Р2 - 9738

Н.Н.Боголюбов (мл.), А.М.Курбатов, А.С.Семенов

О ГРАДИЕНТНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ СПОНТАННО НАРУШЕННОГО РЕШЕНИЯ В МОДЕЛИ С ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Боголюбов Н.Н. (мл.), Курбатов А.М., Семенов А.С. P2 - 9738

О градиентной инвариантности спонтанно нарушенного решения в модели с четырехфермионным взаимодействием

В схеме спонтанного нарушения симметрии методом канонических преобразований Боголюбова получены массивные решения для модели безмассовых дираковских полей с четырехфермионным взаимодействием. Решение неаналитически зависит от константы связи и не может быть получено суммированием конечного числа диаграмм ряда теории возмущений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики, ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

P2 - 9738

Bogolubov N.N. (Jr.), Kurbatov A.M., Semenov A.S.

On Gauge Invariance of the Spontaneously Broken Solution in the Four-Fermion Interaction Model

Within the scheme of spontaneously broken symmetry the massive solutions for the model of massless Dirac fields with four-fermion interaction are derived by the method of the Bogolubov canonical transformations. The solution depends nonanalytically on the coupling constant and cannot be obtained by summing the finite number of the perturbation series diagrams.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

I. Введение.

Хорошо известно /1/, что лагранжиан является удобным средством выражения свойств симметрии динамической системы и построения связанных с ними динамических инвариантов. Помимо преобразований неоднородной группы Лоренца (чему соответствуют инварианты тензора энергии-импульса, момента и спина) $\mathcal{L}$ инвариантен относительно градиентных преобразований, с которыми связаны законы сохранения соответствующих зарядов и токов.

Такие внутренние симметрии присущи лишь определенным взаимодействиям и зачастую нарушаются другими взаимодействиями. Существует, однако, градиентное γ^5-преобразование, относительно которого неинвариантен массовый член любой спинорной теории.

То, что $\mathcal{L}$ содержит члены, не инвариантные относительно определенных преобразований, приводит к существованию в системе некоторого выделенного "направления", фиксирующего снятие вырождения относительно преобразований данной группы. Если при этом нарушение симметрии является неустойчивым относительно "включения" члена, нарушающего симметрию, т.е. уже бесконечно малые члены в $\mathcal{L}$, снимающие вырождение, приводят к конечным значениям соответствующих динамических величин, то последние следует описывать на языке квазисредних /2/ и говорить о спонтанном нарушении симметрии.

Целесообразность использования такого подхода в квантовой теории поля диктуется условием, что релятивистское локальное описание изотопического спина и гиперзаряда требует введения в $\mathcal{L}$ калибровочных полей Янга-Миллса, в то время как в реальных моделях сильных и слабых взаимодействий масса обменного кванта отлична от нуля. Теория со спонтанно-нарушенной симметрией дает метод решения этой проблемы и известна на примерах реализации механизма Хиггса: введения в $\mathcal{L}$ скалярных бозонных полей с отличным от нуля вакуумным средним, которые за счет канонического преобразования (сдвига по полям) объединяются с поперечными компонентами полей Янга-Миллса, образуя массивные векторные мезоны. На этом принципе построено большинство единых моделей электромагнитных и слабых взаимодействий элементарных частиц /3/.

Равным образом спонтанно-нарушенное решение можно получить в исходной нелинейной теории из первоначально безмассового $\mathcal{L}$ за счет динамического механизма спонтанного нарушения симметрии. В применении к моделям с 4-фермионным взаимодействием он сводится к использованию релятивистского аналога процедуры Хартри-Фока-Боголюбова /4/, в котором масса фермиона вводится так, чтобы исключить собственно-энергетические эффекты, вызванные самодействием в $\mathcal{L}$. В таком подходе "хиггсовские" бозоны естественно возникают как коррелированные фермион-антифермионные пары, причем в силу условия минимизации реализуемое ими основное состояние является устойчивым по отношению к тривиальному (безмассовому) состоянию. Нарушение симметрии здесь есть нарушение исходной киральной инвариантности $\mathcal{L}$.

