ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 9723

М.И.Широков

СКОРОСТЬ СИГНАЛА И ГРАДИЕНТНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

1976

P2 - 9723

М.И.Широков

СКОРОСТЬ СИГНАЛА
И ГРАДИЕНТНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Направлено в "Annals of Physics"

Широков М.И.

P2 - 9723

Скорость сигнала и градиентная инвариантность

Внешний ток, локализованный в области V_S, может изменить наблюдаемую в области V_D, находящейся на расстоянии R от V_S, только спустя время R/C после включения тока. Этот принцип причинности действительно выполняется для таких наблюдаемых, как поля E и H. Число электронов в V_D (или квадрат модуля волновой функции $U(x)$ электрона) ведет себя причинно только при надлежащем определении этой величины. Фаза $U(x)$ меняется макронепричинно, но это изменение имеет характер градиентного преобразования $U(x) \to U(x) \exp ie\lambda(x)$ и поэтому должно считаться ненаблюдаемым.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Shirokov M.I.

P2 - 9723

Signal Velocity and Gauge Invariance

An external current, localized in a volume V_S, can induce a change of any absêrvable in V_D only when the time R/C will elapse after the current switching on, R being the distance between V_S and V_D. This causality principle is justified for such quantum electrodynamics observables as field intensities E and H. The number of electrons in V_D (or square of the modulus of the electron wave function $U(x)$) behave (macro) causally only if this quantity is defined properly. The phase of $U(x)$ changes macroacausally but it has the form of a gauge transformation $U(x) \to U(x) \exp ie\lambda(x)$. If the latter is considered to be unobservable then any electrodynamics signals travel not faster than light and vice versa.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

I. Введение

Обычно считается, что локальность коммутационных соотношений для потенциалов A_μ и электронно-позитронного поля ψ означает, что скорость сигнала не может превосходить скорости света. Но A_μ и ψ не являются непосредственно наблюдаемыми величинами. Напряженности полей $\vec{E}(x)$, $\vec{H}(x)$ и плотность тока $j_\mu(x)$ тоже имеют локальные коммутации (с A_μ, ψ и друг с другом), и их интегралы по конечным областям можно наблюдать. Но существуют операторные плотности, интегралы которых могут быть измерены, однако коммутаторы этих плотностей с локальным оператором $\vec{E}(x)$ не являются локальными и даже макролокальными, см. (5) далее. Напомним также, что все градиентно-инвариантные формулировки квантовой электродинамики оказываются нелокальными теориями, см., например[I-5].

Поэтому задача о скорости сигнала в квантовой электродинамике заслуживает специального рассмотрения. Существует много работ, посвященных разрешению трудностей этой задачи, в частности, работы Э. Ферми, М. Фирца, С. Ма, Б. Ферретти. Критический обзор ранних исследований и список ссылок см. в[6] (этот список следует дополнить такими работами, как[7-I0]). В[6,II,I2] была предложена следующая постановка задачи о скорости сигнала.

Сигнал генерируется некоторым внешним током J_μ, локализованным в объеме V_S. Он включается в произвольно выбираемый момент t_S. Приход сигнала в объем V_D (см. рис. на стр.7) может быть зарегистрирован посредством измерения любой наблюдаемой в V_D: $\vec{E}$, H, числа электронов в V_D и т.п. Однако измеряемая величина, например E, может изменяться со временем, даже если ток не был включен (мы допускаем произвольные состояния Φ системы до момента t_s). Это изменение может быть названо "фоновым". Сигнал приходит в $V_\mathcal{D}$ в тот момент времени, когда распределение по E начинает отличаться от "фонового". Чтобы найти эту разность распределений, надо вычислить среднее значение и прочие моменты E

$$\langle U_J(t,t_s)\varphi, E^n(\vec{x}) U_J(t,t_s)\varphi\rangle - \langle U(t,t_s)\varphi, E^n(\vec{x}) U(t,t_s)\varphi\rangle = \langle \varphi, [E_J^n(\vec{x},t) - E^n(x,t)]\varphi\rangle, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Здесь $U_J(t,t_s)$ и $E_J(\vec{x},t)$ -оператор эволюции системы и гейзенберговский оператор электрического поля в случае, когда ток включался; $U(t,t_s)$ и $E(x,t)$ – те же операторы в случае, когда J_μ не включался. Проще вычислять не U_J и U, а разности гейзенберговских операторов вида $E_J - E$. В[11,12] было показано, что $E_J(\vec{x},t)$ точно равно $E(\vec{x},t)$, если $\vec{x} \in V_s$ и $t - t_s < R/c$ (R - расстояние между V_s и $V_\mathcal{D}$). Поэтому распределение по электрическому полю изменяется внешним током только спустя время R/c после его включения. Магнитное поле H и плотность тока j_μ имеют такое же причинное поведение.

Было показано в[11,12], что существуют величины, поведение которых нельзя назвать даже макропричинным. Одна из них – число электронов в $V_\mathcal{D}$. Она была определена с помощью оператора плотности числа электронов[1]. Подобные операторы обсуждались Вайтманом

[1]Изложенная постановка задачи о передаче сигнала отличается от других (см., например[8,9]) в следующих пунктах: а) Детектор может измерять не только полевые наблюдаемые (E и H , например) но и наблюдаемые, присущие корпускулярному аспекту теории. б) Для вычисления изменения наблюдаемой, вызванного внешним током, мы вычитаем "фон" (другой способ вычисления этого изменения намечен в[10], раздел 7). в) Источник и детектор могут содержать любое число электронов, которые могут быть связаны произвольными постоянными внешними потенциалами. Важность в) подчер-

и Швебером (см. (53) и (54) в[13]. Они рассматривали разные определения координаты частицы. Здесь будет использоваться та координата $\vec{x}$, которая естественно возникает в теории поля. Выбор координаты несущественен, поскольку нам нужен интеграл от плотности по макроскопически большому объему $V_\mathcal{D}$. Действительно, переход к другой, скажем, ньютон-вигнеровской координате $\vec{q}$ осуществляется с помощью функции $\langle \vec{x} | \vec{q} \rangle$, которая экспоненциально мала при $|\vec{x} - \vec{q}| >> \hbar/mc$.

