ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-97-88

В.П.Гусынин*, В.В.Корняк

ПОЛНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ДЕВИТТА–СИЛИ–ГИЛКИ E_4 ДЛЯ НЕМИНИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ИСКРИВЛЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Направлено в журнал «Фундаментальная и прикладная математика»

*Институт теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова, Киев, Украина

1997

1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем, начатое в [1, 2], аналитическое вычисление с помощью компьютера разложения ядра теплопроводности для эллиптических дифференциальных операторов на искривленных многообразиях и в присутствии произвольных внешних калибровочных полей. Коэффициенты в асимптотическом разложении диагональных матричных элементов ядра теплопроводности, называемые коэффициентами ДеВитта – Сили – Гилки (ДВСГ) [3, 4, 5], играют важную роль в квантовой теории поля, квантовой гравитации, спектральной геометрии и топологии многообразий. В терминах этих коэффициентов могут быть выражены многие важные величины, такие как эффективное действие, функции Грина и аномалии в квантовой теории поля [3, 4, 5, 6], индексы эллиптических операторов и инварианты многообразий в спектральной геометрии [7, 8]. Еще один пример: коэффициенты ДВСГ, вычисленные для оператора Штурма – Лиувилля, образуют иерархию высших уравнений Кортевега – де Фриза [9].

Хорошо известно, что для положительного эллиптического дифференциального оператора A порядка $2r$, действующего в пространстве гладких сечений векторного расслоения, базой которого является замкнутое компактное n-мерное многообразие M, имеет место следующее асимптотическое разложение ядра теплопроводности [4, 5, 7, 10]:

$$\langle x|e^{-tA}|x\rangle \sim \sum_{m\geq 0} \mathrm{E_m(x|A)t^{\frac{m-n}{2r}}}, \qquad \mathrm{t} \to 0_+ \,. \tag{1}$$

Коэффициенты $E_m(x|A)$ зависят от структуры оператора A и являются локальными ковариантными величинами определенной размерности, построенными из коэффициентных функций оператора A, кривизны (и кручения в общем случае) и их ковариантных производных. До настоящего времени наиболее полные результаты получены для оператора второго порядка

$$A = -\Box + X, \tag{2}$$

где $\Box = g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu$, D_μ – ковариантная производная, включающая в себя в общем случае различные связности (аффинная и спинорная связности, калибровочные поля), X – матричнозначная функция. Вычисления основаны на представлении ДеВитта для матричных элементов ядра теплопроводности

$$\langle x|e^{-tA}|x'\rangle = e^{-\frac{\sigma(x,x')}{2t}} D^{1/2}(x,x') \sum_{m=0}^{\infty} E_m(x,x'|A)t^{\frac{2m-n}{2}}, \tag{3}$$

где $\sigma(x,x')$ – геодезический интервал, равный половине квадрата расстояния вдоль геодезической между точками x и x', $D(x,x') = g^{-1/2}\det[-D_\mu D_{\nu'}\sigma](g')^{-1/2}$ – детерминант Ван Флека – Моретт, $g = \det g_{\mu\nu}$. Представление (3) при подстановке в уравнение теплопроводности, которому удовлетворяет ядро оператора $\exp(-tA)$, приводит к рекуррентным соотношениям для коэффициентов E_m. В случае оператора (2) явные выражения для пределов совпадения $E_m(x|A) \equiv E_m(x,x')|_{x=x'}$ вычислены для $m = 0,2,4,6,8$ [3, 5, 11, 12] (нечетные коэффициенты равны нулю для замкнутых многообразий, они, однако, зарезервированы для многообразий с границей). Наиболее полное выражение для E_8 получено Аврамиди [12] (частный случай скалярного поля с неминимальной конформной связностью рассмотрен в [13, 14]). Было рассмотрено также обобщение на случай пространств Римана – Картана [15]. Отметим, что в случае плоского пространства удается продвинуться значительно дальше в вычислении коэффициентов E_m (точнее $\mathrm{tr} E_m$), здесь имеются результаты вплоть до E_{10} [16]. Однако и в этом случае, по-видимому, достигнут уже предел возможности вычислений, не прибегая к помощи компьютеров. Естественно ожидать, что дальнейший прогресс связан с разработкой программ аналитических вычислений коэффициентов ДВСГ [1, 2, 17, 18]. Так, в [18] реализован алгоритм ДеВитта для оператора вида $-\Box + X$ в плоском пространстве на основе пакета программ REDUCE и FORM.

Алгоритм ДеВитта не применим, однако, к операторам порядка выше второго и к так называемым неминимальным дифференциальным операторам, лидирующий член которых не является степенью оператора Лапласа. Простейшим примером неминимального оператора является оператор Навье-Ламе в теории упругости $\mu\Delta\vec{V} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla\vec{V})$ (константы Ламе λ и μ характеризуют упругую среду). Г. Вейль, по-видимому, был первым, кто исследовал асимптотику спектра подобных операторов [19]. Неминимальные операторы аналогичного типа появляются при квантовании калибровочных и гравитационных полей в произвольных калибровках [20]. Например, квантование поля Янга – Миллса в произвольной фоновой калибровке приводит к оператору

$$A^{ab}_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}\Box^{ab} - (\frac{1}{\alpha} - 1)D^{ac}_{\mu}D^{cb}_{\nu} - 2f^{acb}G^{c}_{\mu\nu}. \tag{4}$$

где ковариантная производная D_μ включает потенциал A_μ внешнего поля, $G_{\mu\nu}$ – напряженность поля, f^{abc} – структурные константы соответствующей алгебры Ли. Аналогично квантование электромагнитного поля во внешнем гравитационном поле приводит к оператору

$$A_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\Box - (\frac{1}{\alpha} - 1)D_\mu D_\nu + R_{\mu\nu} \tag{5}$$

(для аналогичного оператора в квантовой гравитации см.[21]). Обычно операторы (4), (5) рассматривают в калибровке Феймана $\alpha = 1$, где они сводятся к минимальному дифференциальному оператору (в частности, (5) сводится в этом случае к оператору Ходжа – де Рама на 1-формах), и затем применяют метод ДеВитта. В ряде работ для вычисления $\mathrm{tr} E_m$ использовалась специфическая зависимость, например, оператора (5) от параметра α [20, 22]. Исследование зависимости ядра теплопроводности от калибровочного параметра α важно для выяснения возможной калибровочной зависимости гравитационной конформной аномалии [22].