Постановка задачи получения массивных решений в первоначально безмассовой теории принадлежит Гейзенбергу /5/, однако в предложенной им нелинейной спинорной теории возникают известные трудности, связанные с появлением отрицательных членов в коммутаторах. Динамический механизм спонтанного нарушения симметрии обходит их без потери унитарности.

Отметим аналогию между нарушением γ^5- инвариантности массовым членом и нарушением закона сохранения числа частиц в теории сверхпроводимости. В последнем случае метод компенсации опасных диаграмм /6/ приводит к появлению между основным состоянием и квазичастичными возбуждениями энергетической щели, соответствующей перенормированной "массе" квазичастицы, так что уравнения, определяющие энергию квазичастичных возбуждений в сверхпроводнике, аналогичны уравнениям свободной массивной дираковской частицы.

2. Каноническое преобразование и нарушение γ^5- инвариантности.

Обычная процедура теории возмущений основана на представлении $\mathcal{L}$ в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}, \tag{I}$$

где $\mathcal{L}_0$ - квадратичная форма асимптотически свободных полей, а $\mathcal{L}_{int}$ определяет их взаимодействие. Инвариантность $\mathcal{L}$ относительно градиентных преобразований допускает существование, помимо обычного решения, получаемого по теории возмущений, спонтанно-нарушенного решения, описывающего класс динамических величин, не обладающих инвариантностью относительно этих преобразований. Наличие таких величин видно уже для лагранжиана свободного массивного дираковского поля

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} :(\bar{\psi}(x)\gamma^n \frac{\partial\psi}{\partial x^n} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^n}\gamma^n\psi(x)): - m :\bar{\psi}(x)\psi(x): \quad (2)$$

Кинетический член (2) инвариантен относительно градиентных преобразований

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha}, \quad (3)$$

$$\psi(x) \to e^{i\gamma^5\alpha}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)e^{i\gamma^5\alpha} \quad (4)$$

или эквивалентной им группы киральных преобразований

$$\psi(x) \to U_{L,R}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)U^+_{L,R}$$
$$U_{L,R} = \exp\frac{i}{2}(1 \pm \gamma^5)\alpha. \quad (5)$$

Массовый член не инвариантен относительно (5) и преобразуется по представлению $(1^*, 1) \times (1, 1^*)$. Последнее означает, что основное состояние безмассовой теории является вырожденным и проявляется в отличии квазисредних от обычных средних [2]. Квазисредняя определяется как средняя по вакууму, вычисленная в присутствии малого, нарушающего симметрию, члена при стремлении последнего к нулю. При этом квазисредняя получает конечное, отличное от нуля, значение. Поэтому целесообразно исходить из более общего, нежели (2),

первоначально безмассового $\mathcal{L}(1)$, обладающего инвариантностью относительно преобразований (5), и искать для него решение, не инвариантное относительно (5).

Наиболее общая форма 4-фермионного взаимодействия, инвариантная относительно собственных преобразований группы Лоренца, обращения времени, пространственного отражения и зарядового сопряжения, генерируется алгеброй γ матриц Дирака и представима в виде

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_i g_i (:(\bar{\psi}(x) O^i \psi(x):)^2, \quad (6)$$

где O^i, включая единичную матрицу 16 линейно независимых комбинаций

$$O^i = I,\ \gamma^5,\ \gamma^n,\ \gamma^n\gamma^5,\ \sigma^{mn} = \frac{i}{2}(\gamma^m\gamma^n - \gamma^n\gamma^m), \quad (7)$$

так что квадратичные формы $\bar{\psi} O^i \psi$ преобразуются относительно преобразований несобственной группы Лоренца соответственно как скаляр, псевдоскаляр, вектор, аксиальный вектор и тензор. Простейший $\mathcal{L}$, инвариантный относительно градиентных преобразований (5), имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} :(\bar{\psi}(x)\gamma^n \frac{\partial\psi}{\partial x^n} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^n}\gamma^n\psi(x)): - g\left((:\bar{\psi}(x)\psi(x):)^2 - (:\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x):)^2\right). \quad (8)$$

