quad s \equiv |\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}|, \quad k_i \equiv s\tilde{k}_i. \qquad (2.1)$$

Пусть $\{\mathbf{e}_\mu\}$ задает подвижный репер траектории системы:

$$\mathbf{e}_\mu\mathbf{e}_\nu = \delta_{\mu\nu}, \quad \dot{\mathbf{x}} = s\mathbf{e}_1, \quad \mu = 1, ..., D. \qquad (2.2)$$

В терминах подвижного репера внешние кривизны определяются уравнениями Френе

$$\dot{\mathbf{e}}_\mu = k_\mu\mathbf{e}_{\mu+1} - k_{\mu-1}\mathbf{e}_{\mu-1}, \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_{D+1} = 0. \qquad (2.3)$$

Отсюда легко найти явные выражения для внешних кривизн

$$k_{\mu-1} = \dot{\mathbf{e}}_{\mu-1}\mathbf{e}_\mu, \quad k_\mu^2 = \dot{\mathbf{e}}_\mu^2 - k_{\mu-1}^2. \qquad (2.4)$$

Заметим, что $k_\mu \geq 0$ при $\mu = 1, \ldots, (D-2)$, тогда как k_{D-1} ("кручение") может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Если некоторая $k_I \neq 0$, то $k_\mu \neq 0$ при $\mu = 1, 2, \ldots, I-1$.

Обратно, если $k_I = 0$, то $k_\mu = 0$, при $\mu = I+1, \ldots, D-1$ (см., например, [1]).

Учитывая выражения (2.2)-(2.4), можно заменить первоначальный лагранжиан следующим лагранжианом второго порядка:

$$\begin{aligned} L \;&= F(k_1/s, ..., k_N/s)s + \mathbf{p}(\dot{\mathbf{x}} - s\mathbf{e}_1) + \textstyle\sum_a \mathbf{p}_a(\dot{\mathbf{e}}_a - k_a\mathbf{e}_{a+1} + k_{a-1}\mathbf{e}_{a-1}) \\ &- \textstyle\sum_{i,j} d^{ij}\left(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j - \delta_{ij}\right) - F_{,N}\left(k_N - (\dot{\mathbf{e}}_N^2 - k_{N-1}^2)^{1/2}\right), \end{aligned} \qquad (2.5)$$

где $s, k_i, d^{ij}, \mathbf{p}_a, \mathbf{e}_i$ играют роль независимых переменных.

Теперь совершим преобразование Лежандра для лагранжиана (2.5).

Переменные $\mathbf{p}_a$ играют роль импульсов, сопряженных $\mathbf{e}_a$, а импульсы, сопряженные (s, k_a, d_{ij}), приводят к тривиальным связям

$$p^s \approx 0, \quad p^a \approx 0, \quad p^{ij} \approx 0. \qquad (2.6)$$

Полагая $k_N \neq 0, F_{,N} \neq 0$, получаем, что импульс, сопряженный $\mathbf{e}_N$, имеет вид

$$\mathbf{p}_N = F_{,N}\left(\dot{\mathbf{e}}_N^2 - k_{N-1}^2\right)^{-1/2}\dot{\mathbf{e}}_N. \qquad (2.7)$$

Отсюда, с учетом формул Френе, получаем следующие связи:

$$\chi_{N.N} \equiv \mathbf{p}_N\mathbf{e}_N \approx 0, \quad \chi_{N.\alpha} = \mathbf{p}_N\mathbf{e}_\alpha \approx 0, \qquad (2.8)$$

$$\Phi_{N.N} = \mathbf{p}_N^2 - (\mathbf{p}_N\mathbf{e}_{N-1})^2 - F_{,N}^2 \approx \widetilde{\Phi}_{N.N} - F_N^2 \approx 0. \qquad (2.9)$$

Совершив преобразование Лежандра, получим, с учетом этих связей, следующий *тотальный* гамильтониан:

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H} + \lambda^{(s)}p_s + \lambda^{(k)a}p^a + \lambda_{(d)ij}p^{ij}, \qquad (2.10)$$

