ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 9714

Н.А.Черников

УРАВНЕНИЯ БОРНА-ИНФЕЛЬДА В ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ЭЙНШТЕЙНА

1976

P2 - 9714

Н.А.Черников

УРАВНЕНИЯ БОРНА-ИНФЕЛЬДА В ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ЭЙНШТЕЙНА

Направлено в ЖЭТФ

1. Постановка задачи

В единой теории поля Эйнштейна аффинная связность $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ задается через несимметричный тензор $g_{\alpha\beta}$ и его частные производные по координатам x^{γ} следующей системой уравнений [1]:

$$g_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}. \qquad /1/$$

В новых работах [2] по единой теории поля также принимаются уравнения /1/. С аффинной связностью и другими геометрическими понятиями, которые здесь встретятся, рекомендуем познакомиться по книге [3].

Во второй из работ [1] доказано, что

$$\Gamma^{\sigma}_{\sigma\gamma} + \Gamma^{\sigma}_{\gamma\sigma} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^{\gamma}}, \qquad /2/$$

где g - определитель матрицы $(g_{\alpha\beta})$. Следовательно, средняя связность

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}) \qquad /3/$$

эквиаффинна. Для вывода формулы /2/ Эйнштейн вводит тензор $\tilde{g}^{\alpha\beta}$, взаимный тензору $g_{\alpha\beta}$, так что

$$g_{\sigma\alpha}\tilde{g}^{\sigma\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha} = g_{\alpha\sigma}\tilde{g}^{\beta\sigma}, \qquad /4/$$

где δ^{β}_{α} - символ Кронекера. Эйнштейн не ставит знака "~" над взаимным тензором. Тем не менее мы ставим этот знак, чтобы не вступить в противоречие с нашими другими обозначениями. Очевидно, $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ равняется поделенному на g алгебраическому дополнению элемента $g_{\alpha\beta}$ в матрице $(g_{\alpha\beta})$. Равенства /4/ выражают известное правило Крамера для решения системы линейных уравнений. Умножим теперь /1/ на $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ и свернем произведение по индексам α и β. В результате получим

$$\tilde{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}=\delta_{\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma}+\delta_{\sigma}^{\beta}\Gamma_{\gamma\beta}^{\sigma}=\Gamma_{\sigma\gamma}^{\sigma}+\Gamma_{\gamma\sigma}^{\sigma}\ . \qquad /5/$$

По известному правилу дифференцирования определителя из /5/ получаем /2/. Мы остановились на выводе равенства /2/ потому, что нам потребуется как само равенство /2/, так и тензор $\tilde{g}^{\alpha\beta}$.

Чтобы получить /2/, требуется только одно условие: $g\neq 0$. Однако для существования решения системы /1/ нужно по крайней мере еще одно условие, а именно, $h\neq 0$, где h - определитель матрицы

$$h_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(g_{\alpha\beta}+g_{\beta\alpha}). \qquad /6/$$

Это утверждение доказано в третьей из работ /1/. Принимая оба условия $g\neq 0$, $h\neq 0$, мы найдем здесь ковектор кручения, т.е. следующую свертку:

$$S_{\alpha}=S_{\alpha\mu}^{\ \ \mu} \qquad /7/$$

тензора кручения

$$S_{\alpha\beta}^{\mu}=\frac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}-\Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}). \qquad /8/$$

2. *Преобразование системы уравнений /1/*

Рассмотрим риманово пространство N измерений с метрической формой $ds^2=h_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}(=g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta})$.

Как обычно в римановой геометрии, с помощью тензора $h_{\alpha\beta}$ и взаимного ему тензора $h^{\alpha\beta}$ будем опускать и поднимать индексы. Например,

$$S^{\alpha}=h^{\alpha\sigma}S_{\sigma}\ ,\qquad S_{\alpha}=h_{\alpha\sigma}S^{\sigma},$$

$$h_{\alpha\sigma}\phi^{\sigma\beta}=\phi_{\alpha}^{\beta}=\phi_{\alpha\sigma}h^{\sigma\beta},$$

$$T_{\alpha\beta\gamma}=T_{\alpha\beta}^{\sigma}h_{\sigma\gamma},\qquad T_{\alpha\beta}^{\mu}=T_{\alpha\beta\sigma}h^{\sigma\mu}\ . \qquad /9/$$