Основная цель настоящей работы – вычисление коэффициентов разложения ядра теплопроводности для общего вида операторов со структурой (4), (5)

$$-g^{\mu\nu}\Box + aD^\mu D^\nu + X^{\mu\nu}, \tag{6}$$

где X – тензорное поле, a – скалярный параметр (индексы расслоенного пространства неявно подразумеваются). Параметр a должен удовлетворять условию $a < 1$ для положительной определенности главного символа и, соответственно, эллиптичности оператора

(6). Разложение (1) справедливо в равной мере и для неминимальных операторов [4]. Мы следуем здесь подходу, основанному на ковариантном обобщении техники псевдодифференциальных операторов [23], развитом в [24, 25, 26] (для обзора см. [27]). Как представляется, указанный подход является в настоящее время единственным, позволяющим проводить вычисления с операторами наиболее общего вида и произвольного порядка. В работах [1, 2] была разработана программа аналитических вычислений коэффициентов ДВСГ на компьютере, написанная на языке Си и использующая алгоритм, описанный в [24]. Последняя версия этой программы позволила впервые получить наиболее полное выражение для коэффициента E_4 оператора (6) (ранее только частные результаты были известны [20, 28, 29, 30]).

2. Описание алгоритма и его реализация

Опишем кратко алгоритм вычислений коэффициентов ДВСГ (подробнее см.[24, 27]).

Рассмотрим положительный эллиптический оператор, спектр которого содержится в области, охватываемой контуром C. Формула

$$e^{-tA} = \int_C \frac{i d\lambda}{2\pi} e^{-t\lambda}(A - \lambda)^{-1} \tag{7}$$

позволяет определить $\exp(-tA)$ через резольвенту оператора A. Для ковариантного обобщения метода псевдодифференциальных операторов воспользуемся представлением матричных элементов резольвенты оператора в виде

$$G(x, x', \lambda) \equiv \langle x|\frac{1}{A - \lambda}|x'\rangle = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n\sqrt{g(x')}} e^{il(x,x',k)}\sigma(x, x', k; \lambda). \tag{8}$$

где $\sigma(x, x', k; \lambda)$ – амплитуда, $l(x, x', k)$ – действительная фазовая функция, являющаяся бискаляром по отношению к общекоординатным преобразованиям, k – волновой вектор. Резольвента оператора A удовлетворяет уравнению $(A - \lambda)G = 1$, что, в свою очередь, дает уравнение для амплитуды

$$(A(x, D_a + iD_a l) - \lambda)\sigma(x, x', k; \lambda) = I(x, x'). \tag{9}$$

где $I(x, x')$ – функция параллельного переноса, несущая лоренцевские индексы, а также индексы расслоенного пространства. Ковариантным обобщением свойств фазы и функции параллельного транспорта на искривленные многообразия являются следующие условия [23]:

$$[\{D_{a_1} \ldots D_{a_m}\}l] = 0, \quad m > 1; \qquad [\{D_{a_1} \ldots D_{a_m}\}I] = 0, \quad m \geq 1. \tag{10}$$

где $\{\ldots\}$ означает симметризацию по всем индексам, а $[\ldots]$ – взятие предела совпадения при $(x = x')$. Уравнения (10) вместе с "начальными условиями" $[l] = 0, [D_a l] = k_a$ и $[I] = E$ (E – единичная матрица) позволяют вычислять пределы совпадения для несимметризованных ковариантных производных $[D_{a_1} \ldots D_{a_m} l]$ и $[D_{a_1} \ldots D_{a_m} I]$, которые находятся непосредственно из (10) приведением всех членов к одному упорядочению индексов с использованием тождества Риччи для ковариантных производных. Соответствующие выражения оказываются полиномами по тензорам кривизны R^a_{bcd}, W_{ab}, кручения T^a_{bc} и ковариантным производным от них. По существу, пределы совпадения $[D_{a_1} \ldots D_{a_m} l]$ и $[D_{a_1} \ldots D_{a_m} I]$ необходимо вычислить всего лишь один раз; в дальнейшем они могут использоваться при вычислении произвольных операторов. Введенные с помощью формул (10) функции $l(x, x', k)$ и $I(x, x')$ играют важную роль в так называемом внутреннем символическом исчислении, развитом в [23]. Они являются универсальными функциями и фактически именно через них проявляются геометрические свойства базового многообразия и расслоения.

Разлагая амплитуду σ по степеням однородности k, $\sigma = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m(x, x', k; \lambda)$, получаем из (9) рекуррентные соотношения для σ_m. Например, для оператора (6) они имеют вид

$$\begin{aligned}
&A^{ab}\sigma_{0bc} = I^a_c,\\
&A^{ab}\sigma_{1bc} + i\left[-g^{ab}(\Box l + 2D^d l D_d) + a(D^a D^b l + D^a l D^b + D^b l D^a)\right]\sigma_{0bc} = 0,\\
&A^{ab}\sigma_{mbc} + i\left[-g^{ab}(\Box l + 2D^d l D_d) + a(D^a D^b l + D^a l D^b + D^b l D^a)\right]\sigma_{(m-1)bc}\\
&+(-g^{ab}\Box + aD^a D^b + X^{ab})\sigma_{(m-2)bc} = 0, \quad m \geq 2,
\end{aligned} \tag{11}$$

где матрица

$$A^{ab} = g^{ab}(D^a l D_a l - \lambda) - aD^a l D^b l$$

– главный символ оператора (6). Решая рекуррентные соотношения, находим σ_m. Коэффициенты ДВСГ выражаются через пределы совпадения $[\sigma_m]$ с помощью формул [24, 27]

$$E_m(x|A) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n \sqrt{g}} \int_C \frac{i d\lambda}{2\pi} e^{-\lambda} [\sigma_m](x, k, \lambda) \equiv J([\sigma_m]). \tag{12}$$

Для широкого класса операторов интегралы в (12) могут быть выражены через гамма-функции и гипергеометрические функции. Типичный интеграл имеет вид [27]

$$\begin{aligned}
&J\Big(\frac{k^{2p} k_{a_1} \ldots k_{a_{2s}}}{(k^{2r} - \lambda)^l [(1-a)k^{2r} - \lambda]^m}\Big) =\\
&g_{\{a_1 \ldots a_{2s}\}} \frac{\Gamma((p+s+n/2)/r)}{(4\pi)^{n/2} 2^s r \Gamma(n/2+s) \Gamma(l+m)} F(m, (p+s+n/2)/r; l+m; a),
\end{aligned} \tag{13}$$

где $g_{\{a_1 \ldots a_{2s}\}}$ – симметризованная сумма произведений метрических тензоров. Так как m и l – целые числа, то гипергеометрическая функция в (13) может быть выражена через элементарные функции с помощью соотношения Гаусса

$$a(1-z)F(a+1, b; c; z) = (c-a)F(a-1, b; c; z) + (2a - c - az + bz)F(a, b; c; z), \tag{14}$$