Для нахождения спонтанно нарушенного решения следует прежде всего выделить из $\mathcal{L}_{int}$ наиболее сингулярную часть $\mathcal{L}_S$, соответствующую самодействию полей, и включить ее в $\mathcal{L}_0$

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S) + (\mathcal{L}_{int} - \mathcal{L}_S) = \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}'_{int}, \quad (9)$$

$\mathcal{L}'_{int}$ тогда описывает только взаимодействие без учета самодействия, которое полностью содержится в $\mathcal{L}'_0$. Поскольку $\mathcal{L}'_0$ должен приводить к линейным уравнениям поля, то $\mathcal{L}'_0$ должен представляться квадратичной по полям формой, так что для случая 4-фермионного взаимодействия члены $\mathcal{L}_S$ войдут в $\mathcal{L}'_0$ уже в частично просуммированной форме и даже для бесконечно малой константы взаимодействия дадут конечный вклад в $\mathcal{L}'_0$.

Конечный вклад собственной энергии определяет отличную от нуля массу фермиона, а так как массовый член нарушает киральную инвариантность, то при частичном суммировании следует учитывать γ^5 - неинвариантные аномальные спаривания пар операторов рождения фермионов и антифермионов с одинаковой киральностью. Последнее приводит к появлению в аппроксимирующем лагранжиане членов с выделенным "направлением" киральности, т.е. к снятию вырождения относительно преобразований (4). Записанный в импульсном представлении через операторы спинорных полей, нормированных на конечный объем, соответствующий аппроксимирующий гамильтониан для основных частиц имеет вид

$$H'_0 = \sum_{\vec{p},\nu} |\vec{p}|\, \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec{p},\nu} a^{-}_{\vec{p},\nu} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{p},\nu} g(\vec{p})\left(C\overset{*}{a}{}^{+}_{\vec{p},\nu} a^{+}_{-\vec{p},\nu} + \overset{*}{C} a^{-}_{\vec{p},\nu} \overset{*}{a}{}^{-}_{-\vec{p},\nu}\right) + \frac{|C|^2}{2} V. \tag{10}$$

Здесь C определяется как нетривиальное решение уравнения

$$C = \frac{1}{V}\sum_{\vec{p},\nu} g(\vec{p}) \langle \overset{*}{a}{}^{-}_{-\vec{p},\nu}\, a^{-}_{\vec{p},\nu} \rangle^{V}_{H'_0}, \tag{11}$$

V -нормировочный объем: куб с центром в начале координат

$$V = L^3, \quad \vec{p} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}. \tag{12}$$

Спинорные поля ψ выражены через операторы рождения и уничтожения частиц и античастиц

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\pm,\vec{p},\nu} e^{\pm ipx}\, a^{\pm}_{\vec{p},\nu}\, v^{\pm}_{\vec{p},\nu}, \qquad \overline{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\pm,\vec{p},\nu} e^{\pm ipx}\, \overset{*}{a}{}^{\pm}_{\vec{p},\nu}\, \overline{v}{}^{\pm}_{\vec{p},\nu}, \tag{13}$$

удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям

$$\{\overset{*}{a}{}^{-}_{\vec{p},\mu},\, a^{+}_{\vec{p}',\nu}\} = \delta_{\mu\nu}\delta_{\vec{p}\vec{p}'}, \qquad \{a^{-}_{\vec{p},\mu},\, \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec{p}',\nu}\} = \delta_{\mu\nu}\delta_{\vec{p}\vec{p}'}. \tag{14}$$

H'_0 приводится к диагональному виду посредством канонических преобразований Боголюбова /7/:

$$\overset{*}{\alpha}{}^{-}_{\vec{p},\nu} = u_{\vec{p}}\, \overset{*}{a}{}^{-}_{\vec{p},\nu} - v_{\vec{p}}\, \overset{*}{a}{}^{+}_{-\vec{p},\nu}, \quad \alpha^{+}_{\vec{p},\nu} = u_{\vec{p}}\, a^{+}_{\vec{p},\nu} - v_{\vec{p}}\, a^{-}_{-\vec{p},\nu},$$
$$\alpha^{-}_{\vec{p},\nu} = u_{\vec{p}}\, a^{-}_{\vec{p},\nu} + v_{\vec{p}}\, a^{+}_{-\vec{p},\nu}, \quad \overset{*}{\alpha}{}^{+}_{\vec{p},\nu} = u_{\vec{p}}\, \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec{p},\nu} + v_{\vec{p}}\, \overset{*}{a}{}^{-}_{-\vec{p},\nu}. \tag{15}$$