Рассматриваемое пространство снабдим связностью Кристоффеля, равной

$$\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\}=\frac{1}{2}h^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial h_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial h_{\sigma\beta}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}\right). \qquad /10/$$

Ковариантное дифференцирование с такой связностью будем обозначать буквой D. Например,

$$D_{\gamma}\phi_{\alpha\beta}=\frac{\partial\phi_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}-\left\{ {\sigma \atop \gamma\alpha} \right\}\phi_{\sigma\beta}-\left\{ {\sigma \atop \gamma\beta} \right\}\phi_{\alpha\sigma}\ . \qquad /11/$$

Антисимметричную часть тензора $g_{\alpha\beta}$ обозначим $\phi_{\alpha\beta}$:

$$\phi_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(g_{\alpha\beta}-g_{\beta\alpha}). \qquad /12/$$

Если $\phi_{\alpha\beta}=0$, то связность /10/ является решением системы уравнений /1/. Поэтому в общем случае естественно искать решение системы /1/ в виде суммы

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}=\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\}+T_{\alpha\beta}^{\mu}\ , \qquad /13/$$

в которой первое слагаемое является заданной связностью /10/, а второе - искомым тензором. Подставляя /13/ в /1/, получаем уравнение для тензора T:

$$T_{\beta\gamma\alpha}+T_{\gamma\alpha\beta}+\phi_{\beta}^{\sigma}T_{\gamma\alpha\sigma}-\phi_{\alpha}^{\sigma}T_{\beta\gamma\sigma}+\phi_{\alpha\beta\gamma}=0, \qquad /14/$$

где $\phi_{\alpha\beta\gamma}=D_{\gamma}\phi_{\alpha\beta}$ есть ковариантная производная /11/. Над всеми слагаемыми, входящими в равенство /14/, выполним операцию, превращающую тензор вида $T_{\alpha\beta\gamma}$ в тензор $T_{(\alpha\beta\gamma)}$, равный

$$T_{(\alpha\beta\gamma)}=\frac{1}{3}(T_{\alpha\beta\gamma}+T_{\gamma\alpha\beta}+T_{\beta\gamma\alpha}). \qquad /15/$$

Такая операция над тензором $\phi^{\sigma}_{\beta}T_{\gamma\alpha\sigma} - \phi^{\sigma}_{\alpha}T_{\beta\gamma\sigma}$ дает нуль. Поэтому из /15/ получаем следствие

$$2T_{(\alpha\beta\gamma)} + \phi_{(\alpha\beta\gamma)} = 0, \qquad /16/$$

так что

$$T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)}.$$

Подставляя это в /14/, приходим к системе уравнений

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \phi^{\sigma}_{\beta}T_{\gamma\alpha\sigma} - \phi^{\sigma}_{\alpha}T_{\beta\gamma\sigma} + \phi_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)}. \qquad /17/$$

Разобьем теперь тензор $T_{\alpha\beta\gamma}$ на части

$$P_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\alpha\gamma}) \quad \text{и} \quad S_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\alpha\gamma}). \qquad /18/$$

В результате из /17/ получим систему уравнений

$$P_{\alpha\beta\gamma} = \phi^{\sigma}_{\beta}S_{\gamma\alpha\sigma} - \phi^{\sigma}_{\alpha}S_{\beta\gamma\sigma}, \qquad /19/$$

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \phi^{\sigma}_{\beta}P_{\gamma\alpha\sigma} - \phi^{\sigma}_{\alpha}P_{\beta\gamma\sigma} + \phi_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)}, \qquad /20/$$

эквивалентную системе уравнений /1/ . Сразу же заметим, что тензор $S_{\alpha\beta\sigma}h^{\sigma\mu} = S^{\mu}_{\alpha\beta}$ есть тензор кручения /8/, поскольку $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} = T^{\mu}_{\alpha\beta} - T^{\mu}_{\beta\alpha}$. Что касается тензора $P^{\mu}_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta\sigma}h^{\sigma\mu}$, то он равняется разности

$$P^{\mu}_{\alpha\beta} = \mathring{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} - \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} \qquad /21/$$

средней связности /3/ и связности /10/. Из /16/, равно как из /19/ и /20/, следует, что

$$P_{(\alpha\beta\gamma)} = 0, \qquad /22/$$

$$2S_{(\alpha\beta\gamma)} + \phi_{(\alpha\beta\gamma)} = 0. \qquad /23/$$

В силу равенства /22/ уравнения геодезических

$$\frac{dx^{\mu}}{d\tau} = p^{\mu}, \quad \frac{dp^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta} = 0$$

имеют первый интеграл

$$(p,p) = g_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta} = h_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta},$$

равный квадрату массы частицы.