В квантовой электродинамике в качестве оператора плотности числа электронов нельзя использовать $\psi^{(-)+}(x)\psi^{(-)}(x)$, где $\psi^{(-)}$ – та часть электронно-позитронного поля ψ в лоренцевской калибровке, которая уничтожает электроны. Причина состоит в том, что этот оператор не коммутирует с оператором $\mathcal{L}$ дополнительного условия Лоренца $\mathcal{L}\varphi = 0$. Здесь $\mathcal{L}$ равен или $\partial_\mu A_\mu$ (форма Ферми дополнительного условия, используемая Дираком[1]) или $(\partial_\mu A_\mu)^{(+)}$ (форма Гупта-Блейлера). Дирак называет оператор O "физическим", если $[\mathcal{L}, O]\varphi = 0$. Любая наблюдаемая должна быть "физической"[2] (обратное неверно). Операторы ψ и A_μ лоренцевской калибровки не являются "физическими" (они градиентно-неинвариантны). Чтобы построить "физическую" плотность числа электронов, нужен "физи-

Продолжение сноски[1]
кивается в Приложении к[11,12] и в примечании[7] этой статьи.

[2]См. § 77 в[1]. Иллюстрируем сказанное там двумя замечаниями а) Пусть φ – физически допустимый вектор, т.е. $\mathcal{L}\varphi = 0$. Если $[\mathcal{L}, O] = 0$, то вектор $\varphi_0 = O\varphi$ –тоже допустимый: $\mathcal{L}\varphi_0 = \mathcal{L}O\varphi = O\mathcal{L}\varphi = 0$. б) Собственные вектора O являются физически допустимыми, если $[\mathcal{L}, O] = 0$: в таком случае они могут быть собственным вектором $\mathcal{L}$ с нулевым собственным значением.

ческий оператор электронно-позитронного поля. Такие операторы известны. Примерами "физических" операторов могут служить операторы φ и $A_\perp$ кулоновской калибровки (см. § 80 в/I/):

$$\varphi(\vec{x},t) = \psi(\vec{x},t)\, exp\left[-ie\, U(\vec{x},t)\right] \qquad (I)$$

$$\vec{A}_\perp(\vec{x},t) = \vec{A}(\vec{x},t) - \vec{\nabla}\, U(\vec{x},t) \qquad (2)$$

$$U(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3y\ div\ \vec{A}(\vec{y},t)/|\vec{x}-\vec{y}|\ .$$

В Приложении показывается, в каком смысле φ и $A_\perp$ являются градиентно-инвариантными операторами.

Оператор числа электронов в V_ϑ был определен в/II,I2/ с помощью плотности

$$N^{(-)}(x) = \varphi^{(-)+}(x)\,\varphi^{(-)}(x)\ . \qquad (3)$$

Именно для этого "физического" оператора было получено макронепричинное поведение. Другим оператором с непричинным поведением является плотность импульса электронно-позитронного поля

$$\vec{P}(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi^+(x)(-i\vec{\nabla})\,\varphi(x,t) + \text{э.с.}\right]. \qquad (4)$$

В/II,I2/(4) было интерпретировано как оператор градиента фазы (в точке $\vec{x}$) волновой функции электрона $u(\vec{x})$.(Заметим,что среднее значение $N^{(-)}(x)$ в одноэлектронном состоянии равно $|u(\vec{x})|^2$).

С помощью коммутатора

$$\left[\varphi(\vec{x},t),\ \vec{E}(\vec{y},t)\right] = \frac{e}{4\pi}\,\varphi(\vec{x},t)\,\vec{\nabla}\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \qquad (5)$$

(см./I,II,I2/) можно показать, что перестановки $[N^{(-)}(\vec{x},t),\ E_k(\vec{y},t)]$ и $[P_i(\vec{x},t),\ E_k(\vec{y},t)]$ макронелокальны.

В разделе 3 мы обсудим другие возможные определения числа и импульса электронов.

В разделе 2 будет показано, что непричинные изменения $N^{(-)}$ и $P(x)$ имеют вид градиентных преобразований особого рода.

На основании общепринятого положения о ненаблюдаемости обычных градиентных изменений мы заключаем в разделе 4, что эти непричинные изменения ненаблюдаемы. Эта аргументация может быть обращена: градиентные изменения не могут быть наблюдаемы потому, что в противном случае мы получили бы противоречие с принципом релятивистской причинности.

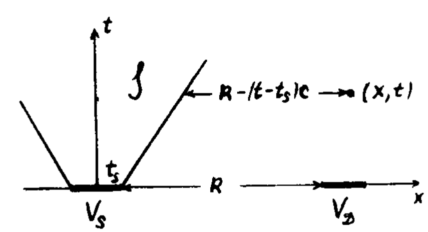
2. Квазиградиентные преобразования

Непричинное поведение операторов (3) и (4) может быть получено следующим простым способом.