Коэффициенты преобразования $u_{\vec{p}}$, $v_{\vec{p}}$ удовлетворяют условию

$$u^2_{\vec{p}} + v^2_{\vec{p}'} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'}, \tag{16}$$

так что операторы α подчиняются тем же перестановочным соотношениям (I4), что и операторы a .

Для возрастающей последовательности объемов $\{V_i\}$ при $V_i \to \infty$

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \to d\vec p\,, \quad \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec p} \to \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \ldots d\vec p. \qquad (I7)$$

При предельном переходе (I7) коэффициенты канонических преобразований $u_{\vec p}, v_{\vec p}$ как коэффициентные функции квазилокальных операторов /I/ являются обобщенными функциями, т.е. их следует рассматривать как результат несобственного предельного перехода.

Канонические преобразования (I5) позволяют непосредственно выделить в H члены, не инвариантные относительно градиентных преобразований (4). Гамильтониан для основных частиц

$$H=\int d\vec p\Big(|\vec p|\sum_\nu \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec p,\nu}\, a^{-}_{\vec p,\nu} - \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec q\, g(\vec q)\sum_\nu \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec p+\vec q,\nu}\, a^{+}_{-\vec p-\vec q,\nu}\, \overset{*}{a}{}^{-}_{-\vec p,\nu}\, a^{-}_{\vec p,\nu}\Big), \qquad (I8)$$

после перехода к α-представлению и приведения к нормальной форме имеет вид

$$\begin{aligned} H=\int d\vec p\Big(&|\vec p|v_{\vec p}^2 - \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec q\, g(\vec q)\, u_{\vec p}\, v_{\vec p}\, u_{\vec p+\vec q}\, v_{\vec p+\vec q} + \\ &+\Big(|\vec p|(u_{\vec p}^2 - v_{\vec p}^2) + 2u_{\vec p} v_{\vec p}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec q\, g(\vec q)\, u_{\vec p+\vec q}\, v_{\vec p+\vec q}\Big)\Big(\overset{*}{\alpha}{}^{+}_{\vec p,\nu}\alpha^{-}_{\vec p,\nu} + \alpha^{+}_{-\vec p,\nu}\overset{*}{\alpha}{}^{-}_{-\vec p,\nu}\Big) + \qquad (I9) \\ &+\Big(2|\vec p|\, u_{\vec p} v_{\vec p} - (u_{\vec p}^2 - v_{\vec p}^2)\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec q\, g(\vec q)\, u_{\vec p+\vec q}\, v_{\vec p+\vec q}\Big)\Big(\overset{*}{\alpha}{}^{+}_{\vec p,\nu}\alpha^{+}_{-\vec p,\nu} + \alpha^{-}_{\vec p,\nu}\overset{*}{\alpha}{}^{-}_{-\vec p,\nu}\Big)\Big) + \end{aligned}$$

+ члены 4-ой степени по операторам α ,

т.е. H_0' приводится к диагональному виду при условии выполнения уравнения компенсации

$$2|\vec p|\, u_{\vec p}\, v_{\vec p} - (u_{\vec p}^2 - v_{\vec p}^2)\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec q\, g(\vec q)\, u_{\vec p+\vec q}\, v_{\vec p+\vec q} = 0, \qquad (20)$$

интегральный член в (20) возникает из H_1 и определяет вклад в собственно энергетическую часть

$$m = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec q\, g(\vec q)\, u_{\vec p+\vec q}\, v_{\vec p+\vec q}. \qquad (2I)$$