где

$$\mathcal{H} = s\phi_{0.1} + \sum_a k_a\phi_{a.a+1} + \lambda\Phi_{N.N} + \sum_{i,j} d^{ij}u_{ij} + \sum_\alpha \lambda_\alpha\chi_{N.\alpha} + \lambda_N\chi_{N.N}, \tag{2.11}$$

$$u_{ij} \equiv \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j - \delta_{ij}, \quad \phi_{a.a+1} \equiv \widetilde{\phi}_{a.a+1} - F_{,a}, \quad \phi_{0.1} \equiv \widetilde{\phi}_{0.1} + \sum_i \tilde{k}_i F_{,i} - F, \tag{2.12}$$

а $\lambda_{...}$ – лагранжевы множители.

Стабилизация (2.6) порождает вторичные связи

$$u_{ij} \approx 0; \quad s\phi_{0.1} + \textstyle\sum_a k_a\phi_{a.a+1} \approx 0 \Rightarrow \mathcal{H} \approx 0; \tag{2.13}$$

$$s\phi_{a.a+1} = -F_{,Na}(k_N - 2\lambda F_N); \quad (k_N - 2\lambda F_N)F_{,NN} \approx 0. \tag{2.14}$$

Теперь, исключив связи (2.6), мы получим гамильтонову систему, описываемую гамильтонианом (2.11) и симплектической структурой

$$\omega_N = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N d\mathbf{p}_i \wedge d\mathbf{e}_i. \tag{2.15}$$

Выражения (2.8), (2.13) задают в редуцированной системе первичные связи. Выражения (2.14), (2.9) либо определяют переменные k_a, k_N как функции от $\widetilde{\phi}_{0.1}, \widetilde{\phi}_{a.a+1}$, либо задают связи, при которых переменные k_a, k_N играют роль лагранжевых множителей. Число возникающих связей равно корангу гессиана F_{ij}.

Заметим, что функции (1.2) образуют замкнутую относительно скобок Пуассона (квадратичную) алгебру и удовлетворяют уравнениям

$$\{\widetilde{\phi}_{...}, u_{...}\} \approx \{\widetilde{\Phi}_{...}, u_{...}\} \approx 0, \quad \{\chi_{Ni}, u_{jk}\} \approx \delta_{Nj}\delta_{ik}.$$

Отсюда видим, что:

– все вторичные связи являются функциями от (1.2);

– связи $u_{N.N}, u_{N,\alpha}$ и $\chi_{N\alpha}, \chi_{N.N}$ являются взаимно сопряженными связями второго рода, причем

$$\lambda_{N\alpha} = \lambda_N = 0; \tag{2.16}$$

– связи $u_{N.N-1}$, $u_{a.b}$ являются связями первого рода, а их стабилизация не порождает вторичных связей. Они генерируют тривиальные калибровочные преобразования.

Поэтому удобно зафиксировать $d_{N.N-1}$ и $d_{a.b}$, наложив калибровочные условия

$$\chi_{N.N-1} \equiv \mathbf{p}_N\mathbf{e}_{N-1} \approx 0, \quad \chi_{a.a-\kappa} \equiv \mathbf{p}_a\mathbf{e}_{a-\kappa} \approx 0, \quad \kappa = 0, \ldots, a-1\ , \tag{2.17}$$

удовлетворяющие равенствам

$$\{\chi_{i.j}, u_{kl}\} \approx \delta_{i\{k}\delta_{l\}j}; \quad \{\chi_{i.j}, \widetilde{\Phi}_{NN}\} \approx 2\delta_{N.i}\delta_{ij}\widetilde{\Phi}_{NN}; \quad \{\chi_{i.j}, \widetilde{\phi}_{a.a+1}\} \approx \delta_{ij}(\delta_{i.a} - \delta_{i.a+1})\widetilde{\phi}_{a.a+1}.$$

Пример. Известно, что алгебра калибровочных преобразований системы определяется первичными связями первого рода, а ее размерность не превышает количества последних [9].