3. *Формула для свертки* $\phi^{\beta}_{\gamma}S^{\gamma}_{\alpha\beta}$

Из /21/, /3/ и /2/ следует равенство

$$P^{\mu}_{\alpha\mu} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{\alpha}} - \left\{ {\mu \atop \alpha\mu} \right\},$$

а из /10/ - равенство

$$\left\{ {\mu \atop \alpha\mu} \right\} = \frac{1}{2h}\frac{\partial h}{\partial x^{\alpha}}. \qquad /24/$$

Значит,

$$P^{\mu}_{\alpha\mu} = \frac{1}{2}\frac{h}{g}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{g}{h}\right). \qquad /25/$$

Так как

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\sigma}(\delta^{\sigma}_{\beta} - \phi^{\sigma}_{\beta}), \qquad /26/$$

то $g = hJ$, где J - определитель матрицы $(\delta^{\sigma}_{\beta} - \phi^{\sigma}_{\beta})$

$$J = \det(\delta^{\sigma}_{\beta} - \phi^{\sigma}_{\beta}). \qquad /27/$$

Из /25/ находим

$$P^{\mu}_{\alpha\mu} = h^{\beta\gamma}P_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\ln\sqrt{|J|}. \qquad /28/$$

С другой стороны, из равенства /19/ находим

$$h^{\beta\gamma}P_{\alpha\beta\gamma} = \phi^{\beta}_{\gamma}S^{\gamma}_{\alpha\beta}. \qquad /29/$$

Следовательно,

$$\phi^{\beta}_{\gamma}S^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\ln\sqrt{|J|}. \qquad /30/$$

4. *Система уравнений для тензора кручения*

Подставим теперь /19/ в /20/ и получим следующую систему уравнений для тензора кручения:

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \phi_{\alpha}^{\ \mu}\phi_{\gamma}^{\ \sigma} S_{\mu\beta\sigma} + \phi_{\beta}^{\ \nu}\phi_{\gamma}^{\ \sigma} S_{\alpha\nu\sigma} = \qquad /31/$$

$$= (\phi_{\alpha}^{\ \mu}\phi_{\eta}^{\ \nu}(S_{\nu\gamma\mu} + S_{\gamma\mu\nu}) + \phi_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)}.$$

Согласно /23/

$$S_{\nu\gamma\mu} + S_{\gamma\mu\nu} = -S_{\mu\nu\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\mu\nu\gamma)} .$$

Подставляя это в /31/, получаем

$$S_{\alpha\beta\gamma} + \phi_{\alpha}^{\ \mu}\phi_{\beta}^{\ \nu} S_{\mu\nu\gamma} + \phi_{\alpha}^{\ \mu}\phi_{\gamma}^{\ \sigma} S_{\mu\beta\sigma} + \phi_{\beta}^{\ \nu}\phi_{\gamma}^{\ \sigma} S_{\alpha\nu\sigma} = \Psi_{\alpha\beta\gamma}, \qquad /33/$$

где

$$\Psi_{\alpha\beta\gamma} = \phi_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{3}{2}\phi_{\alpha}^{\ \mu}\phi_{\beta}^{\ \nu}\phi_{(\mu\nu\gamma)} . \qquad /34/$$

Вместо того, чтобы решать систему уравнений /1/ с N^3 неизвестными $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, можно решать систему уравнений /33/ с $\frac{N^2(N-1)}{2}$ неизвестными $S_{\alpha\beta\gamma}$. Действительно, если известен тензор S, то из /19/ находим тензор P, а вместе с тем и связность

$$\Gamma^{\ \mu}_{\alpha\beta} = \{^{\ \mu}_{\alpha\beta}\} + P^{\ \mu}_{\alpha\beta} + S^{\ \mu}_{\alpha\beta} , \qquad /35/$$

удовлетворяющую системе уравнений /1/.