и используя затем формулу [31]

$$\begin{aligned}
F(1, b; m; z) = (m-1)! \frac{(-z)^{1-m}}{(1-b)_{m-1}} \Big[(1-z)^{m-b-1} - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(b-m+1)_k}{k!} z^k\Big],\\
m = 1, 2, \ldots, \quad m - b \neq 1, 2, \ldots,
\end{aligned} \tag{15}$$

где $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$ – символ Похгаммера. В процессе упрощения тензорных выражений используются различные симметрийные свойства тензоров $R^a_{bcd}, T^a_{bc}, W_{ab}$, а также тождества Риччи

$$\begin{aligned}
[D_a, D_b]\varphi^{b_1 \ldots b_l}_{a_1 \ldots a_k} &= \sum_{i=1}^{l} R^{b_i}_{jab} \varphi^{b_1 \ldots b_{i-1} j b_{i+1} \ldots b_l}_{a_1 \ldots a_k} - \sum_{i=1}^{k} R^j_{a_i ab} \varphi^{b_1 \ldots b_l}_{a_1 \ldots a_{i-1} j a_{i+1} \ldots a_k}\\
&+ T^j_{ab} D_j \varphi^{b_1 \ldots b_l}_{a_1 \ldots a_k} + W_{ab} \varphi^{b_1 \ldots b_l}_{a_1 \ldots a_k},
\end{aligned} \tag{16}$$

Бьянки

$$\begin{aligned}
D_a R^b_{cde} + D_d R^b_{cea} + D_e R^b_{cad} + T^i_{ad} R^b_{cei} + T^i_{de} R^b_{cai} + T^i_{ea} R^b_{cdi} = 0,\\
D_a W_{bc} + D_b W_{ca} + D_c W_{ab} + W_{ai} T^i_{bc} + W_{bi} T^i_{ca} + W_{ci} T^i_{ab} = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

и циклическое тождество

$$R^a_{bcd} + R^a_{cdb} + R^a_{dbc} + D_b T^a_{cd} + D_c T^a_{db} + D_d T^a_{bc} + T^a_{bi} T^i_{cd} + T^a_{ci} T^i_{db} + T^a_{di} T^i_{bc} = 0 \tag{18}$$

(в настоящей работе мы не рассматриваем кручение, для соответствующих вычислений см. [1, 2]).

Описанный алгоритм был реализован на языке Си. Вся программа имеет длину около 10000 строк и состоит примерно из 200 различного рода функций для действий с тензорами и скалярами. Эти функции могут быть скомпилированы в две программы COLIM и DWSGCOEF. Программа COLIM вычисляет пределы совпадения функций l и I и записывает их на диск. Однажды вычисленные, эти пределы совпадения используются затем при вычислении различных операторов A.

Программа DWSGCOEF вычисляет коэффициенты E_m, осуществляя последовательно следующие операции:

1. *Считывание входной информации (оператор, порядок m, и т.д.).*
2. *Вычисление множества асимптотических операторов для построения рекуррентных соотношений.*
3. *Вычисление σ_m с помощью рекуррентных соотношений.*
4. *Взятие предела совпадений $[\sigma_m]$.*
5. *Интегрирование $[\sigma_m]$ для получения коэффициента E_m.*
6. *Подстановка тензорных выражений для $[D_{a_1} \ldots D_{a_k} l]$ и $[D_{a_1} \ldots D_{a_k} I]$ в E_m.*
7. *Сведение гипергеометрических функций к элементарным в случае неминимального оператора.*
8. *Вывод для E_m (и его следа в неминимальном случае).*

Для уменьшения "разбухания" выражений на промежуточных этапах вычислений мы используем стратегию почленного вычисления, т.е. основная часть вычислений (операции 4-6) применяется последовательно к одиночным слагаемым в σ_m, сгенерированным на этапе 3.

3. Вычисление E_4

Заметим, что коэффициент E_4 наиболее тесно связан именно с размерностью физического пространства-времени $n = 4$, поскольку индекс эллиптического оператора на многообразии размерности n выражается через E_n с помощью интегрирования. Вычисления коэффициента E_4 для оператора (6) проводились на компьютере Пентиум-75. Для полноты изложения приведем вначале выражение для E_2. В предыдущей версии программы [1, 2] ответ давался в гипергеометрических функциях. В настоящей версии встроен алгоритм приведения гипергеометрических функций к элементарным, основанный на формулах (14), (15).

$$E_2 = (4\pi)^{-\frac{n}{2}}\{-C_1X^{ab} - \frac{1}{4}C_2X^{ba} - C_3W^{ab} + C_4R^{ab} - \frac{1}{4}C_2g^{ab}X_i{}^i + C_5g^{ab}R\}, \qquad (19)$$

где

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{8a(\frac{n}{2}-1)_3}\left\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}(4+4n-6a-3an) - 4 - 4n + 6a - 3an - 2an^2 + an^3\right\},\\
C_2 &= \frac{1}{2a(\frac{n}{2}-1)_3}\left\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}(-4+2a+an) + 4 - 2a + an\right\},\\
C_3 &= \frac{1}{4a(\frac{n}{2}-1)_2}\left\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}(8-an) - 8 + 8a - 3an\right\},\\
C_4 &= \frac{1}{24a(\frac{n}{2}-1)_3}\left\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}\left(12n - 12a - 8an - an^2 + 2a^2n + a^2n^2\right)\right.\\
&\quad \left. -12n + 12a + 8an - 5an^2\right\},\\
C_5 &= \frac{1}{48a(\frac{n}{2}-1)_3}\left\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}\left(-24 + 12a + 8an + an^2 - 2a^2n - a^2n^2\right)\right.\\
&\quad \left. +24 - 12a - an^2 + an^3\right\}.
\end{aligned}$$