В приложении к/II,I2/ были выведены точные соотношения:

$$\psi_J(\vec{x},t) = \psi(\vec{x},t)\ ;\qquad A_{J\mu}(\vec{x},t) = A_\mu(\vec{x},t)\ ,\ (\vec{x},t)\notin \mathcal{J}\ . \qquad (6)$$

Они верны для точек $(\vec{x},t)$, лежащих вне будущего светового конуса $\mathcal{J}$, построенного на области локализации J_μ (см. рис.), т.е. (x,t) должно удовлетворять $(\vec{x}-\vec{x}_s)^2 - (t-t_s)^2 > 0$ для всех $x_s \in V_s$.



Гейзенберговские операторы ψ_J и $A_{J\mu}$ в (6) являются решениями гейзенберговских уравнений, содержащих внешний ток J_μ в уравнении для $A_{J\mu}$:

$$\Box A_{J\mu} = -\left(j_{J\mu} + J_\mu\right).$$

Операторы ψ и A_μ -решения таких же уравнений, но без J_μ .

С помощью (6) и (I), (2) получаем

$$\varphi_J(x) = \psi_J e^{-ieU_J} = \psi\, e^{-ieU_J} = \varphi(x)\, e^{ie(U-U_J)} \qquad (7)$$

$$\vec{A}_{J\perp}(x) - \vec{A}_{\perp}(x) = \vec{\nabla}(U - U_J), \qquad x \notin \mathcal{J}. \tag{8}$$

Заметим, что дивергенция правой части (8) действительно равна нулю, потому что оператор

$$\lambda(\vec{x},t) = U(\vec{x},t) - U_J(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int d^3y \; div\left[\vec{A}_J(\vec{y},t) - A(\vec{y},t)\right] / |\vec{x}-\vec{y}| \tag{9}$$

удовлетворяет уравнению $\Delta\lambda(\vec{x},t) = 0$, если $(\vec{x},t) \notin \mathcal{J}$ (для доказательства надо использовать (П.2) из Приложения и (6)). В Приложении λ выражено в терминах операторов φ и φ_J кулоновской калибровки см. (П.6)[3]. Первый член в разложении $\lambda = \sum_n e^n \lambda_n$ по заряду e равен

$$\lambda_0(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int d^3y \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k} \int d^4z \, \mathcal{D}_{ret}(y-z) J_k(z), \quad y_0 = t. \tag{10}$$

Теперь с помощью (7) можно получить изменение плотности импульса (4), вызванное внешним током

$$\vec{P}_J(x) - \vec{P}(x) = e\,\varphi^+(x)\,\varphi(x)\,\vec{\nabla}\lambda(x), \qquad x \notin \mathcal{J}. \tag{11}$$

Для вывода выражения для $N_J^{(-)} - N^{(-)}$ выделим из φ часть, уничтожающую электроны

$$\varphi^{(-)}(x) = \int d^3x \; \Pi^{(-)}(\vec{x},\vec{x}')\,\varphi(x'). \tag{12}$$

---

[3] Для получения (7), (8) мы использовали "нефизические" операторы ψ и A_μ только как удобные вспомогательные величины. Их можно рассматривать не как операторы, но как элементы некоторой некоммутативной алгебры с известными перестановочными соотношениями (для получения (6) не требуется какая-либо операторная реализация ψ и A_μ, см. Приложение к/II,I2/.

Проекционный оператор $\Pi^{(-)}$ определяется с помощью собственных функций u_n оператора $\mathcal{D} = -i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m - e(V_0 - \vec{\alpha}\vec{V})$ уравнения Дирака: $\mathcal{D}u_n = E_n u_n$, $E_n > 0$ (V_μ обозначает произвольный постоянный внешний потенциал, см. примечание на стр. 4)

$$\Pi^{(-)}(\vec{x},\vec{x}') = \sum_n u_n(\vec{x})\,u_n^+(\vec{x}') = -i\,S^{(-)}(\vec{x},t;\vec{x}',t) \tag{13}$$

$$\Pi^{(-)}(\vec{x},\vec{x}') \sim exp\left[-|\vec{x}-\vec{x}'|/\lambda_e\right], \qquad |\vec{x}-\vec{x}'| >> \lambda_e = h/mc \tag{14}$$

(λ_e - комптоновская длина волны электрона). Используя (I2), получаем

$$N_J^{(-)}(\vec{x},t) - N^{(-)}(\vec{x},t) = \int d^3x' \int d^3x'' \; \Pi^{(-)}(\vec{x}',\vec{x})\,\Pi^{(-)}(\vec{x},\vec{x}'') \cdot \left[\varphi_J^+(\vec{x}',t)\,\varphi_J(\vec{x}'',t) - \varphi^+(\vec{x}',t)\,\varphi(\vec{x}'',t)\right]. \tag{15}$$

Из-за (I4) интегрирование по x' и x'' производится фактически по малой области радиуса $\sim\lambda_e$ и с центром в точке $\vec{x}$. Если $(\vec{x}-\vec{x}_s)^2 - (t-t_s)^2 >> \lambda_e^2$ для всех $x_s \in V_s$, то можно заменить φ_J под интегралом на $\varphi\, exp\, ie\lambda$ согласно (7). С помощью разложения $\varphi = \sum_n e^n \varphi_n$ получаем $\varphi_J \cong \varphi_0(1 + ie\lambda_0)$, и поэтому

$$N_J^{(-)}(\vec{x},t) - N^{(-)}(\vec{x},t) = ie\left\{\int d^3x' \int d^3x'' \; \varphi_0^+(\vec{x}',t)\,\Pi^{(-)}(\vec{x}',\vec{x})\,\Pi^{(-)}(\vec{x},\vec{x}'')\,\varphi_0(\vec{x}'',t)\,\lambda_0(\vec{x}'',t) - э.с.\right\}. \tag{16}$$