Для дальнейшего нам удобно записать систему уравнений /33/, подняв индекс γ:

$$S^{\ \gamma}_{\alpha\beta} + \phi^{\ \mu}_{\alpha}\phi^{\ \nu}_{\beta} S^{\ \gamma}_{\mu\nu} - \phi_{\alpha}^{\ \mu}\phi^{\ \gamma}_{\sigma} S^{\ \sigma}_{\mu\beta} - \phi_{\beta}^{\ \nu}\phi^{\ \gamma}_{\sigma} S^{\ \sigma}_{\alpha\nu} = \Psi^{\ \gamma}_{\alpha\beta} . \qquad /36/$$

5. *Справка об аффинорах*

Будем обозначать ϕ-аффинор, т.е. смешанный двухвалентный тензор с компонентами $\phi_{\alpha}^{\ \beta}$. Символ ϕ^n обозначает степень n аффинора ϕ. Единичный аффинор /компоненты которого представляются символом Кронекера $\delta_{\alpha}^{\ \beta}$ /, как и число 1, будем обозначать символом 1. Так, $\phi^{\circ} = 1$. Если F - число, то скалярный аффинор $F \cdot 1$ /он имеет компоненты $F\delta_{\alpha}^{\ \beta}$ / будем обозначать просто F.

Рассмотрим дальше характеристический полином $J(\rho)$ аффинора ϕ, равный

$$J(\rho) = \det(\rho\delta_{\alpha}^{\ \beta} - \phi_{\alpha}^{\ \beta}).$$

В частности, $J(1) = J$, где J есть /27/. Ввиду антисимметрии тензора $\phi_{\alpha\beta}$ полином $J(\rho)$ при четных $N = 2K$ содержит только четные степени аргумента ρ, а при нечетных $N = 2K+1$ - только нечетные. Таким образом, если $N = 2K$, то $J(\rho) = \Pi(\rho^2)$, а если $N = 2K+1$, то $J(\rho) = \rho\,\Pi(\rho^2)$, где $\Pi(\rho^2)$ в обоих случаях имеет вид

$$\Pi(\rho^2) = (\rho^2 - U_1)(\rho^2 - U_2)\dots(\rho^2 - U_K).$$

Согласно теореме Гамильтона-Кэли [4] аффинор является корнем своего характеристического многочлена, т.е. $J(\phi) = 0$.

Если все числа $U_1, \dots, U_K$ не равны 1 /т.е. если $J \neq 0$/, то существует аффинор $(1-\phi^2)^{-1}$. Подсчитаем его сначала при четных $N = 2K$. Разность $\Pi(1) - \Pi(\phi^2)$ делится без остатка на $1 - \phi^2$ /теорема Безу/. Следовательно,

$$\Pi(1) - \Pi(\phi^2) = Q(\phi^2)(1-\phi^2),$$

где $Q(\phi^2)$ - полином от ϕ^2. Так как $\Pi(\phi^2) = 0$ и $\Pi(1) = J$, то

$$\frac{1}{1-\phi^2} = \frac{Q(\phi^2)}{J}.$$

Если

$$\Pi(\rho^2) = \rho^{2K} + c_1\rho^{2K-2} + \dots + c_K, \qquad \text{то}$$

$$Q(\phi^2) = \phi^{2K-2} + b_1\phi^{2K-4} + \dots + b_{K-1}, \qquad \text{где}$$

$$b_1 = 1 + c_1, \quad b_2 = 1 + c_1 + c_2, \ldots,$$

$$b_{K-1} = 1 + c_1 + \ldots + c_{K-1}.$$

При нечетных $N = 2K+1$ имеем

$$\frac{\phi}{1-\phi^2} = \frac{\phi}{J} Q(\phi^2),$$

поскольку под знаком ϕ полином $\Pi(\phi^2)$ равняется нулю. Теперь находим при $N = 2K+1$

$$\frac{1}{1-\phi^2} = 1 + \frac{\phi^2}{1-\phi^2} = 1 + \frac{\phi^2}{J} Q(\phi^2).$$

Если все числа $U_1, \ldots, U_2$ по модулю меньше 1, то аффинор $(1-\phi^2)^{-1}$ можно разложить в ряд

$$\frac{1}{1-\phi^2} = 1 + \phi^2 + \phi^4 + \ldots .$$

В физически важном случае $N = 4$ характеристический полином имеет вид

$$\Pi(\rho^2) = (\rho^2 - u)(\rho^2 - v),$$

а следовательно,

$$\frac{1}{1-\phi^2} = \frac{1 - u - v + \phi^2}{(1-u)(1-v)}.$$

Далее, в физически важном случае тензор $h_{\alpha\beta}$ имеет сигнатуру /1, -1, -1, -1/. С помощью антисимметричного по всем значкам тензора $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$, причем $\epsilon^{0123}\sqrt{-h} = 1$,