Например, в максимально невырожденном случае, $\det F_{ij} \neq 0$, лагранжиан обладает лишь репараметризационной инвариантностью. Размерность ее фазового пространства равна $D_{max} = (2D - N)(N+1) - 2$.

Рассмотрим простейший пример такой системы

$$F = \frac{1}{2}\sum_i^N b_i\tilde{k}_i^2 + \sum_{i=1} c_i\tilde{k}_i + c_0. \quad b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_N \neq 0.$$

Разрешив связи (2.9), (2.14), получаем

$$\tilde{k}_a = (\widetilde{\phi}_{a.a+1} - c_a)/b_a, \quad (b_N\tilde{k}_N + c_N)^2 = \widetilde{\Phi}_{N.N}. \tag{2.18}$$

откуда имеем

$$\mathcal{H} = s\phi_{0.1} + d_{ij}u_{ij}, \quad \phi_{0.1} = \widetilde{\phi}_{0.1} + \frac{1}{2}\sum_i b_i\tilde{k}_i^2 - c_0. \tag{2.19}$$

Система имеет лишь первичные связи

$$\phi_{0.1} \approx 0, \quad u_{ij} \approx 0, \quad \chi_{N.N} \approx 0, \quad \chi_{N.\alpha} \approx 0.$$

Стабилизация связей (2.8) и калибровочных условий (2.17) приводит к фиксации d_{ij}, значения которой мы не выписываем за ненадобностью.

3 Лагранжианы, линейные по кривизнам

Как видно из (2.14), максимально вырожденными являются системы с лагранжианами, *линейно* зависящими от внешних кривизн

$$F = c_0 + \sum_{i=1}^N c_i\tilde{k}_i. \tag{3.1}$$

Такие системы имеют следующий (максимальный) набор первичных связей:

$$\begin{aligned} \phi_{0.1} &= \mathbf{p}\mathbf{e}_1 - c_0 \approx 0, \\ \phi_{a.a+1} &= \mathbf{p}_a\mathbf{e}_{a+1} - \mathbf{p}_{a+1}\mathbf{e}_a - c_a \approx 0, \\ \Phi_{N.N} &= \mathbf{p}_N\hat{I}\mathbf{p}_N - c_N^2 \approx 0, \\ \chi_{N.N} &\equiv \mathbf{p}_N\mathbf{e}_N \approx 0, \quad \chi_{N.\alpha} = \mathbf{p}_N\mathbf{e}_\alpha \approx 0, \\ u_{ij} &= \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j - \delta_{ij} \approx 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

и гамильтониан

$$\mathcal{H} = s\phi_{0.1} + \sum_{a=1}^{N-1} k_a\phi_{a.a+1} + \lambda\Phi_{N.N} + \sum_{i,j=1}^N d^{ij}u_{ij}. \tag{3.3}$$

Из уравнений движения для $\mathbf{e}_N$ видим, что $2c_N\lambda = k_N = s\dot{k}_N$.

Таким образом, в гамильтоновом формализме метрические инварианты траектории s, k_i играют роль лагранжевых множителей.

Поскольку при преобразовании Лежандра требовалось выполнение условия $k_N \neq 0$, то при стабилизации первичных связей системы мы должны полагать

$$k_a \neq 0, \lambda \neq 0.$$

Наложим калибровочные условия (2.17), в результате чего все первичные связи станут квадратичными.

Условия (2.17) вместе со связями (2.8) дают следующую фиксацию калибровки:

$$d_{i.j} = \delta_{ij}(k_i c_i - k_{i-1}c_{i-1} - s\delta_{1.i}c_0). \tag{3.4}$$

Стабилизация остальных первичных связей порождает вторичные связи первого этапа

$$\widetilde{\phi}_{0.2} \approx 0, \quad \widetilde{\phi}_{\alpha.\alpha+2} \approx 0, \quad \widetilde{\Phi}_{N.N-1} \approx 0. \tag{3.5}$$