Из (I5),(I6),(20),(2I) следует

$$\left.\begin{aligned} u_{\vec p}^2 &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{|\vec p|}{(m^2+|\vec p|^2)^{1/2}}\right), \\ v_{\vec p}^2 &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{|\vec p|}{(m^2+|\vec p|^2)^{1/2}}\right) \end{aligned}\right. \qquad (22)$$

и интегральное уравнение для m

$$m = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d\vec p\, g(\vec p)\frac{m}{(m^2+|\vec p|^2)^{1/2}}. \qquad (23)$$

Помимо тривиального решения при $u_{\vec p}=1$, $v_{\vec p}=0$, уравнение (23) имеет нетривиальное решение, определяемое интегралом

$$1 = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int_0^\lambda d\vec p\,\frac{g(\vec p)}{(m^2+|\vec p|^2)^{1/2}}. \qquad (24)$$

Для упрощенной формы взаимодействия

$$g(\vec p) = \begin{cases} g, & 0<|\vec p|<\lambda \\ 0, & |\vec p|>\lambda \end{cases} \qquad (25)$$

$$\frac{8\pi^2}{g\lambda^2} = \frac{1}{x}\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x^2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}|, \qquad (26)$$
$$x=\frac{\lambda}{m}.$$

Поскольку правая часть (26) ограничена 1 , нетривиальное решение существует для $g>0$ и реальных $\varkappa$ в области

$$0 < \frac{8\pi^2}{g\lambda^2} < 1 . \tag{27}$$

Из (26) вытекает неаналитический по константе связи характер решения, так что приближение к нему не может быть получено суммированием конечного числа диаграмм ряда теории возмущений.

3. Инвариантные свойства спонтанно-нарушенного решения.

Введенные через канонические преобразования (I5) операторы α диагонализуют H_0' , определяющий новое основное состояние и спектр фермионов. Поскольку коэффициенты $u_{\vec p}, v_{\vec p}$ удовлетворяют условию (I6), для вещественных преобразований

$$u_{\vec p} = \cos\varphi_{\vec p} , \quad v_{\vec p} = \sin\varphi_{\vec p} \tag{28}$$

канонические преобразования (I5) представимы в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec p,\nu} &= U_{\vec p}\, a_{\vec p,\nu}\, U_{\vec p}^{-1} , \\ U_{\vec p} &= \exp\left(- A_{\vec p}\varphi_{\vec p}\right) , \\ A &= \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec p,\nu}\, a^{+}_{-\vec p,\nu} - \overset{*}{a}{}^{-}_{-\vec p,\nu}\, a^{-}_{\vec p,\nu} . \end{aligned} \tag{29}$$

Основное состояние $|\Phi>$ для H_0' , определяемое как состояние с нулевыми числами заполнения операторов α , выраженное через операторы a , имеет вид

$$|\Phi> = \prod_{\vec p,\nu}\left(u_{\vec p} - v_{\vec p}\, \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec p,\nu}\, a^{+}_{-\vec p,\nu}\right)|0> . \tag{30}$$

В случае нормировки на конечный объем (дискретное импульсное представление (I2)), норма оператора U как функция объема, ограничена, так что $|0>$ и $|\Phi>$ связаны унитарным преобразованием

$$|\Phi> = \prod_{\vec p} U_{\vec p}|0> . \tag{31}$$

Тогда из фоковского представления для a

$$a^{-}_{\vec p,\nu}|0> = 0 , \quad \overset{*}{a}{}^{-}_{\vec p,\nu}|0> = 0 , \tag{32}$$

следует фоковское представление для α

$$\alpha^{-}_{\vec p,\nu}|\Phi> = 0 , \quad \overset{*}{\alpha}{}^{-}_{\vec p,\nu}|\Phi> = 0 . \tag{33}$$

При нормировке на бесконечный объем последнее уже не имеет места

$$<0|\Phi> = \prod_{\vec p} u_{\vec p} = \exp \sum_{\vec p} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{2}\left(1 + \frac{|\vec p|}{(m^2+|\vec p|^2)^{1/2}}\right)\right| \xrightarrow[V\to\infty]{} \infty , \tag{34}$$

т.е. оператор U неограничен, и не существует унитарного преобразования, связывающего тривиальное и спонтанно-нарушенное решения: представления a и α ортогональны.