введем дуальный к $\phi_{\alpha\beta}$ тензор $\phi^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\phi_{\mu\nu}$. Обозначим

$$F = \frac{1}{2}(\phi_\alpha{}^\alpha \phi_\beta{}^\beta - \phi_\beta{}^\alpha \phi_\alpha{}^\beta) = \frac{1}{2}\phi^{\alpha\beta}\phi_{\alpha\beta},$$

$$G = \frac{1}{4}\phi^{*\alpha\beta}\phi_{\alpha\beta} = \frac{\phi_{01}\phi_{23} + \phi_{02}\phi_{31} + \phi_{03}\phi_{12}}{\sqrt{-h}}.$$

Аффинор ϕ и аффинор ϕ^* связаны друг с другом двумя равенствами

$$\phi\phi^* = -G, \quad \phi^2 + F = \phi^{*2}.$$

Умножая второе из этих равенств на ϕ и пользуясь первым, получаем

$$\phi^3 + F\phi = -G\phi^*.$$

Умножая полученное равенство на ϕ, приходим к характеристическому уравнению

$$\phi^4 + F\phi^2 = G^2.$$

Таким образом,

$$u + v = -F, \qquad uv = -G^2.$$

Следовательно,

$$J = 1 + F - G^2,$$

$$\frac{1}{1-\phi^2} = \frac{1 + F + \phi^2}{1 + F - G^2} = \frac{1 + \phi^{*2}}{1 + F - G^2}.$$

Последнюю формулу можно получить, перемножив $1-\phi^2$ и $1+\phi^{*2}$. Наконец, имеем

$$\frac{\phi}{1-\phi^2} = \frac{\phi + F\phi + \phi^3}{1 + F - G^2} = \frac{\phi - G\phi^*}{1 + F - G^2}.$$

6. Формула для ковектора кручения

Умножим равенство /36/ на $(\phi^n)_\gamma^\beta$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, и свернем произведение по индексам β и γ. В результате получим

$$(\phi^n)_\gamma^\beta S_{\alpha\beta}^\gamma = (\phi^n)_\gamma^\beta \Psi_{\alpha\beta}^\gamma + (\phi^{n+2})_\gamma^\beta S_{\alpha\beta}^\gamma. \qquad /37/$$

Рассмотрим сначала случай, когда все числа $U_1, \ldots, U_K$ по модулю меньше 1. Просуммируем равенство /37/ по n от p до ∞ и получим

$$(\phi^p)_\gamma^\beta S_{\alpha\beta}^\gamma = \left(\frac{\phi^p}{1-\phi^2}\right)_\gamma^\beta \Psi_{\alpha\beta}^\gamma. \qquad /38/$$

Тензор $(\phi^n)^{\alpha\beta}$ симметричен при четных $n = 2k$ и антисимметричен при нечетных $n = 2k+1$. Поэтому

$$(\phi^{2k})_{\gamma}^{\beta}\Psi_{\alpha\beta}^{\gamma} = (\phi^{2k})^{\beta\gamma}\phi_{\alpha\beta\gamma} + \frac{3}{2}\phi_{\alpha}^{\mu}(\phi^{2k+1})^{\beta\gamma}\phi_{(\mu\beta\gamma)}, \qquad /39/$$

$$(\phi^{2k+1})_{\gamma}^{\beta}\Psi_{\alpha\beta}^{\gamma} = (\phi^{2k+1})^{\beta\gamma}\left[\frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)} - \phi_{\alpha\beta\gamma}\right]. \qquad /40/$$

Следовательно, выражение

$$T_{\alpha}^{(k)} = (\phi^{2k})_{\gamma}^{\beta}\Psi_{\alpha\beta}^{\gamma} - \phi_{\alpha}^{\mu}(\phi^{2k+1})_{\gamma}^{\beta}\Psi_{\alpha\beta}^{\gamma} \qquad /41/$$

равняется

$$T_{\alpha}^{(k)} = (\phi^{2k})^{\beta\gamma}\phi_{\alpha\beta\gamma} + \phi_{\alpha}^{\mu}(\phi^{2k+1})^{\beta\gamma}\phi_{\mu\beta\gamma}. \qquad /42/$$

Продифференцировав тождество

$$(\phi^{n+1})_{\alpha}^{\gamma} = (\phi^{n})_{\mu}^{\gamma}\phi_{\alpha}^{\mu},$$