Этот результат равен второй строке в (I8) в/II,I2/(там λ_0 было обозначено через $-W$, см. (I7) в/II,I2/). Как было показано в /II,I2/, первая строка (I8) не вносит вклада в макроакаузальное поведение $N^{(-)}$. Численная оценка правых частей (I6) и (II) была сделана в/II,I2/. Они пропорциональны t/R^3, т.е. ведут себя макроакаузально.

$$\varphi_J(x)=\varphi(x)\exp[ie\lambda(x)]\,,\quad \vec{A}_{J\perp}=\vec{A}_\perp+\vec{\nabla}\lambda;\quad x\notin \mathcal{J} \tag{17}$$

напоминают градиентное преобразование, ср., например, (П.3) в Приложении. Конечно, есть важные отличия: а) (17) верно только для $x\notin\mathcal{J}$ (оператор λ является гармонической функцией не везде, и поэтому он может убывать при $|\vec{x}|\to\infty$, не обращаясь тождественно в нуль, см. Приложение); б) (17) имеет динамическое происхождение: λ не произвольно, но определяется внешним током J_μ; в) уравнения теории не инвариантны относительно (17): гейзенберговские уравнения для φ_J и $\vec{A}_{J\perp}$ не совпадают с уравнениями для φ, $\vec{A}_\perp$ даже вне $\mathcal{J}$, поскольку все эти уравнения нелокальны.

Мы называем (17) квазиградиентными преобразованиями. Соотношения (11) и (16) выражают факт неинвариантности операторов $\vec{P}$ и $N^{(-)}$ относительно квазиградиентных преобразований. Выражение "оператор не является квазиградиентно-инвариантным" имеет тот же смысл, что и "оператор имеет непричинное поведение".

Возникает естественный вопрос: можно ли построить градиентно-инвариантные выражения для плотностей числа электронов и их импульса?

3. Квазиградиентно-инвариантные операторы числа и импульса электронов

Оператор $\varphi^{(-)+}\varphi^{(-)}$ не является квазиградиентно-инвариантным (КГИ), потому что $\varphi_J^{(-)}$ и $\varphi^{(-)}$ не связаны столь просто, как φ_J и φ, т.е. $\varphi_J=\varphi\, e x p\, i e\lambda$. Чтобы получить КГИ плотность числа электронов, попробуем изменить определение той части φ, которая уничтожает электроны.

$$\phi^{(-)}(\vec{x},t)=\int d^3x'\,\Pi^{(-)}(\vec{x},\vec{x}')\,\varphi(\vec{x}',t)\exp\Big[-ie\int_{\vec{x}}^{\vec{x}'}A_{\perp k}(\vec{\xi},t)\,d\xi_k\Big]. \tag{18}$$

Проектор $\Pi^{(-)}$ тот же, что и в (12). Интеграл по ξ берется по прямой, соединяющий точки $\vec{x}$ и $\vec{x}'$ (этот выбор пути интегрирования обсуждается ниже). Оператор (18) "физический", так как выражается через "физические" φ и $\vec{A}_\perp$. Из-за (14) только точки x', близкие к x, фигурируют в (18). Если $(\vec{x}-\vec{x}_s)^2-(t-t_s)^2\gg\lambda_e^2$, то можно подставить $\varphi_J\, exp(ie\lambda)$ вместо φ и $\vec{A}_{J\perp}-\vec{\nabla}\lambda$ вместо $\vec{A}_\perp$. Используя еще

$$\int_{\vec{x}}^{\vec{x}'}(\vec{\nabla}\lambda(\vec{\xi},t)\,d\vec{\xi})=\lambda(\vec{x}',t)-\lambda(\vec{x},t)\,,$$

получаем

$$\phi^{(-)}(\vec{x},t)\cong\int d^3x'\,\Pi^{(-)}(\vec{x},\vec{x}')\,\varphi_J(\vec{x}',t)\cdot$$
$$\cdot e^{-ie\lambda(\vec{x}',t)}\exp\Big[-ie\int_{\vec{x}}^{\vec{x}'}(\vec{A}_{J\perp}\,d\vec{\xi})\Big]e^{ie[\lambda(\vec{x}',t)-\lambda(\vec{x},t)]}= \tag{19}$$
$$=\phi_J^{(-)}(\vec{x},t)\exp[-ie\lambda(\vec{x},t)].$$

Поэтому плотность $\phi^{(-)+}\phi^{(-)}$ является КГИ с большой точностью. Прежде чем показывать, что этот факт означает макропричинное поведение этой плотности, заметим, что $\phi^{(-)}$ действительно можно истолковать как оператор, уничтожающий электрон. Если положить в (18) $e=0$, то $\phi^{(-)}$ совпадёт с $\varphi^{(-)}$, см. (12), так что в нулевом приближении $\phi^{(-)}$ имеет ту же корпускулярную интерпретацию, что и $\varphi^{(-)}$. Интересно, что существует соотношение

$$\varphi=\phi^{(-)}+\phi^{(+)},$$

где $\phi^{(+)}$ определено аналогично (18), только $\Pi^{(-)}$ заменяется на $\Pi^{(+)}=S_p\, v_p v_p^+$ (v_p - собственные функции $\mathcal{D}$ с $E_p<0$). Это соотношение следует из условия полноты собственных функций $\mathcal{D}$: $\Pi^{(-)}(\vec{x},\vec{x}')+\Pi^{(+)}(\vec{x},\vec{x}')=\delta(\vec{x}-\vec{x}')$.