Заметим, что эволюция функций (1.2) определяется выражениями:

$$\begin{gathered}
\dot{\Phi}_{00} = -4\lambda\Phi_{0N}\phi_{0N}, \\
\dot{\phi}_{0i} = -k_{i-1}\phi_{0.i-1} + k_i\phi_{0.i+1} + 2\lambda\delta_{iN}\Phi_{0N}, \\
\dot{\Phi}_{0i} = -s\delta_{1i}\Phi_{00} - k_{i-1}\Phi_{0.i-1} + k_i\Phi_{0.i+1} - 2\lambda\Phi_{N\{i}\phi_{0\}N}, \\
\dot{\phi}_{ij} = -s\delta_{1[i}\phi_{j]0} - k_{i-1}\phi_{i-1.j} + k_i\phi_{i+1.j} - k_{j-1}\phi_{i.j-1} + k_j\phi_{i.j+1} + 2\lambda\delta_{N[i}\Phi_{j]N}, \\
\dot{\Phi}_{ij} = -s\delta_{1\{i}\Phi_{j\}0} - k_{i-1}\Phi_{i-1.j} + k_i\Phi_{i+1.j} - k_{j-1}\Phi_{j-1.i} + k_j\Phi_{j+1.i} - 2\lambda\Phi_{N\{i}\phi_{j\}N}.
\end{gathered}$$

Отсюда видим, что дальнейшее проведение процедуры Дирака существенно зависит от значений констант c_i.

Так, если лагранжиан (3.1) конформно-инвариантен ($c_0 = 0$), то стабилизация связи $\widetilde{\phi}_{0.1} \approx 0$ приводит к следующей цепочке связей первого рода:

$$\widetilde{\phi}_{0.i} = \mathbf{pe}_i \approx 0, \quad \widetilde{\Phi}_{0.i} \approx \mathbf{pp}_i \approx 0, \quad \widetilde{\Phi}_{0.0} \approx \mathbf{p}^2 \approx 0, \tag{3.6}$$

что отвечает (в псевдоевклидовом пространстве) безмассовому случаю[1].

Стабилизация остальных связей уже не затрагивает пространственный импульс системы, лишь специфицируя ее "внутреннее" пространство.

[1] Полный импульс системы $\mathbf{P}$ и генераторы ее вращении $\mathbf{M}^{(2)}$ определяются выражениями

$$P^A = p^A, \quad M^{(2)AB} = p^{[A}x^{B]} + \sum_{i=1}^{N} p_i^{[A}e_i^{B]}.$$

3.1 $\mathcal{L} = ck_N$

Нетрудно увидеть, что максимальным набором связей (и калибровочных симметрий) обладают системы с $c_0 = c_1 = ...c_{N-1} = 0$, $c_N \equiv c \neq 0$.

Для таких систем проведение процедуры Дирака порождает, дополнительно к (3.6), следующий набор связей:

$$\widetilde{\phi}_{i.j} \approx 0, \quad \widetilde{\Phi}_{i.j} - c^2\delta_{ij} \approx 0. \tag{3.7}$$

Все они являются связями первого рода.

Наложим калибровочные условия (2.17) и введем комплексные координаты

$$\mathbf{z}_i = (\mathbf{p}_i + \imath c\mathbf{e}_i)/\sqrt{2}, \quad \omega_2 = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x} + \frac{\imath}{c}\sum_i d\mathbf{z}_i \wedge d\bar{\mathbf{z}}_i. \tag{3.8}$$

В этих координатах гамильтониан системы задается выражением

$$\mathcal{H} = \frac{s}{2c}\left[\imath\sqrt{2}\mathbf{p}(\bar{\mathbf{z}}_1 - \mathbf{z}_1) + \imath\sum_{a=1}^{N-1}\tilde{k}_a(\mathbf{z}_a\bar{\mathbf{z}}_{a+1} - \mathbf{z}_{a+1}\bar{\mathbf{z}}_a) + \tilde{k}_N(\mathbf{z}_N\bar{\mathbf{z}}_N - c^2)\right]. \tag{3.9}$$