получим

$$(\phi^{n})^{\beta\gamma}\phi_{\alpha\beta\gamma} = D_{\gamma}(\phi^{n+1})_{\alpha}^{\gamma} - \phi_{\alpha}^{\mu}D_{\gamma}(\phi^{n})_{\mu}^{\gamma}.$$

Подставив это выражение в /42/, получим

$$T_{\alpha}^{(k)} = (1-\phi^{2})_{\alpha}^{\mu}D_{\gamma}(\phi^{2k+1})_{\mu}^{\gamma} + \phi_{\alpha}^{\mu}D_{\gamma}(\phi^{2k+2} - \phi^{2k})_{\mu}^{\gamma}. \qquad /43/$$

Следовательно,

$$\sum_{k=p}^{\infty} T_{\alpha}^{(k)} = (1-\phi^{2})_{\alpha}^{\mu}D_{\gamma}\left(\frac{\phi^{2p+1}}{1-\phi^{2}}\right)_{\mu}^{\gamma} - \phi_{\alpha}^{\mu}D_{\gamma}(\phi^{2p})_{\mu}^{\gamma}. \qquad /44/$$

Но из формулы /38/ легко видеть, что

$$(\phi^{2p})_{\gamma}^{\beta}S_{\alpha\beta}^{\gamma} - \phi_{\alpha}^{\mu}(\phi^{2p+1})_{\gamma}^{\beta}S_{\mu\beta}^{\gamma} = \sum_{k=p}^{\infty} T_{\alpha}^{(k)}, \qquad /45/$$

где $T_{\alpha}^{(k)}$ есть /41/, а следовательно, и /43/. Значит, в частности, при $p=0$ имеем

$$S_{\alpha} - \phi_{\alpha}^{\mu}\phi_{\gamma}^{\beta}S_{\mu\beta}^{\gamma} = (1-\phi^{2})_{\alpha}^{\mu}D_{\gamma}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)_{\mu}^{\gamma}. \qquad /46/$$

Из формул /46/ и /30/ находим ковектор кручения в виде

$$S_{\alpha} = \frac{(1-\phi^{2})_{\alpha}^{\mu}}{\sqrt{|J|}}D_{\gamma}\left(\frac{\phi\sqrt{|J|}}{1-\phi^{2}}\right)_{\mu}^{\gamma}. \qquad /47/$$

В таком виде формула /47/ оказывается верной, и в общем случае $J \neq 0$. Чтобы доказать это, надо для аффиноров $(1-\phi^{2})^{-1}$ и $\phi(1-\phi^{2})^{-1}$ воспользоваться выражениями, приведенными в разделе /5/. На основании /37/ имеем

$$S_{\alpha} = \left[\frac{Q(\phi^{2})}{J}\right]_{\gamma}^{\beta}\Psi_{\alpha\beta}^{\gamma}$$

в случае $N=2K$ и

$$S_{\alpha} = \left[1 + \frac{\phi^{2}}{J}Q(\phi^{2})\right]_{\gamma}^{\beta}\Psi_{\alpha\beta}^{\gamma}$$

в случае $N=2K+1$. На основании той же формулы /37/ в обоих случаях имеем

$$\phi_{\gamma}^{\beta}S_{\alpha\beta}^{\gamma} = \left[\frac{\phi}{J}Q(\phi^{2})\right]_{\gamma}^{\beta}\Psi_{\alpha\beta}^{\gamma} = \left[\phi + \frac{\phi^{3}}{J}Q(\phi^{2})\right]_{\gamma}^{\beta}\Psi_{\alpha\beta}^{\gamma}.$$

Дальше составляем комбинацию /46/, которая равна

$$\frac{1}{J}\{T_{\alpha}^{(K-1)} + b_{1}T_{\alpha}^{(K-2)} + \ldots + b_{K-1}T_{\alpha}^{(0)}\}$$

в случае $N=2K$ и равна

$$T_{\alpha}^{(0)} + \frac{1}{J}\{T_{\alpha}^{(K)} + b_{1}T_{\alpha}^{(K-1)} + \ldots + b_{K-1}T_{\alpha}^{(1)}\}$$

в случае $N=2K+1$. Здесь $T_{\alpha}^{(K)}$ есть /41/. Пользуясь формулой /43/, в обоих случаях находим *

$$S_{\alpha} - \phi_{\alpha}^{\mu}\phi_{\gamma}^{\beta}S_{\mu\beta}^{\gamma} = (1-\phi^{2})_{\alpha}^{\mu}D_{\gamma}\left[\frac{\phi}{J}Q(\phi^{2})\right]_{\mu}^{\gamma}. \qquad /48/$$