Чтобы исследовать как зависит от времени разность $\phi_J^{(-)+}\phi_J^{(-)}-\phi^{(-)+}\phi^{(-)}$, выразим $\phi^{(-)}$ и затем $\phi^{(-)+}\phi^{(-)}$ через операторы лоренцевской калибровки. Вставляя (I) и (2) в (8) получаем

$$\phi^{(-)}(x,t) = e^{-ie\mathcal{U}} \int d^3x' \, \Pi^{(-)}(\bar{x},\bar{x}') \, \psi(\bar{x}',t) \exp\left[-ie\int_x^{x'} (\vec{A}\, d\vec{\xi})\right]$$

$$\phi^{(-)+}(\bar{x},t)\,\phi^{(-)}(\bar{x},t) = \int d^3y' \int d^3y'' \, \psi^{+}(\bar{y}',t) \exp\left[ie\int_{\bar{x}}^{\bar{y}'} (\bar{A}\, d\bar{\xi})\right] \times \tag{20}$$

$$\times \Pi^{(-)}(\bar{y}',\bar{x})\,\Pi^{(-)}(\bar{x},\bar{y}'') \exp\left[-ie\int_{\bar{x}}^{\bar{y}''} (\bar{A}\, d\bar{\xi})\right] \psi(\bar{y}'',t). \tag{21}$$

Пусть $(t-t_s) < R/c$ и $\bar{x} \in V_\mathcal{D}$, т.е. $|\bar{x}-\bar{x}_s| \geq R$. Величина (2I) не равна точно $\phi_J^{(-)+}\phi_J^{(-)}$, потому что есть точки y', y'' в (2I), которые принадлежат $\mathcal{S}$ и для которых (6) не имеет места. Их расстояние от точки $\bar{x}$ равно или больше $(R-(t-t_s)c)$, см. рис. на стр. 7. Ввиду (I4) в подынтегральное выражение (2I) они входят с весом $\sim \exp\left[-(R-(t-t_s)c)/\lambda_c\right]$. Поэтому

$$\phi_J^{(-)+}(\bar{x}_\mathcal{D},t)\,\phi_J^{(-)}(\bar{x}_\mathcal{D},t) - \phi^{(-)+}(\bar{x}_\mathcal{D},t)\,\phi^{(-)}(\bar{x}_\mathcal{D},t) \sim \exp\left[-(R-(t-t_s)c)/\lambda_e\right]. \tag{22}$$

Можно рассматривать (22) как определение понятия "макропричинное поведение $\phi^{(-)+}\phi^{(-)}$". В этом случае не имело бы смысла говорить о микропричинности, поскольку нельзя локализовать электрон в области с размерами $\lesssim \lambda_e$. Результат (22) точен в том смысле, что он верен во всех порядках теории возмущений , как и (6).

По-видимому, не существует КГИ плотности импульса спинорного поля, которое было бы удовлетворительным с физической точки зрения. Для обоснования этого утверждения обсудим сначала следующее выражение для плотности импульса:

$$\vec{K}(x) = \frac{1}{2}\left[\eta^{+}(x)(-i\vec{\nabla})\,\eta(x) + \text{э. с}\right] \tag{23}$$

$$\eta(x) \equiv \psi(x) \exp\left[-ie\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} (\bar{A}_\perp d\bar{\xi})\right] = \psi(x)\exp\left[-ie\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} (\bar{A}\, d\bar{\xi})\right]. \tag{24}$$

Интегралы в (24) берутся вдоль прямой, соединяющей некоторую произвольно выбранную точку $\vec{x}_0$ и точку $\bar{x}$. Легко видеть, что $\vec{K}(x) = \vec{K}_J(x)$, если $x \notin \mathcal{S}$, а точка $\vec{x}_0$ взята внутри $V_\mathcal{D}$, например, (в таком случае применимы равенства (6)). Заметим, что интегралы $K_i(t) = \int d^3x\, K_i(\vec{x},t)$ коммутируют должным образом – $[K_i, K_j] = 0$ – как компоненты импульса. Действительно, из (24) следует, что η, η^+ удовлетворяют тем же соотношениям антикоммутации, что и ψ, ψ^+ или ψ, ψ^+. Поэтому равенство $[K_i, K_j] = 0$ может быть доказано так же, как для свободного спинорного поля.

Точка $\vec{x}_0$ может быть отодвинута на бесконечность (причинное поведение (23) от этого не испортится, если это сделано вдоль направления от V_S к $V_\mathcal{D}$). После этого все линии интегрирования будут параллельны некоторому направлению $\vec{n}_0$. Вместо таких путей интегрирования можно взять семейство криволинейных траекторий (обобщение на пространственно-подобные пути недопустимо, потому что тогда нельзя вычислять одновременные коммутации типа $[K_i, K_j]$, $i,j = 1,2,3$). При всех таких определениях интеграл $\int^{\bar{x}}(\bar{A}\, d\bar{\xi})$ является однозначной функцией точки $\vec{x}$ [4], которая зависит еще