Связи (3.6), (3.7), (2.8) и калибровочные условия (2.17) принимают вид

$$\Phi^0_{i\bar{j}} \equiv \mathbf{z}_i\bar{\mathbf{z}}_j - c^2\delta_{ij} \approx 0, \quad \Phi^+_i \equiv \mathbf{p}\mathbf{z}_i \approx 0, \quad \Phi_0 = \mathbf{p}^2 \approx 0, \quad U^+_{ij} = \mathbf{z}_i\mathbf{z}_j/2 \approx 0. \tag{3.10}$$

Они образуют алгебру

$$\begin{gathered}
\{\Phi_{i\bar{j}}, \Phi_{k\bar{l}}\} = \imath c(\delta_{i\bar{l}}\Phi_{k\bar{j}} - \delta_{k\bar{j}}\Phi_{i\bar{l}}), \quad \{\Phi_{i\bar{j}}, \Phi^+_k\} = -ic\delta_{k\bar{j}}\Phi^+_i, \\
\{\Phi_{i\bar{j}}, U^+_{kl},\} = -ic\left(\delta_{k\bar{j}}U^+_{il} + \delta_{l\bar{j}}U^+_{ik}\right), \quad \{\Phi^+_i, U^-_{\bar{j}\bar{k}}\} = ic\delta_{i\{\bar{j}}\Phi^-_{\bar{k}\}}/2, \quad \{\Phi^+_i, \Phi^-_{\bar{j}}\} = ic\delta_{i\bar{j}}\Phi_0, \\
\{\Phi, U^+_{ij}\} = \{\Phi, \Phi_{i\bar{j}}\} = \{\Phi, \Phi^+_i\} = 0, \quad \{\Phi^+_i, U^+_{jk}\} = \{\Phi^+_i, \Phi^+_j\} = \{U^+_{ij}, U^+_{kl}\} = 0, \\
\{U^+_{ij}, U^-_{\bar{k}\bar{l}}\} = \imath c\delta_{\{i.\{\bar{k}}\Phi_{j\}\bar{l}\}}/4 + \imath c^3\left(\delta_{i\bar{k}}\delta_{j\bar{l}} + \delta_{i\bar{l}}\delta_{j\bar{k}}\right)/2,
\end{gathered}$$

где $\Phi^-_i = \bar{\Phi}^+_i$, $U^-_{ij} = \bar{U}^+_{ij}$.

Таким образом, $U^{\pm}_{ij}$ являются связями второго рода, а остальные связи –первого рода. Размерность фазового пространства равна

$$D_{min} = (2D - 3N - 2)(N + 1), \tag{3.11}$$

система обладает $N+1$ калибровочной степенью свободы.

Из (3.11) видно, что если $D = 4$, то динамика нетривиальна лишь при $N = 1$. При этом размерность фазового пространства системы совпадает с размерностью фазового пространства безмассовой частицы со спиральностью c в (3+1)-мерном пространстве [3]. В таком пространстве можно "спиноризовать" связи (3.10) и провести ковариантное квантование системы [10].

Как видно из (3.10), сходный трюк можно провести также при $N > 1$ в $(5+1)$ - , $(7+1)$ - , и $(9+1)$-мерных пространствах.

Однако наиболее любопытным нам представляется совпадение построенной системы связей с системой $N+1$ осцилляторов, полученной дискретизацией струны [11], [12].

3.2 N=1, 2

Рассмотрим случай $N = 1$, $c_0 \neq 0$. Имеется единственная вторичная связь и условие на лагранжевы множители:

$$\widetilde{\Phi}_{0.1} \approx 0, \quad s\widetilde{\Phi}_{00} + k_1 c_1 c_0 = 0. \tag{3.12}$$

Заметим, что $\dot{\widetilde{\Phi}}_{00} = 0$, откуда получаем $p^2 = c_0^2 - c_0 c_1 \tilde{k}_1 = const$, т. е. траектория системы имеет постоянную кривизну.
В псевдоевклидовом пространстве последнее равенство означает сохранение массы системы на заданной траектории движения.
В комплексных координатах (3.8), где $c \equiv c_1$, полный набор связей можно представить в виде одной вещественной и двух голоморфных связей:

$$\Phi = \mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} - c_1^2, \quad U^+ = \mathbf{z}^2/2, \quad \Phi^+ = \mathbf{p}\mathbf{z} - \imath c_0 c_1/\sqrt{2}, \tag{3.13}$$