Из формул /48/ и /30/ получаем ковектор кручения в виде

$$S_{\alpha} = \frac{(1-\phi^{2})_{\alpha}^{\mu}}{\sqrt{|J|}}D_{\gamma}\left[\frac{\phi}{\sqrt{|J|}}Q(\phi^{2})\right]_{\mu}^{\gamma}. \qquad /49/$$

Согласно разделу 5 формула /49/ совпадает с формулой /47/.

* Впрочем, если формула /48/ доказана для $N=2K+1$, то тем самым она доказана и для $N=2K$.

7. *Взаимный тензор* $\tilde{g}^{\alpha\beta}$

Взаимный тензор $\tilde{g}^{\alpha\beta}$, определенный условием /4/, равняется

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{1-\phi}\right)^{\alpha\beta},$$

так как

$$\tilde{g}_{\alpha}^{\ \beta} = h_{\alpha\sigma}\tilde{g}^{\sigma\beta} = \left(\frac{1}{1-\phi}\right)_{\alpha}^{\ \beta}.$$

Если обозначим

$$\tilde{h}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tilde{g}^{\alpha\beta} + \tilde{g}^{\beta\alpha}), \quad \tilde{\phi}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tilde{g}^{\alpha\beta} - \tilde{g}^{\beta\alpha}),$$

то

$$\tilde{h}^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{1-\phi^2}\right)^{\alpha\beta}, \quad \tilde{\phi}^{\alpha\beta} = \left(\frac{\phi}{1-\phi^2}\right)^{\alpha\beta}.$$

Следовательно, ковектор кручения /47/ равняется

$$S_{\alpha} = \frac{(1-\phi^2)_{\alpha\mu}}{\sqrt{|J|}} D_{\gamma}(\tilde{\phi}^{\mu\gamma}\sqrt{|J|}). \qquad /50/$$

Ввиду /24/ и антисимметрии тензора $\tilde{\phi}^{\mu\gamma}$

$$S_{\alpha} = \frac{(1-\phi^2)_{\alpha\mu}}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}(\tilde{\phi}^{\mu\gamma}\sqrt{|g|}). \qquad /51/$$

В число дифференциальных уравнений единой теории поля входят уравнения $S_{\alpha}=0$. Из формулы /51/ видно, что они эквивалентны уравнениям

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}(\tilde{\phi}^{\mu\gamma}\sqrt{|g|}) = 0. \qquad /52/$$

Между прочим, чтобы составить уравнения /52/, требуется только единственное условие $g \neq 0$.

8. *Уравнения Борна-Инфельда*

В физически важном случае

$$\frac{\phi\sqrt{|J|}}{1-\phi^2} = \frac{\phi}{\sqrt{|J|}} Q(\phi^2) = \frac{\phi - G\phi^*}{\sqrt{1+F-G^2}}.$$

Согласно формуле /49/

$$S_{\alpha} = \frac{\delta_{\alpha}^{\mu} - \phi_{\alpha}^{\ \nu}\phi_{\nu}^{\ \mu}}{\sqrt{1+F-G^2}} D_{\gamma} \frac{\phi_{\mu}^{\ \gamma} - G\phi^{*\ \gamma}_{\ \mu}}{\sqrt{1+F-G^2}}, \qquad /53/$$

а значит,

$$D_{\gamma}\frac{\phi_{\alpha}^{\ \gamma} - G\phi^{*\ \gamma}_{\ \alpha}}{\sqrt{1+F-G^2}} = \frac{\delta_{\alpha}^{\mu} + \phi^{*\ \nu}_{\ \alpha}\phi^{*\ \mu}_{\ \nu}}{\sqrt{1+F-G^2}} S_{\mu}. \qquad /54/$$

Из /53/ и /54/ следует, что уравнения Эйнштейна $S_{\alpha}=0$ эквивалентны уравнениям нелинейной электродинамики Борна-Инфельда

$$D_{\gamma}\frac{\phi_{\alpha}^{\ \gamma} - G\phi^{*\ \gamma}_{\ \alpha}}{\sqrt{1+F-G^2}} = 0 \qquad /55/$$

в римановом мире с метрической формой $ds^2 = h_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}$. Ввиду /24/ уравнения /55/ можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-h}} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left[\frac{\phi^{\mu\gamma} - G\phi^{*\mu\gamma}}{\sqrt{1+F-G^2}}\sqrt{-h}\right] = 0. \qquad /56/$$

Этот результат вместе с формулами /53/, /54/ и /47/ сообщен в нашем письме /6/.