---

[4] Мандельстам имеет в виду другое определение $\int^{x}(\bar{A}\, d\bar{\xi})$/3/. Вычисляя градиентно-инвариантную производную (см. (2.II) в/3/) или $\partial/\partial x_1 \int^{x}(\bar{A}\, d\bar{\xi}) \cong \left[\int^{\bar{x}+\Delta x_1} - \int^{\bar{x}}\right]/\Delta x_1$, $\Delta x_1 \to 0$, он определяет интеграл $\int^{\bar{x}+\Delta x_1}$ как сумму $\int^{\bar{x}} + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\Delta x_1}$, где второй интеграл берется по прямой, соединяющей $\bar{x}$ и $\bar{x}+\Delta x_1$. Интеграл $\int^{x}(\bar{A}\, d\bar{\xi})$ не является однозначной функцией $\bar{x}$, если допускается такая вариация пути интегрирования. Согласно нашему определению, $\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}+\Delta x_1} - \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}}$ отличается от $\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\Delta x_1} \cong A_1 \Delta x_1$ на интеграл от $\operatorname{rot} A$ по площади треугольника с вершинами $\bar{x}_0$, $\bar{x}$, $\bar{x}+\Delta x_1$. Поэтому $\vec{\nabla}_x \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} (\bar{A}\, d\bar{\xi}) \neq \vec{A}(x)$.

и от выбора $\vec{x}_o$ или направления $\vec{n}_o$. Подчеркнем, что $\vec{x}_o$ или $\vec{n}_o$ являются новыми элементами теории, которых в ней раньше не было. Теперь коммутатор

$$\int_V d^3y \left[\eta(x,t),\, E_\kappa(y,t) \right] \equiv \int_V d^3y \left[\psi \exp[-ie\int(\vec{A}\,d\vec{\xi})),\, E_\kappa(y,t) \right] \quad (25)$$

не равен нулю, если путь интегрирования пересекает объем V. Значение (25) в таком случае не уменьшается с увеличением расстояния между x и V, ср. (5). Заметим, что и $\vec{K}(x)$ будет иметь абсурдно непричинное поведение, если $\vec{x}_o$ выбрано внутри V_S. Этим явлениям трудно придать физический смысл. Дирак в [14] пробовал это сделать, используя понятие "силовой линии Фарадея". Но эта попытка подразумевает существенное изменение основ теории.

Подчеркнем, что определение (21) не требует введения каких-либо новых элементов в теорию. В приложении А к работе [15] прямо показывается, что интеграл $\int_{\vec{x}}^{\vec{y}}(\vec{A}\,d\vec{\xi})$ должен браться по прямой, соединяющей $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если не вводится никаких новых векторов в дополнение к имеющимся (т.е. $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{A}$).

Представляется, что невозможно построить КГИ плотность импульса без введения новых теоретических элементов. В пользу этого утверждения можно привести такой аргумент. Рассмотрим простую систему: внешний ток – электромагнитное поле – нерелятивистский электрон во внешнем потенциале (в качестве детектора сигнала). В [II,I2] было показано, что оператор $m\dot{q} = p - eA_\perp(q)$ имеет причинное поведение, он является КГИ. Тогда канонический импульс электрона $\vec{p}$ не является КГИ, поскольку $\vec{A}_\perp$ не КГИ. Возможно ли построить некоторый оператор $\vec{k}$, который был бы КГИ и удовлетворял бы одновременно коммутациям? $[k_x, k_y] = 0$? . Нам удалось показать, что это невозможно, если искать $\vec{k}$ в классе функций от операторов $\vec{q}$, $m\dot{\vec{q}}$, $\vec{E}(x)$, $\vec{H}(x)$, которые

составляют полный набор операторов модели и все являются КГИ (отметим, что такая постановка задачи означает, что $\vec{k}$ ищется в классе операторов, которые могут описывать "одетый" в некотором смысле электрон).

Может быть, следует использовать $m\dot{\vec{q}}$ как оператор, соответствующий наблюдаемому импульсу электрона, несмотря на $[m\dot{q}_x, m\dot{q}_y] \neq 0$? Главное возражение против этого предложения заключается в том, что оно никак не решает нашей трудности. Ведь ее можно сформулировать как проблему непричинного поведения фазы волновой функции электрона $u(\vec{q})$. Причинное поведение $m\dot{q}$ не дает ничего нового сверх уже установленного в [II,I2] факта причинного поведения распределения по координате электрона $\vec{q}$, т.е. квадрата модуля $u(\vec{q})$.

4. Ненаблюдаемость фазы электронной волновой функции

Сформулируем, что следует понимать под выражением "градиентные изменения ненаблюдаемы".

Пусть есть два набора операторов ψ, A и ψ', A', связанных градиентным преобразованием

$$\psi' = \psi \exp ie\chi \quad , \quad A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi . \qquad (26)$$

Построим из ψ, A_μ набор M операторов, которые исчерпывают все наблюдаемые. Точно так же из ψ', A'_μ построим M'. Пусть Φ описывает физическое состояние. Наблюдаемые, как правило, не будут иметь определенных значений в Φ, но они будут иметь некоторые определенные распределения в Φ. По определению изменение (26) ненаблюдаемо, если распределения операторов M в Φ <u>такие</u> же, как операторов M' [5])

[5])Распределения совпадают, если совпадают все моменты M и M'. Можно дать разные варианты более точных определений по аналогии

Прокомментируем это определение. Ненаблюдаемость (26) не следует из градиентной инвариантности уравнений теории, потому что из последней не следует ненаблюдаемость (26) для начального состояния. Однако можно показать, что из ненаблюдаемости (26) для любого t вытекает градиентная инвариантность динамики. Разумеется, A_μ и A'_μ соответствуют одним и тем же $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Однако в теории есть и другие наблюдаемые, - например, скорости высвечивания атомов. Можно придумать взаимодействия, не инвариантные относительно (26) (например, слабое взаимодействие с производными от электронного поля). Поэтому следует рассматривать ненаблюдаемость (26) как независимый постулат теории (ср. стр. 2201-2202 в /16/).