образующих алгебру

$$\{\Phi, \Phi_+\} = -\imath c_1 \Phi_+ + c_1^2 c_0/\sqrt{2}, \quad \{\Phi, U^+\} = -2\imath c_1 U^+, \quad \{U^+, U^-\} = \imath c_1 \Phi + \imath c_1^3,$$
$$\{\Phi^+, \Phi^-\} = \imath c_1 \mathbf{p}^2, \quad \{\Phi_+, U_-\} = \imath c_1 \Phi^- + c_0 c_1^2/\sqrt{2}, \quad \{\Phi_+, U_+\} = 0,$$

где $\Phi_- \equiv \bar{\Phi}_+$, $U_- \equiv \bar{U}_+$.
Таким образом, при $c_0 \neq 0, N = 1$ размерность фазового пространства равна $D_{red} = 2(2D - 3)$.
Система имеет единственную калибровочную степень свободы, задаваемую гамильтонианом

$$\mathcal{H}_{1.c_0\neq 0} = \frac{s}{2c_1^2 c_0}\left[2\imath c_1^2 c_0 \mathbf{p}(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) + (c_0^2 - \mathbf{p}^2)(\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} - c_1^2)\right]. \tag{3.14}$$

При $c_0 = 0$ (см. раздел 3.1) размерность фазового пространства системы равна $D_{red} = 2(2D - 5)$, она имеет две калибровочные степени свободы.

Теперь рассмотрим случай $N = 2$ при произвольных константах c_0, c_1, c_2.
При $c_0 \neq 0$ имеем две вторичные связи второго этапа, определяемые выражениями (3.5). Их стабилизация приводит к условиям

$$c_2 c_0 k_1 = k_2 \widetilde{\Phi}_{0.2}, \quad s c_0 c_2 \widetilde{\Phi}_{0.2} = k_2 \left(\Phi_{1.1}\widetilde{\Phi}_{0.2} - c_2^2 c_1 c_0\right), \tag{3.15}$$

где $\Phi_{1.1} \equiv \widetilde{\Phi}_{1.1} - c_2^2$, $\widetilde{\Phi}_{0.2} \neq 0$.
При $c_1 = 0$ второе условие принимает вид $s c_0 c_1 + k_2 \Phi_{1.1} = 0$.
Система имеет единственную калибровочную степень свободы, размерность ее фазового пространства равна $D_{red} = 6(D - 2)$.
Как и при $N = 1$, имеем интеграл движения $\widetilde{\Phi}_{0.0}$: $\dot{\widetilde{\Phi}}_{00} = 0$, отвечающий в псевдоевклидовом пространстве за сохранение массы на заданной траектории движения.

При $c_0 = 0, c_1 \neq 0$ вторичные связи определяются выражениями (3.6) и $\widetilde{\Phi}_{1.2} \approx 0$. Имеет место условие

$$k_2 c_2 c_1 + k_1 \Phi_{1.1} = 0, \tag{3.16}$$

при этом $\Phi_{1.1}$ является интегралом движения: $\dot{\Phi}_{1.1} = 0$.
Отсюда следует, что $\tilde{k}_2/\tilde{k}_1 = const$.
Система имеет две калибровочные степени свободы, размерность ее фазового пространства равна $D_{\rm red} = 2(3D - 10)$.
При $c_0 = c_1 = 0$ (см. раздел 3.1) размерность фазового пространства системы равна $D_{red} = 6(D - 4)$, имеется три калибровочные степени свободы.