Вследствие этого вектор $|\Phi\rangle$ не существует в пространстве a представления, но $|\Phi\rangle$ – все еще циклический вектор в пространстве α представления.

Физический смысл подобной ситуации в том, что $|\Phi\rangle$ описывает основное состояние с отличной от нуля плотностью в бесконечном объеме, т.е. для него не существует фоковского состояния с нулевым числом частиц. В реальных случаях поэтому существен учет граничных эффектов.

Аналогичная ситуация имеет место для представлений α с различными фиксированными калибровками. В a-представлении градиентные преобразования (4) приводят к

$$\overset{*}{a}{}^{+}_{\vec p,\nu} \to e^{\pm i\alpha}\overset{*}{a}{}^{+}_{\vec p,\nu}, \qquad a^{-}_{\vec p,\nu} \to e^{\mp i\alpha} a^{-}_{\vec p,\nu}, \tag{35}$$
$$a^{+}_{\vec p,\nu} \to e^{\pm i\alpha} a^{+}_{\vec p,\nu}, \qquad \overset{*}{a}{}^{-}_{\vec p,\nu} \to e^{\mp i\alpha}\overset{*}{a}{}^{-}_{\vec p,\nu},$$

и

$$|\Phi\rangle \to |\Phi'\rangle = \prod_{\vec p,\nu}(u_{\vec p} - v_{\vec p}\, e^{\pm 2i\alpha}\overset{*}{a}{}^{+}_{\vec p,\nu}\, a^{+}_{-\vec p,\nu})|0\rangle. \tag{36}$$

Спонтанно-нарушенное решение (по своему построению) не обладает инвариантностью исходного $\mathcal{L}$: не инвариантно соответствующее ему основное состояние (36). Поскольку

$$\langle\Phi|\Phi'\rangle = \prod_{\vec p,\nu}(u^2_{\vec p} - e^{\pm 2i\alpha} v^2_{\vec p}) = \tag{37}$$
$$= \exp\Big(\sum_{\vec p} \ln(1 + (e^{\pm 2i\alpha} - 1)\, v^2_{\vec p})\Big)$$
$$\underset{V\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad \alpha \pm 2\pi n,$$

то не существует унитарного преобразования, связывающего представления α в разных калибровках. В каждом из пространств $\mathcal{H}_\alpha$ с фиксированной калибровкой существует единственный циклический вектор $|\Phi_\alpha\rangle$. Тогда инвариантной относительно (4) будет прямая сумма гильбертовых пространств

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\pi}\int \oplus\, \mathcal{H}_\alpha\, d\alpha \tag{38}$$

и калибровочно- инвариантное основное состояние

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int \oplus\, |\Phi_\alpha\rangle\, d\alpha\,. \tag{39}$$

Бесконечное произведение в (30) – суперпозиция различного числа пар операторов $N = 2n$ с определенной киральностью

$$|\Phi\rangle = \sum_{N=-\infty}^{\infty} C_N |\Phi_N\rangle \tag{40}$$

$$C_N|\Phi_N\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iN\alpha}\, |\Phi_\alpha\rangle\, d\alpha\,. \tag{41}$$

При преобразовании (4)

$$C_N \to e^{-iN\alpha} C_N\,. \tag{42}$$

Поэтому $|C_N| = C$

для любого N, (43)

т.е. все состояния $|\Phi_N\rangle$ физически эквивалентны (имеют одинаковую плотность энергии).