9. *Формула для свертки* $(\phi^{2p+1})_{\gamma}^{\ \beta} S_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$

Не только при $p=0$, но и при всех $p=1,2,3,\ldots$ свертка $(\phi^{2p+1})_{\gamma}^{\ \beta} S_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$ является градиентом скалярной функции. Действительно, пусть $f = \lambda\phi(1-\lambda\phi^2)^{-1}$, где λ - комплексный параметр. Тогда

$$f_{\gamma}^{\ \beta}\Psi_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = f^{\beta\gamma}\left|\frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)} - \phi_{\alpha\beta\gamma}\right| = \frac{1}{2} f^{\beta\gamma}\phi_{\beta\gamma\alpha}.$$

Дальше ограничимся физически важным случаем, когда

$$f = \frac{\lambda\phi(1+\lambda\phi^{*2})}{1+\lambda F - \lambda^2 G^2} = \frac{\lambda\phi - \lambda^2 G\phi^*}{1+\lambda F - \lambda^2 G^2}.$$

Так как ковариантная производная D_{α} от метрического тензора $h^{\beta\gamma}$ и от объемного тензора $\varepsilon^{\mu\beta\gamma}$ равняется нулю, то

$$\phi^{\beta\gamma}\phi_{\beta\gamma\alpha} = \frac{\partial F}{\partial x^{\alpha}}, \quad \phi^{*\beta\gamma}\phi_{\beta\gamma\alpha} = \frac{\partial G}{\partial x^{\alpha}}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\lambda\phi}{1-\lambda\phi^2}\right)^{\beta}_{\gamma}\Psi^{\gamma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\ln(1+\lambda F-\lambda^2 G^2). \qquad /57/$$

Полагая $\lambda=1$, отсюда в силу /38/ получаем

$$\phi^{\beta}_{\gamma}S^{\gamma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\ln(1+F-G^2), \qquad /58/$$

что является частным случаем формулы /30/. Далее, из равенства /37/ следует

$$(\phi^{2p+3})^{\beta}_{\gamma}S^{\gamma}_{\alpha\beta}=\phi^{\beta}_{\gamma}S^{\gamma}_{\alpha\beta}-\sum_{k=0}^{p}(\phi^{2k+1})^{\beta}_{\gamma}\Psi^{\gamma}_{\alpha\beta}. \qquad /59/$$

Разложим /57/ в ряд по степеням λ. Имеем

$$\frac{\lambda\phi}{1-\lambda\phi^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\phi^{2k+1}\lambda^{k+1},$$

$$\ln(1+\lambda F-G^2)=\sum_{k=0}^{\infty}z_k\lambda^{k+1},$$

где

$$z_k=(-1)^k\sum_{s}\frac{(k-s)!}{s!(k+1-2s)!}G^{2s}F^{k+1-2s}.$$

Суммирование по s в формуле для z_k ведется от нуля до целой части числа $\frac{k+1}{2}$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем

$$(\phi^{2k+1})^{\beta}_{\gamma}\Psi^{\gamma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\phi^{2k+1})^{\beta\gamma}\phi_{\beta\gamma\alpha}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}z_k. \qquad /60/$$

Из /59/, /58/ и /60/ находим

$$(\phi^{2p+3})^{\beta}_{\gamma}S^{\gamma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left\{\ln(1+F-G^2)-\sum_{k=0}^{p}z_k\right\}.$$

Литература

1. *А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. т. II, Наука, М., 1966, статьи 79, 127, 130, 134, 138, 141, 143-146.*
2. *B.Kursunoğlu. Phys.Rev., D, v.9, No. 10, 2723-2745 /1974/.*
3. *А.П.Норден. Пространства аффинной связности. Гостехиздат, М.-Л., 1950.*
4. *Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. Гостехиздат, М., 1953.*
5. *M.Born and L.Infeld. Proc. Roy. Soc., A144, 425 /1934/.*
6. *Н.А.Черников. Препринт ОИЯИ, Р2-9681, Дубна, 1976.*

Рукопись поступила в издательский отдел 14 апреля 1976 года.