Полное выражение для E_4 содержит 73 тензорных слагаемых с 55 различными скалярными коэффициентами и приведено в приложении. Здесь мы приведем только выражение для следа (по лоренцевским индексам) $\mathrm{tr_L}E_4$, которое уже содержит ряд новых слагаемых по сравнению с [29], где вычисления проводились в произвольной размерности пространства, но в отсутствие калибровочного поля и в пренебрежении членами с полной производной.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr_L}E_4 &= (4\pi)^{-\frac{n}{2}}\{ -C_1\Box X_i{}^i - C_2D_iD_jX^{ij} + C_3\left(X_i{}^iX_j{}^j + X_{ij}X^{ij}\right)\\
&\quad +C_4X_{ij}X^{ji} + C_5X_{ij}W^{ij} - C_6W_{ij}X^{ij} + C_7W_{ij}W^{ij} + C_8R_{ijkl}R^{ijkl}\\
&\quad -C_9R_{ij}X^{ij} - C_{10}R_{ij}R^{ij} + C_{11}\Box R + C_{12}R^2 - C_{13}RX_i{}^i\}, \qquad (20)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{96a^2(\frac{n}{2}-2)_4}\left\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\left(96 - 96a - 48an + 8a^2n + 6a^2n^2 + a^2n^3\right)\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad \left. -96(1-a)^2 + 32a^2n + 2a^2n^2 - 5a^2n^3 + a^2n^4\right\},\\
C_2 &= \frac{1}{48a^2(\frac{n}{2}-2)_4}\left\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\left(-48n + 48a + 24an - 4a^2n + a^2n^3\right)\right.\\
&\quad \left. +48n - 48a - 72an + 24an^2 + 48a^2 + 4a^2n - 24a^2n^2 + 5a^2n^3\right\},\\
C_3 &= \frac{1}{16a(\frac{n}{2}-1)_3}\left\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}(-4+2a+an) + 4 - 2a + an\right\},\\
C_4 &= \frac{1}{16a(\frac{n}{2}-1)_3}\left\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}(4+4n-6a-3an)\right.\\
&\quad \left. -4 - 4n + 6a - 3an - 2an^2 + an^3\right\},\\
C_5 &= \frac{1}{192a^2(\frac{n}{2}-2)_5}\left\{(1-a)^{-1-\frac{n}{2}}\left(192n + 48n^2 + 576a + 192an - \right.\right.\\
&\quad 216an^2 - 24an^3 - 1152a^2 - 944a^2n + 136a^2n^2 + 62a^2n^3 +\\
&\quad \left. 2a^2n^4 + 576a^3 + 664a^3n + 86a^3n^2 - 31a^3n^3 - 5a^3n^4 - 104a^4n\right)\\
&\quad -62a^4n^2 - a^4n^3 + 2a^4n^4 - 192n - 48n^2 - 576a - 384an + 72an^2\\
&\quad +576a^2 + 272a^2n - 208a^2n^2 + 10a^2n^3 + 4a^2n^4 - 24a^3n + 26a^3n^2\\
&\quad \left. -9a^3n^3 + a^3n^4\right\},\\
C_6 &= \frac{1}{192a^2(\frac{n}{2}-2)_5}\left\{(1-a)^{-1-\frac{n}{2}}\left(-192n - 48n^2 + 384a + 816an + 96an^2\right.\right.\\
&\quad +12an^3 - 768a^2 - 1120a^2n - 148a^2n^2 - 8a^2n^3 - 2a^2n^4 + 384a^3\\
&\quad \left. +584a^3n + 150a^3n^2 + 7a^3n^3 - 88a^4n - 58a^4n^2 - 5a^4n^3 + a^4n^4\right)\\
&\quad +192n + 48n^2 - 384a - 624an + 48an^2 + 12an^3 + 384a^2 + 304a^2n\\
&\quad \left. -164a^2n^2 + 8a^2n^3 + 2a^2n^4 - 24a^3n + 26a^3n^2 - 9a^3n^3 + a^3n^4\right\},\\
C_7 &= \frac{1}{48a(\frac{n}{2}-1)_2}\left\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\left(-96 + 22an + an^2 + 2a^2n - a^2n^2\right)\right.\\
&\quad \left. +96 - 96a + 26an - 3an^2 + an^3\right\},\\
C_8 &= \frac{(1-a)^{2-\frac{n}{2}} - 16 + n}{180},\\
C_9 &= \frac{1}{24a(\frac{n}{2}-1)_3}\left\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}\left(12n - 12a - 8an - an^2 + 2a^2n + a^2n^2\right)\right.\\
&\quad \left. -12n + 12a + 8an - 5an^2\right\},\\
C_{10} &= \frac{1}{1440a(\frac{n}{2}-1)_3}\left\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}\left(-360n + 360a + 296an + 60an^2 + an^3\right.\right.\\
&\quad \left. -112a^2n - 60a^2n^2 - 2a^2n^3 - 4a^3n + a^3n^3\right)\\
&\quad \left. +360n - 360a - 296an + 116an^2 - an^3 + an^4\right\},\\
C_{11} &= \frac{1}{480a^2(\frac{n}{2}-2)_4}\left\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\left(480 - 240n - 240a - 120an + 16a^2n\right.\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+26a^2n^2+11a^2n^3+a^2n^4+4a^3n+4a^3n^2-a^3n^3-a^3n^4\,) \\
&-480+240n+720a-360an+120an^2-240a^2+104a^2n-70a^2n^2 \\
&+15a^2n^3-5a^2n^4+a^2n^5\,\}\,, \\
C_{12} \;=\;& \frac{1}{576a(\frac{n}{2}-1)_3}\Big\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}\Big(-144+72a+56an+12an^2 \\
&+an^3-16a^2n-12a^2n^2-2a^2n^3-4a^3n+a^3n^3\,) \\
&+144-72a+16an-16an^2-an^3+an^4\,\}\,, \\
C_{13} \;=\;& \frac{1}{48a(\frac{n}{2}-1)_3}\Big\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}\Big(-24+12a+8an+an^2-2a^2n-a^2n^2\Big) \\
&+24-12a-an^2+an^3\,\}\,.
\end{aligned}
$$

Как видно, коэффициенты в (19), (20) весьма нетривиальным образом зависят не только от калибровочного параметра a, но и от размерности пространства n, что является характерным свойством неминимальных операторов и операторов порядка выше второго [24]. В размерности $n = 4$ коэффициенты C_i в (20) принимают вид[1]

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{2a-1}{6a^2}\ln(1-a)-\frac{8a^2-21a+6}{36a(1-a)}, \quad C_2=\frac{a+4}{6a^2}\ln(1-a)-\frac{13a^2+6a-24}{36a(1-a)}, \\
C_3 &= \frac{a^2}{48(1-a)^2}, \qquad C_4=\frac{13a^2-36a+24}{48(1-a)^2}, \\
C_5 &= -\frac{5a+8}{24a^2}\ln(1-a)-\frac{a^5+11a^4+2a^3+74a^2-180a+96}{288(1-a)^3}, \\
C_6 &= -\frac{7a-8}{24a^2}\ln(1-a)-\frac{a^5-17a^4+154a^3-362a^2+324a-96}{288a(1-a)^3}, \\
C_7 &= \frac{1}{3}, \qquad C_8=-\frac{11}{180}, \qquad C_9=\frac{a(4-3a)}{12(1-a)^2}, \qquad C_{10}=\frac{23a^2-46a+8}{360(1-a)^2} \\
C_{11} &= -\frac{a^2-5a-2}{12a^2}\ln(1-a)-\frac{133a^2-168a-60}{360a(1-a)}, \\
C_{12} &= -\frac{a^2+4a-8}{144(1-a)^2}, \qquad C_{13}=\frac{3a^2-6a+4}{24(1-a)^2}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что в случае симметричной (по лоренцевским индексам) матрицы X^{ij} соответствующее выражение для $\mathrm{tr}_L E_4$ совпадает с полученным в [20, 28, 30] (члены с полной производной в [20, 28, 30] не вычислялись). Отметим также, что логарифмическая зависимость от калибровочного параметра в этом случае содержится только в коэффициентах при членах с полной производной.