Квазиградиентные изменения (17) имеют отличия от градиентных (см. текст после формулы (17)). Но (17) является только частным случаем (26) с точки зрения наблюдателя, находящегося вместе со своими приборами в $V_\mathcal{D}$ и не имеющего возможности рассматривать что-либо вне $V_\mathcal{D}$. Поэтому ненаблюдаемость (17) представляется только частным следствием вышеупомянутого постулата. Если это так, то невозможно наблюдать квазиградиентные акаузальные изменения (16) плотности $N^{(-)}(x) = \varphi^{(-)+}\varphi^{(-)}$. Другими словами, наблюдаемое число электронов в $V_\mathcal{D}$ описывается целым классом "физических" операторов $\int d^3x\, N_\lambda^{(-)}(x)$, где плотности N_λ получаются одна из другой преобразованиями (17) с разными λ. Удобнее описывать эту наблюдаемую одним оператором $\int d^3x\, \phi^{(-)+}\phi^{(-)}$ (см (21)), который квазиградиентно-инвариантен с достаточной точностью. Таким образом, мы можем рассматривать число электронов в $V_\mathcal{D}$ как наблюдаемую с макропричинным поведением.

Непричинное изменение (11) плотности электронного импульса или фазы электронной волновой функции $u(x)$ (см. Введение) тоже должно считаться ненаблюдаемым[6)] (в отличие от плотности числа электронов $|u(x)|^2$, у нас нет удовлетворительного квазиградиентно-инвариантного определения фазы).

Вышеизложенную аргументацию можно обратить. Уже отмечалось, что ненаблюдаемость изменений фазы электронной волновой функции является дополнительным постулатом теории, не вытекающим из более фундаментальных принципов. Однако, если его частный случай - ненаблюдаемость $u(x) \to u(x)\exp ie\lambda$, $\Delta\lambda = 0$, - был бы неверным, то получилось бы, как мы показали, противоречие с фундаментальным принципом релятивистской причинности.

Благодарю за обсуждения Д.А. Киржница, Б.Н. Валуева и И.В. Полубаринова, который высказывал предположение, что непричинные изменения имеют градиентный характер.

Продолжение сноски со стр. 14.

с формулировками gauge independence, gauge invariance и т.п., приведенными на стр. 2216-2217 в /16/.

6) Микропричинное поведение плотности числа электронов является еще одним аргументом в пользу ненаблюдаемости этого изменения фазы (хотя и не совсем независимым от постулата ненаблюдаемости (26)). Дело в том, что (22) верно в рамках теории, способной описывать довольно сложные устройства для регистрации сигнала, см. пункт в) в примечании 1). Поэтому (22) означает, что концентрация электронов не может измениться пока $t - t_s < R/c$ в любой части устройства, которое могло бы регистрировать непричинное изменение фазы. В частности, не будут изменяться токи в фотоумножителях, счетчиках и т.п. частях этого устройства.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Кулоновская калибровка как градиентно-инвариантная формулировка квантовой электродинамики

Кулоновская и родственные ей калибровки считаются градиентно-инвариантными формулировками теории (см., например, /1,5,17/). Действительно, оператор электронно-позитронного поля φ в кулоновской калибровке, см. (1), является инвариантным относительно (26), если χ стремится к нулю при $|\vec{x}| \to \infty$ так, что

$$\int d^3y \, \mathrm{div\,grad}\, \chi(y,t)/|\vec{x}-\vec{y}| = \int d^3y \, \chi(y,t) \Delta_y \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -4\pi \chi(\vec{x},t) \tag{П.1}$$

(т.е., если можно интегрировать по частям). В (П.1) использовано соотношение

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) \, . \tag{П.2}$$

Поперечный вектор-потенциал $\vec{A}_\perp$, см. (2), тоже инвариантен при (26) ввиду (П.1).

Стоит отметить, что φ неинвариантно при (26), если χ не зависит от $\vec{x}$, например, если $\chi(\vec{x},t) = a + b t$ (такая функция удовлетворяет $\Box \chi = 0$ [7]).

Аналогичные заключения получатся, если работать непосредственно в рамках кулоновской калибровки. Попробуем написать градиентное преобразование φ и $A_\perp$:

$$\varphi'(\vec{x},t) = \varphi(\vec{x},t)\, e^{ie\chi_c(\vec{x},t)} \, , \quad \vec{A}_\perp' = \vec{A}_\perp + \vec{\nabla}\chi_c \, . \tag{П.3}$$

Чтобы $\vec{A}_\perp'$ осталось поперечным ($\mathrm{div}\, A_\perp' = 0$), функция $\chi_c(\vec{x},t)$ должна при всех $\vec{x}$, t удовлетворять уравнению $\mathrm{div\,grad}\,\chi_c = \Delta\chi_c = 0$, т.е. должна быть гармонической функцией. Обычно в теории поля принимается, что поля должны исчезать при $|\vec{x}| \to \infty$ (имеется в виду, конечно, исчезновение всех матричных элементов). Обязательность этого условия для вектор-потенциала можно поставить под сомнение (он не является непосредственно наблюдаемой величиной). Но если все же мы потребуем, чтобы $\vec{A}_\perp'$ наряду с $\vec{A}_\perp$ исчезало при $|\vec{x}| \to \infty$, то гармоническая функция χ_c тоже должна исчезать (или стремиться к константе). В таком случае χ_c равна всюду нулю (или константе). Чтобы исключить случай $\chi_c = f(t)$, заметим, что электрическое поле в кулоновской калибровке

$$E(\vec{x},t) = -\partial A_\perp(\vec{x},t)/\partial t - \mathrm{grad}\, \frac{1}{4\pi} \int d^3y \; \varphi^+\varphi/|\vec{x}-\vec{y}|$$

инвариантно при (П.3), только если $\partial\chi_c/\partial t = 0$.