Четность состояния $|\Phi_N\rangle$ определяется четностью числа пар, поэтому $|\Phi_N\rangle$ не имеет определенной четности. Последнее обстоятельство тесно связано с градиентной инвариантностью: исходный $\mathcal{L}$ инвариантен относительно преобразований (4), и потому полная картина для спонтанно-нарушенного решения должна быть градиентно-инвариантной. Поэтому в эффективный лагранжиан, описывающий спонтанно-нарушенное решение, в фиксированной калибровке следует включить компенсирующие бозонные поля, восстанавливающие исходную симметрию. Введение таких бозонных полей не является, по существу, формальным приемом и связано с тем обстоятельством, что локальное 4-фермионное взаимодействие не учитывает эффектов запаздывания в системе: его можно трактовать как предельную форму для процессов 2-го порядка в модели с массивным промежуточным мезоном. Тогда остаточные эффекты, связанные с последействием, приводят к отщеплению от $|\Phi\rangle$ бозонной ветви возбуждений, связанной с коллективными флуктуациями плотности фермион-антифермионных пар. В терминах $\mathcal{L}_{eff}$ – это бозонные поля, взаимодействующие с массивными фермионами, что приводит к эффективной перенормировке масс фермионов и восстанавливает исходную градиентную инвариантность решения. Поскольку преобразование (4) меняет четность $|\Phi_N\rangle$, $\mathcal{L}_{eff}$ включает скалярные и псевдоскалярные бозонные поля и в фиксированной калибровке $\alpha=0$ имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{eff} = {} & \frac{i}{2}:\left(\bar{\Psi}(x)\gamma^n\frac{\partial\Psi}{\partial x^n} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x^n}\gamma^n\Psi(x)\right): + \frac{1}{2}:\frac{\partial G}{\partial x^n}\frac{\partial G}{\partial x_n}: - \\ & - \frac{\mu^2}{2}:G^2: + \frac{1}{2}:\frac{\partial\pi}{\partial x^n}\frac{\partial\pi}{\partial x_n}: + g_s:\bar{\Psi}(x)\Psi(x)G(x): + \\ & + ig_\pi:\bar{\Psi}(x)\gamma_5\Psi(x)\pi(x): + h:\left(G^2(x)+\pi^2(x)\right)^2:\end{aligned} \tag{44}$$

Величины масс фермионов и бозонов являются функциями α, однако физическая перенормированная масса фермиона не зависит от α. В двумерном пространстве скалярных и псевдоскалярных полей преобразования (4) индуцируют унитарные преобразования

$$\varphi = \begin{pmatrix} G \\ \pi \end{pmatrix} \to \varphi' = U_\alpha\varphi, \tag{45}$$

$$j = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}\Psi \\ i\bar{\Psi}\gamma^5\Psi \end{pmatrix},$$

$$U_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

и $\mathcal{L}_{int}$ можно записать в инвариантной форме

$$\mathcal{L}_{int} = gj\varphi . \tag{46}$$

Указанные обстоятельства, связанные с градиентной инвариантностью, являются следствием общего требования для спонтанно-нарушенного решения /2/ при введении квазисредней следует зафиксировать определенное "направление", снимающее вырождение, так что в отличие от обычных средних, которые инвариантны относительно соответствующей группы преобразований, квазисредние обладают лишь свойством ковариантности. При преобразовании соответствующей квазисредней следует подвергнуть такому же преобразованию вектор, фиксирующий "направление", с тем чтобы значение квазисредней не менялось.

Нарушение градиентной инвариантности спонтанно-нарушенного решения непосредственно связано с использованием канонических преобразований в форме (I5), что отражается в изменении коэффициентов $u_{\vec p}, v_{\vec p}$ при преобразованиях (4).

Градиентно-инвариантная форма модели сохраняется при использовании обобщенных канонических преобразований, в которых коэффициенты $u_{\vec p}, v_{\vec p}$ уже не являются c-числами, а операторами, действующими в пространстве $\oplus|\Phi_N\rangle$. В силу (4),(I5),(35) для операторов α

$$\overset{*}{\alpha}{}^{+}_{\vec p,\nu} \to u_{\vec p}\, e^{\pm i\alpha} \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec p,\nu} + v_{\vec p}\, e^{\mp i\alpha} \overset{*}{a}{}^{-}_{-\vec p,\nu}, \quad \alpha^{-}_{\vec p,\nu} \to u_{\vec p}\, e^{\mp i\alpha} a^{-}_{\vec p,\nu} + v_{\vec p}\, e^{\pm i\alpha} a^{+}_{-\vec p,\nu},$$

$$\alpha^{+}_{\vec p,\nu} \to u_{\vec p}\, e^{\pm i\alpha} a^{+}_{\vec p,\nu} - v_{\vec p}\, e^{\mp i\alpha} a^{-}_{-\vec p,\nu}, \quad \overset{*}{\alpha}{}^{-}_{\vec p,\nu} \to u_{\vec p}\, e^{\mp i\alpha} \overset{*}{a}{}^{-}_{\vec p,\nu} - v_{\vec p}\, e^{\pm i\alpha} \overset{*}{a}{}^{+}_{-\vec p,\nu}, \tag{47}$$