Что касается полного выражения для E_4, приведенного в приложении, отметим его достаточно громоздкий вид и, несомненно, следующие коэффициенты будут занимать

[1]Переход к $n = 4$ не совсем тривиален поскольку знаменатели содержат множители $n/2-2$, что требует раскрытия неопределенностей типа 0/0.

значительно больший объем. Таким образом, проблема доведения результатов вычисления до научной общественности становится весьма острой. В связи с этим, по-видимому, имеет смысл предложение [32] создать специальный электронный архив, где хранились бы результаты вычислений. Это важно также и с точки зрения возможности проверки другими авторами как правильности полученного выражения, так и сравнения эффективности различных алгоритмов и программ. Однако до этого должна быть решена проблема выбора канонических базисов для тензорных инвариантов и создания алгоритмов перехода от одного базиса к другому, обсуждаемая ниже.

4. Заключение

Вычисление E_4 для оператора (6) потребовало 4 часа 5 мин работы Пентиум-75, в то время как для вычисления E_2 (и E_4 для минимального оператора) требуется пренебрежимо малое время (< 1 сек).[2] Основной причиной для такого резкого возрастания времени счета является размножение тензорных мономов вида

$$(A_0^{-1})_{ai}(A_0^{-1})^i_j\cdots(A_0^{-1})^k_l(A_0^{-1})^l_b.$$

Для неминимального оператора (6) A_0^{-1} является матрицей

$$(A_0^{-1})_{ab}=\frac{1}{k^2-\lambda}\left\{g_{ab}+\frac{a\,k_a\,k_b}{(1-a)\,k^2-\lambda}\right\},$$

в то время как для минимального оператора $A_0^{-1}=\frac{1}{k^{2r}-\lambda}$, т.е.- скаляр. Можно, однако, надеяться справиться с такого рода "разбуханием" промежуточных выражений, записав $(A_0^{-1})_{ab}$ в терминах проекторов [17] $P_{1ab}=g_{ab}-\frac{k_a k_b}{k^2}$ и $P_{2ab}=\frac{k_a k_b}{k^2}$. Используя затем стандартные свойства проекторов $P_i^n=P_i$, $P_iP_j=0, i\neq j$ можно значительно уменьшить время счета. Кроме того, определенная работа должна быть проделана по структурированию окончательных выражений. Для этого необходимо прежде всего найти подходящий базис независимых элементов, выбранный согласно определенным критериям. Как мы видим, каждый коэффициент E_m в разложении (1) является линейной комбинацией мономов заданной массовой размерности, образованных из тензоров с помощью умножения и свертки по паре индексов. Сомножители в мономах могут быть в общем случае некоммутативными и обладать симметриями, приводящими к неочевидной линейной зависимости между мономами. Учет дополнительных тождеств типа циклических, Бьянки и др. делает проблему выбора канонического базиса весьма нетривиальной. Определенный прогресс в этом направлении был достигнут в работах [33, 34]. Так, в [33] построен частичный базис для коэффициента E_8 оператора $A=-\Box+X$, содержащий только тензор кривизны Римана и его ковариантные производные, а в [34] представлен алгоритм построения базиса для E_m указанного оператора в плоском пространстве. Аналогичная проблема построения канонического базиса для неминимального оператора (6) все

[2]В предыдущей версии программы [1, 2] вычисление E_2 для неминимального оператора занимало 3 мин 15 сек. на AT386.

еще ждет своего решения. Конечно, выбор базиса не является единственным и различные базисы могут быть полезны для различных целей. Следующая задача – это приведение произвольного выражения данной массовой размерности к заранее выбранному каноническому базису для E_m. Разработка алгоритма такого приведения была бы существенным вкладом на пути полной компьютеризации вычислений коэффициентов ДВСГ.

Мы благодарим С.А.Фуллинга из университета г.Колледж Стейшн (США) за плодотворные дискуссии. Работа выполнена при поддержке гранта INTAS-93-2058-ext "East-West Network in Constrained Dynamical Systems".

Литература

[1] V.P.Gusynin, V.V.Kornyak. *Symbolic Computation of the Heat Kernel Expansion on Curved Manifolds*, in: Proc. of 3rd Intern. Workshop on Software Engineering, Artificial Intelligence and Expert Systems for High Energy and Nuclear Physics, Oberammergau (1993) 615-621.

[2] V.P.Gusynin, V.V.Kornyak. (1994) *Journ.Symb.Computation* **17**, 283.

[3] B.DeWitt, (1965) *Dynamical Theory of Groups and Fields*. New York: Gordon and Breach.

[4] R.T. Seeley, (1967) *Proc. Symp. Pure Math.*, Amer.Math.Soc. **10**, 288.

[5] P.B. Gilkey, (1975) *J. Diff. Geom.* **10**, 601.

[6] N.D. Birrell, P.C.W. Davies, (1982) *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge: Cambridge U. Press.
L.S. Brown, (1977) *Phys. Rev.* **D15**, 1469.
J.S. Dowker, (1978) *J. Phys.* **A11**, 347.
S.M. Christensen, M.J. Duff, (1979) *Nucl. Phys.* **B154**, 301.

[7] M.A. Atiyah, R. Bott, V.K. Patodi, (1973) *Invent. Math.* **19**, 279.

[8] S. Minakshisundaram, A. Pleijel, (1949) *Can. J. Math.* **1**, 242.
M. Kac, (1966) *Amer. Math. Monthly* **73**, 1.
M.P. McKean, I.M. Singer, (1967) *J. Diff. Geom.* **1**, 43.

[9] R. Schimming, (1993). *Calculation of the Heat Kernel Coefficients*. In: "Analysis, Geometry and Groups: A Riemann Legacy Volume", ed. by H.M.Srivastava and Th.M.Rassias, (Hadronic Press, Palm Harbor, 1993), p.627.

[10] P. Greiner, (1971) *Arch. Rat. Mech. Anal.* **41**, 163.

[11] T. Sakai, (1971) *Tôhoku Math. J.* **23**, 589.

[12] I.G. Avramidi, (1991) *Nucl. Phys.* **B355**, 712.

[13] D.Xu. (1985) *Phys. Lett.* **110A**, 293.