Итак, мы заключаем, что нетривиальное градиентное преобразование (П.3) с $\chi_c \neq const$ запрещено в кулоновской калибровке.

---
[7] Я благодарен В.Н. Грибову, обратившему мое внимание на это обстоятельство.

Квазиградиентная инвариантность электрического поля

Выразим оператор λ, см (9), через операторы кулоновской калибровки.

Уравнения лоренцевской калибровки для $\vec{A}_J$ и $\vec{A}$ –

$$\Box \vec{A}_J = -(\vec{j}_J + \vec{J}) \, , \quad \Box \vec{A} = -\vec{j} \tag{П.4}$$

– могут быть переписаны в форме, учитывающей начальное условие: $A_J(x,t)$, $A(x,t)$ и их временные производные при $t=0$ должны совпадать с одними и теми же шредингеровскими операторами $A(x,0)$ и $\dot{A}(x,0)$ (сейчас мы считаем $t_s = 0$, так что $\vec{J} = 0$ при $t \leq 0$).

$$\vec{A}_J(x) = \vec{A}_0(x) + \int d^4z \, \mathcal{D}_{ret}(x-z)[\vec{j}_J(z) + \vec{J}(z)] \tag{П.5}$$

$$\vec{A}(x) = \vec{A}_0(x) + \int d^4z \, \mathcal{D}_{ret}(x-z)\, \vec{j}(z) \qquad x \equiv (\vec{x},t)$$

$$\vec{A}_0(x) \equiv \int d^3y \, [\dot{\mathcal{D}}(x-y)\, A(y) - \mathcal{D}(x-y)\, \dot{A}(y)] \, , \quad y_0 = 0 \, .$$

Правые части (П.5) удовлетворяют (П.4) и одновременным канонически перестановочным соотношениям (как и $\vec{A}_0$). Вставляя (П.5) в (9), интегрируя по частям и используя уравнение $\operatorname{div}\vec{j} = -\partial j_0/\partial t$, получаем

$$\lambda(\bar{x},t) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\frac{d^3y}{|\bar{x}-\bar{y}|}\int d^4z\,\frac{\partial}{\partial y_0}\,\mathcal{D}_{ret}(y-z)\left[J_0(z)+j_{J0}(z)-j_0(z)\right] \qquad (\text{П}.6)$$

(здесь $y_0 = t$). В (П.6) можно положить $j_{J0} = ie\,\varphi_J^+\varphi_J,\ j_0 = ie\varphi^+\varphi$.
С помощью (П.6) и уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}\mathcal{D}_{ret}(y-z) = \Delta\mathcal{D}_{ret}(y-z) + \delta^4(y-z)$$

получаем для $(\bar{x},t)\notin\mathcal{S}$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{d^3y}{|\bar{x}-\bar{y}|}\left[J_0(\bar{y},t)+j_{J0}(\bar{y},t)-j_0(\bar{y},t)\right]. \qquad (\text{П}.7)$$

Используя (П.7), теперь можно доказать квазиградиентную инвариантность электрического поля кулоновской калибровки

$$\vec{E}_J(x,t) = -\partial\vec{A}_{J\perp}(x,t)/\partial t - \vec{\nabla}\frac{1}{4\pi}\int d^3y\left[J_0(y,t)+j_{J0}(y,t)\right]/|\bar{x}-\bar{y}| =$$

$$= E(x,t)\,,\quad (\bar{x},t)\notin\mathcal{S}. \qquad (\text{П}.8)$$

Литература:

1. П.А.М. Дирак. Принципы квантовой механики.М., ГИФМЛ, 1960.
2. B.S.DeWitt. Phys.Rev., 125,2189 (1962).
3. S.Mandelstam. Ann.of Phys., 19, 1 (1962).
4. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. ЖЭТФ 43, 1365 (1962).
5. C.L.Hammer, R.H.Good. Ann.of Phys., 12, 463 (1961).
6. М.И. Широков. ОИЯИ,Р2-8022, Дубна, 1974.
7. J.Petzold. Annalen der Phys., 31, 381 (1974).
8. D.Gromes. Z.Physik, 236, 276 (1970).
9. И.В. Полубаринов. ОИЯИ,Р2-7894, Р2-8362, Дубна, 1974.
10. J.S.Bell. The Theory of Local Beables, sect.7, TH 2053 CERN, 1975.
11. М.И. Широков. ОИЯИ,Е2-8587, Дубна, 1975.
12. М.И. Широков. ЯФ 23, 1133 (1976).
13. A.S.Wightman, S.S.Schweber. Phys.Rev., 98, 812 (1955).
14. P.A.M.Dirac. Can.Journ. of Phys., 33, 659 (1955).
15. D.G.Boulware. Phys.Rev., 151, 1024 (1966).
16. F.Strocchi, A.S.Wightman. Journ.Math.Phys., 15, 2198 (1974).
17. F.J.Belinfante. Phys.Rev., 128, 2832 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 апреля 1976 года.