коэффициенты обобщенного канонического преобразования определяются равенствами

$$\hat u_{\vec p} = u_{\vec p}, \quad \hat u^{*}_{\vec p} = u_{\vec p},$$
$$\hat v_{\vec p} = R v_{\vec p}, \quad \hat v^{*}_{\vec p} = R^{*} v_{\vec p}, \tag{48}$$

где $R\,|0,N\rangle = |0,N-1\rangle$,
$R^{*}|0,N\rangle = |0,N+1\rangle$,

так что преобразования (47) заменяются на

$$\overset{*}{\alpha}{}^{+}_{\vec p,\nu} = \hat u_{\vec p}\, \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec p,\nu} + \hat v^{*}_{\vec p}\, \overset{*}{a}{}^{-}_{-\vec p,\nu} \to e^{\pm i\alpha} \overset{*}{\alpha}{}^{+}_{\vec p,\nu}, \quad \alpha^{-}_{\vec p,\nu} = \hat u_{\vec p}\, a^{-}_{\vec p,\nu} + \hat v_{\vec p}\, a^{+}_{-\vec p,\nu} \to e^{\mp i\alpha} \alpha^{-}_{\vec p,\nu},$$

$$\alpha^{+}_{\vec p,\nu} = \hat u_{\vec p}\, a^{+}_{\vec p,\nu} - \hat v_{\vec p}\, a^{-}_{-\vec p,\nu} \to e^{\pm i\alpha} \alpha^{+}_{\vec p,\nu}, \quad \overset{*}{\alpha}{}^{-}_{\vec p,\nu} = \hat u_{\vec p}\, \overset{*}{a}{}^{-}_{\vec p,\nu} - \hat v_{\vec p}\, \overset{*}{a}{}^{+}_{-\vec p,\nu} \to e^{\mp i\alpha} \overset{*}{\alpha}{}^{-}_{\vec p,\nu}, \tag{47}$$

т.е. операторы α преобразуются аналогично операторам a.

Указанные подходы к вопросу о градиентной инвариантности являются альтернативными. Целесообразность использования их диктуется рамками рассматриваемых вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, "Введение в теорию квантованных полей". "Наука", М., 1973.
2. Н.Н.Боголюбов, "Квазисредние в задачах статистической механики". Препринт ОИЯИ, 1451, Дубна 1963.
   Сб. "Статистическая физика и квантовая теория поля". Москва, "Наука", 1973.
3. А.А.Славнов, "Перенормировка калибровочно-инвариантных теорий". ЭЧАЯ т.5 № 3 (1974).
4. Y.Nambu.G.Jonua-Lasinio Phys.Rev.122, 345,(1961)
   Phys.Rev.124, 246,(1961)
   J.C.Fisher Phys.Rev.129, 1414,(1963)
   Б.А.Арбузов, А.Н.Тавхелидзе, Р.Н.Фаустов, ДАН 139, 345, 1961.
5. В.Гейзенберг и др. сб. "Нелинейная квантовая теория поля". М., 1959.
6. Н.Н.Боголюбов, В.В.Толмачев, Д.В.Ширков. "Новый метод в теории сверхпроводимости". М., 1958.
   Н.Н.Боголюбов. "Избранные труды", т.III, Киев, "Наукова думка", 1971.
7. Н.Н.Боголюбов. ЖЭТФ 34, 58 (1958)
   Nuovo Cim. 7, 794 (1958)

Рукопись поступила в издательский отдел
22 апреля 1976 года.