[14] P. Amsterdamski, A.L. Berkin, D.J. O'Connor, (1989) *Class. Quant. Grav.* **6**, 1981.

[15] W.H. Goldthorpe. (1980) *Nucl. Phys.* **B170** [FS1], 307.
Yu.N. Obukhov. (1983) *Nucl. Phys.* **B212**, 237.

[16] A.E.M. van de Ven. (1985) *Nucl. Phys.* **B250**, 593.

[17] S.A. Fulling, (1993), in *Proceedings of Third International Colloquium on Differential Equations*, ed. D.Bainov and V.Covachev (VSP Intern. Science Publ.).

[18] A.A. Bel'kov, A.V. Lanyov, A. Schaale, (1996) *Comput. Phys. Commun.* **95**, 123.

[19] H. Weyl. (1915) *Rend. Circ. Mat. Palermo* **39**, 1.

[20] A.O. Barvinsky, G.A. Vilkovisky, (1985) *Phys. Repts.* **119**, 1.

[21] N.H.Barth and S.M.Christensen. (1983) *Phys. Rev. D* **28**, 1876.
H.T.Cho and R.Kantowski. (1995) *Phys. Rev. D* **52**, 4600.

[22] R. Endo, (1984) *Progr.Theor.Phys.* **71**, 1366.

[23] H. Widom, (1980) *Bull. Sci. Math.* **104**, 19.

[24] V.P. Gusynin, (1989) *Phys. Lett.* **B225**, 233.
V.P. Gusynin, (1990) *Nucl. Phys.* **B333**, 296.
В.П. Гусынин, (1991) *Украинский Мат. Журн.* **43**, 1154.

[25] V.P. Gusynin, E.V. Gorbar, (1991) *Phys. Lett.* **B270**, 29.

[26] V.P. Gusynin, E.V. Gorbar, V.V. Romankov, (1991) *Nucl. Phys.* **B362**, 449.

[27] V.P. Gusynin. *Heat Kernel Technique for Nonminimal Operators*. In: "Discourses in Mathematics and its Applications", **4**, 65-86. Edited by S.A.Fulling. A&M University, College Station, 1995.

[28] E.S.Fradkin and A.Tseytlin, (1982) *Nucl. Phys. B* **201**, 469.

[29] T.P.Branson, P.B.Gilkey and A.Pierzchalski, (1994) *Math. Nachr.* **166**, 207.

[30] П.И. Пронин, К.В. Степаньянц, (1996) *ТМФ* **109**, 215;
P.I. Pronin and K.V. Stepanyantz, (1997) *Nucl. Phys.* **485**, 517.

[31] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. Наука, Москва, 1986.

[32] S.M. Christensen, *The Computational Challenge of Heat-Kernel Calculations*. In: "Discourses in Mathematics and its Applications", **4**, 47-64. Edited by S.A.Fulling. A&M University, College Station, 1995.

[33] S.A. Fulling, R.C. King, B.G. Wybourne, C.J. Cummins, (1992) *Class. Quant. Grav.* **9**, 1151.

[34] U. Müller, *Basis Invariants in Non-Abelian Gauge Theories*, preprint DESY-96-154, hep-th/9701124.

Приложение

В настоящем приложении мы приводим полное выражение для коэффициента E_4 в разложении (1) для неминимального оператора (6) для случая многообразий произвольной размерности n и для $n = 4$.

$$
\begin{aligned}
E_4 \;=\;& (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \{ -C_1 \Box X^{ab} - C_2 (\Box X^{ba} + g^{ab} \Box X_i{}^i) - C_3 D_i D^a X^{ib} - C_4 (D_i D^a X^{bi} + \\
& D_i D^b X^{ia} + D^a D^b X_i{}^i) + C_5 D_i D^b X^{ai} + C_6 (X_i{}^i X^{ab} + X_i{}^a X^{ib} + X^a{}_i X^{bi} + \\
& X^{ab} X_i{}^i + X^b{}_i X^{ia} + g^{ab} X_{ij} X^{ji}) + C_7 (X_i{}^i X^{ba} + X_i{}^a X^{bi} + X_i{}^b X^{ia} + X_i{}^b X^{ai} \\
& + X^b{}_i X^{ai} + X^{ba} X_i{}^i + g^{ab} X_i{}^i X_j{}^j + g^{ab} X_{ij} X^{ij}) + C_8 (X_i{}^i W^{ab} + X_i{}^a W^{ib}) - \\
& C_9 X_i{}^b W^{ia} + C_{10} X^a{}_i X^{ib} + C_{11} X^a{}_i W^{ib} - C_{12} X^b{}_i W^{ia} - C_{13} \Box W^{ab} - C_{14} W_i{}^a X^{ib} \\
& + C_{15} (W_i{}^a X^{bi} + W_i{}^b X^{ia}) - C_{16} W_i{}^a W^{ib} - C_{17} W_i{}^b X^{ai} - C_{18} W_i{}^b W^{ia} + \\
& C_{19} W^{ab} X_i{}^i - C_{20} D_i D_j R^{ijab} + C_{21} D_i D_j R^{iajb} - C_{22} R_{ijk}{}^a R^{ijkb} + C_{23} R_{ijk}{}^a R^{ikjb} \\
& + C_{24} R_{ij}{}^{ab} X^{ij} + C_{25} R_{ij}{}^{ab} W^{ij} - C_{26} R_i{}^a{}_j{}^b X^{ij} + C_{27} R_i{}^a{}_j{}^b X^{ji} + C_{28} R_i{}^a{}_j{}^b W^{ij} \\
& - C_{29} \Box R^{ab} + C_{30} D_i D^a R^{ib} + C_{31} D_i D^b R^{ia} - C_{32} R_{ij} R^{ijab} + C_{33} R_{ij} R^{iajb} - \\
& C_{34} R_i{}^a X^{ib} - C_{35} R_i{}^a X^{bi} - C_{36} R_i{}^a W^{ib} + C_{37} R_i{}^a R^{ib} - C_{38} R_i{}^b X^{ia} - C_{39} R_i{}^b X^{ai} \\
& - C_{40} R_i{}^b W^{ia} - C_{41} R^{ab} X_i{}^i + C_{42} D^a D^b R - C_{43} R X^{ab} - C_{44} (R X^{ba} + g^{ab} R X_i{}^i) \\
& - C_{45} R W^{ab} + C_{46} R R^{ab} - C_{47} g^{ab} D_i D_j X^{ij} + C_{48} g^{ab} X_{ij} W^{ij} + C_{49} g^{ab} W_{ij} X^{ij} + \\
& C_{50} g^{ab} W_{ij} W^{ij} + C_{51} g^{ab} R_{ijkl} R^{ijkl} - C_{52} g^{ab} R_{ij} X^{ij} - C_{53} g^{ab} R_{ij} R^{ij} + C_{54} g^{ab} \Box R \\
& + C_{55} g^{ab} R^2 \} .
\end{aligned}
$$