4 Заключение

Мы построили, исходя из "первых принципов", гамильтонов формализм для репараметризационно инвариантных механических систем общего положения.
В частности, мы показали, что размерность фазового пространства D-мерной системы с лагранжианом, зависящим от первых N внешних кривизн, удовлетворяет неравенству

$$(2D - 3N - 2)(N + 1) \leq D_{red} \leq (2D - N)(N + 1) - 2.$$

причем $D_{red} = D_{red}^{max}$ для лагранжианов, являющихся невырожденной квадратичной функцией внешних кривизн, а $D = D_{red}^{min}$ для лагранжианов, пропорциональных единственной, N-й внешней кривизне.
В первом случае лагранжианы имеют единственную калибровочную степень свободы (репараметризации), во втором случае они имеют $N + 1$ калибровочных степеней свободы, причем все связи являются квадратичными.
Мы показали, что в предложенной формулировке все первичные связи для систем с лагранжианами, линейно зависящими от внешних кривизн, сводятся к квадратичным. При этом алгоритмы построения полного набора связей и генераторов калибровочных симметрий представляют собой набор алгебраических операций.
Удивительным образом система связей для модели с лагранжианом $F = c k_N$ оказалась *эквивалентной* системе взаимодействующих $N + 1$ осцилляторов, полученной дискретизацией струны В.Д. Гершуном и А.И. Пашневым [11], А.Т. Филипповым и А.П. Исаевым [12]. Недавно А. Пашнев и М. Цулая провели БРСТ квантование последней системы как для $N = 1$ [13], так и для произвольного N [14].
Мы полагаем, что такая удивительная параллель заслуживает более детального рассмотрения в отдельной работе.

5 Благодарности

Автор считает своим долгом выразить благодарность Е.А. Иванову за предложение рассмотреть системы с жесткостью, за разъяснение их актуальности в контексте W алгебр, полезные обсуждения и критику.
Бесчисленные обсуждения были проведены с П. Пятовым и С. Ляховичем по процедуре Дирака, а по спиновым частицам с С. Ляховичем, А. Шарановым и особенно К. Шехтером. А. Пашнев обратил внимание автора на интригующее соответствие между моделями жестких частиц и дискретных струн и указал на работы по БРСТ квантованию последних. Завершению работы способствовал также постоянный интерес со стороны О.М. Худавердяна и В.В. Нестеренко.

Всем им автор выражает глубокую признательность.

Отдельно хочется поблагодарить И.В. Тютина, детально разъяснившего автору структуру калибровочных преобразований в формализме Дирака.

Работа выполнена при поддержке грантов INTAS-РФФИ No.95-0829 и INTAS-96-538, INTAS-93-127-ext.

Литература

[1] М.М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр III: Гладкие многообразия.*, М., Наука, 1987.

[2] A.M. Polyakov, *Nucl.Phys.B*, 1986, vol.268, p.406; *Mod.Phys.Lett.A*, 1988, vol.3, p.112.

[3] M.S. Plyushchay, *Nucl.Phys.B*, 1991, vol.362, p.54.
Yu.A. Kuznetsov, M.S. Plyushchay, *Nucl.Phys.B*, 1993, vol.389, p.181.

[4] M.S. Plyushchay, *Phys.Lett.B*, 1990, vol.243, p.383.

[5] M.S. Plyushchay, *Phys.Lett.B*, 1991, vol.253, p.50.

[6] A.A. Kapustnikov, A. Pashnev, A. Pichugin, *Phys.Rev. D*, 1997, vol.55, p.2257.

[7] E. Ramos, J. Roca, *Nucl.Phys.B*, 1995, vol.436, p.529.

[8] E. Ramos, J. Roca, *Nucl.Phys.B*, 1995, vol.452, p.705.

[9] И.В. Тютин, *Частное сообщение*, 1998.

[10] E. Ramos, J. Roca, *Nucl.Phys.B*, 1996, vol.477, p. 606.

[11] В.Д. Гершун, А.И. Пашнев, *ТМФ*, 1987, т. 73, с.294.

[12] A.P. Isaev, A.T. Filippov, *Mod.Phys.Lett. A*, 1989, v.4, 2167.

[13] A. Pashnev, M. Tsulaia, "Description of the higher massless irreducible integer spins in the BRST approach", hep-th/9803207; Preprint JINR E2-98-56, **Dubna, 1998.**

[14] A. Pashnev, M. Tsulaia, In preparation.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 апреля 1998 года.