Коэффициенты C_i в произвольной размерности n:

$$
\begin{aligned}
C_1 \;=\;& \frac{1}{192a^3(\frac{n}{2}-2)_5} \{ (1-a)^{1-\frac{n}{2}} (-576 - 192n + 960a + 432an + 48an^2 - 384a^2 - \\
& 288a^2n - 48a^2n^2 + 8a^3n + 6a^3n^2 + a^3n^3) + 576 + 192n - 1536a - 336an + 48an^2 \\
& + 1344a^2 + 96a^2n - 96a^2n^2 - 384a^3 + 152a^3n + 62a^3n^2 - 27a^3n^3 - 2a^3n^4 + a^3n^5 \} , \\
C_2 \;=\;& \frac{1}{192a^3(\frac{n}{2}-2)_5} \{ (1-a)^{1-\frac{n}{2}} (192 - 192a - 48an + 8a^3n + 6a^3n^2 + a^3n^3) \\
& - 192 + 384a - 48an - 192a^2 + 96a^2n - 40a^3n + 6a^3n^2 + a^3n^3 \} , \\
C_3 \;=\;& \frac{1}{48a^3(\frac{n}{2}-2)_5} \{ (1-a)^{1-\frac{n}{2}} (-96 - 48n + 96a + 24an + 48a^2 + 36a^2n + 6a^2n^2 - \\
& 8a^3n - 6a^3n^2 - a^3n^3) + 96 + 48n - 192a - 24an + 24an^2 + 48a^2 - 84a^2n - \\
& 18a^2n^2 + 6a^2n^3 + 48a^3 + 36a^3n - 16a^3n^2 - 3a^3n^3 + a^3n^4 \} ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_4 \;=\;& \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_5} \{ (1-a)^{1-\frac{n}{2}} (192 - 192a - 48an + 8a^3n + 6a^3n^2 + a^3n^3) \\
& - 192 + 384a - 48an - 192a^2 + 96a^2n - 40a^3n + 6a^3n^2 + a^3n^3 \} , \\
C_5 \;=\;& \frac{1}{48a^3(\frac{n}{2}-2)_5} \{ (1-a)^{1-\frac{n}{2}} (96 + 48n - 96a - 24an - 48a^2 - 36a^2n - 6a^2n^2 \\
& + 8a^3n + 6a^3n^2 + a^3n^3) - 96 - 48n + 192a + 24an - 24an^2 - 48a^2 + 84a^2n \\
& + 18a^2n^2 - 6a^2n^3 - 48a^3 - 36a^3n + 16a^3n^2 + 3a^3n^3 - a^3n^4 \} , \\
C_6 \;=\;& \frac{1}{64a^2(\frac{n}{2}-2)_5} \{ (1-a)^{-\frac{n}{2}} (-48 - 24n + 80a + 36an + 4an^2 - 24a^2 - 18a^2n \\
& - 3a^2n^2) + 48 + 24n - 80a - 12an + 8an^2 + 24a^2 - 10a^2n - 3a^2n^2 + a^2n^3 \} , \\
C_7 \;=\;& \frac{1}{64a^2(\frac{n}{2}-2)_5} \{ (1-a)^{-\frac{n}{2}} (48 - 48a - 12an + 8a^2 + 6a^2n + a^2n^2) \\
& - 48 + 48a - 12an - 8a^2 + 6a^2n - a^2n^2 \} , \\
C_8 \;=\;& \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_5} \{ 2(1-a)^{1-\frac{n}{2}} (-48 - 96a - 24an + 72a^2 + 54a^2n + 9a^2n^2 - 8a^3n \\
& - 6a^3n^2 - a^3n^3) + 96 + 96a + 96an - 336a^2 - 84a^2n + 18a^2n^2 + 144a^3 - 4a^3n \\
& - 12a^3n^2 + a^3n^3 \} , \\
C_9 \;=\;& \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_5} \{ (1-a)^{1-\frac{n}{2}} (-96 - 48n + 96a + 24an + 48a^2 + 36a^2n + 6a^2n^2 \\
& - 8a^3n - 6a^3n^2 - a^3n^3) + 96 + 48n - 192a - 24an + 24an^2 + 48a^2 - \\
& 84a^2n - 18a^2n^2 + 6a^2n^3 + 48a^3 + 36a^3n - 16a^3n^2 - 3a^3n^3 + a^3n^4 \} , \\
C_{10} \;=\;& \frac{1}{64a^2(\frac{n}{2}-2)_5} \{ (1-a)^{-\frac{n}{2}} (-48 + 72n + 24n^2 - 48a - 156an - 36an^2 + \\
& 104a^2 + 78a^2n + 13a^2n^2) + 48 - 72n - 24n^2 + 48a + 180an - 12an^3 \\
& - 104a^2 + 22a^2n + 53a^2n^2 - 17a^2n^3 - 3a^2n^4 + a^2n^5 \} , \\
C_{11} \;=\;& \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_5} \{ (1-a)^{1-\frac{n}{2}} (96 + 48n - 96a + 264an + 72an^2 - 432a^2 - \\
& 372a^2n - 90a^2n^2 - 6a^2n^3 + 56a^3n + 42a^3n^2 + 7a^3n^3) - 96 - 48n + \\
& 192a - 264an - 96an^2 + 336a^2 + 708a^2n + 30a^2n^2 - 36a^2n^3 - 432a^3 \\
& - 228a^3n + 136a^3n^2 + 15a^3n^3 - 7a^3n^4 \} , \\
C_{12} \;=\;& \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_5} \{ 2(1-a)^{1-\frac{n}{2}} (48 + 96a + 24an - 72a^2 - 54a^2n - 9a^2n^2 \\
& + 8a^3n + 6a^3n^2 + a^3n^3) - 96 - 96a - 96an + 336a^2 + 84a^2n - 18a^2n^2 \\
& - 144a^3 + 4a^3n + 12a^3n^2 - a^3n^3 \} , \\
C_{13} \;=\;& \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_4} \{ (1-a)^{1-\frac{n}{2}} (-768 + 1056a + 144an - 240a^2 - 120a^2n - \\
& 8a^3n - 6a^3n^2 - a^3n^3 - 4a^4n + a^4n^3) + 768 - 1824a + 240an + 1296a^2 \\
& - 456a^2n + 24a^2n^2 - 240a^3 + 208a^3n - 30a^3n^2 - a^3n^3 \} ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{14} = {} & \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\left\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\left(96+48n-96a+264an+72an^2-432a^2\right.\right.\\
& -372a^2n-90a^2n^2-6a^2n^3+56a^3n+42a^3n^2+7a^3n^3\left.\right)-96-48n+\\
& 192a-264an-96an^2+336a^2+708a^2n+30a^2n^2-36a^2n^3-432a^3\\
& \left.-228a^3n+136a^3n^2+15a^3n^3-7a^3n^4\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{15} = {} & \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\left\{2(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\left(48+96a+24an-72a^2-54a^2n-9a^2n^2+\right.\right.\\
& 8a^3n+6a^3n^2+a^3n^3\left.\right)-96-96a-96an+336a^2+84a^2n-18a^2n^2-\\
& \left.144a^3+4a^3n+12a^3n^2-a^3n^3\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{16} = {} & \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_4}\left\{3(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\left(128-96a+64an-128a^2-96a^2n-16a^2n^2\right.\right.\\
& +36a^3n+20a^3n^2+a^3n^3+4a^4n-a^4n^3\left.\right)-384+672a-384an+96a^2+\\
& \left.720a^2n-96a^2n^2-384a^3-244a^3n+120a^3n^2-11a^3n^3\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{17} = {} & \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\left\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\left(96+48n-96a-24an-48a^2-36a^2n-6a^2n^2\right.\right.\\
& +8a^3n+6a^3n^2+a^3n^3\left.\right)-96-48n+192a+24an-24an^2-48a^2+84a^2n\\
& \left.+18a^2n^2-6a^2n^3-48a^3-36a^3n+16a^3n^2+3a^3n^3-a^3n^4\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{18} = {} & \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_4}\left\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\left(-384+288a+96an-20a^3n-12a^3n^2-a^3n^3\right.\right.\\
& \left.\left.-4a^4n+a^4n^3\right)+3\left(128-224a+32an+96a^2-48a^2n+20a^3n-a^3n^3\right)\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{19} = {} & \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\left\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\left(96-384a-96an+144a^2+108a^2n+18a^2n^2-\right.\right.\\
& 8a^3n-6a^3n^2-a^3n^3\left.\right)+2\left(-48+240a+24an-264a^2+6a^2n+9a^2n^2+\right.\\
& \left.\left.72a^3-22a^3n-3a^3n^2+a^3n^3\right)\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{20} = {} & \frac{1}{2880a^3(\frac{n}{2}-2)_4}\left\{2(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\left(-16416+58656a+6072an-29352a^2-\right.\right.\\
& 16608a^2n-966a^2n^2+3430a^3n+1863a^3n^2+74a^3n^3+296a^4n-74a^4n^3\left.\right)\\
& +32832-150144a+4272an+176016a^2-21504a^2n-36a^2n^2-58704a^3\\
& \left.+16108a^3n-738a^3n^2-76a^3n^3+15a^3n^4\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{21} = {} & \frac{1}{5760a^2(\frac{n}{2}-2)_4}\left\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\left(53376+35472n-81840a-54264an\right.\right.\\
& -6672an^2+15992a^2n+8766a^2n^2+385a^2n^3+1540a^3n-385a^3n^3\left.\right)\\
& -53376-35472n+135216a+63048an-11064an^2-81840a^2\\
& \left.-15992a^2n+13890a^2n^2-1483a^2n^3\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{22} = {} & \frac{1}{552960a^4(\frac{n}{2}-2)_6}\left\{(1-a)^{-2-\frac{n}{2}}\left(4534272+387072n+44390400a+20447232an\right.\right.\\
& +2022912an^2-237126144a^2-98031360a^2n-10807296a^2n^2-218880a^2n^3+\\
& 435725568a^3+179327872a^3n+21040512a^3n^2+626048a^3n^3+11520a^3n^4-\\
& 399736320a^4-167316736a^4n-19284928a^4n^2-44256a^4n^3+61168a^4n^4+\\
& 712a^4n^5+200829696a^5+90282944a^5n+9158592a^5n^2-1199920a^5n^3-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 237456a^5n^4-7912a^5n^5-58430208a^6-32038400a^6n-3286544a^6n^2+\\
& 1093416a^6n^3+257132a^6n^4+14474a^6n^5+10438656a^7+7865248a^7n+\\
& 1626552a^7n^2-189364a^7n^3-103878a^7n^4-9249a^7n^5-625920a^8-985792a^8n\\
& -461792a^8n^2-49696a^8n^3+9512a^8n^4+1508a^8n^5\left.\right)+8\left(-566784-48384n\right.\\
& -6682368a-2936064an-277056an^2+16842816a^2+3514080a^2n-564096a^2n^2\\
& -105120a^2n^3-14097696a^3+886960a^3n+1234272a^3n^2-13600a^3n^3-\\
& 20376a^3n^4+4928832a^4-1609312a^4n-180976a^4n^2+126600a^4n^3-1466a^4n^4\\
& -2243a^4n^5+90a^4n^6-1148352a^5+239184a^5n+44488a^5n^2-9456a^5n^3-\\
& 1540a^5n^4+288a^5n^5+45a^5n^6+78240a^6+91000a^6n+24600a^6n^2-42040a^6n^3\\
& \left.\left.-7155a^6n^4+2160a^6n^5+360a^6n^6\right)\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{23} = {} & \frac{1}{276480a^4(\frac{n}{2}-2)_6}\left\{(1-a)^{-2-\frac{n}{2}}\left(4534272+387072n+44390400a+20447232an\right.\right.\\
& +2022912an^2-237126144a^2-98031360a^2n-10807296a^2n^2-218880a^2n^3+\\
& 435725568a^3+179327872a^3n+21040512a^3n^2+626048a^3n^3+11520a^3n^4-\\
& 399736320a^4-167298304a^4n-19277248a^4n^2-48096a^4n^3+59248a^4n^4+\\
& 520a^4n^5+200829696a^5+90209216a^5n+9127872a^5n^2-1184560a^5n^3-\\
& 229776a^5n^4-7144a^5n^5-58430208a^6-31927808a^6n-3240464a^6n^2+\\
& 1070376a^6n^3+245612a^6n^4+13322a^6n^5+10438656a^7+7791520a^7n+\\
& 1595832a^7n^2-174004a^7n^3-96198a^7n^4-8481a^7n^5-625920a^8-967360a^8n\\
& -454112a^8n^2-53536a^8n^3+7592a^8n^4+1316a^8n^5\left.\right)+8\left(-566784-48384n-\right.\\
& 6682368a-2936064an-277056an^2+16842816a^2+3514080a^2n-564096a^2n^2\\
& -105120a^2n^3-14097696a^3+886960a^3n+1234272a^3n^2-13600a^3n^3-\\
& 20376a^3n^4+4928832a^4-1646176a^4n-187696a^4n^2+137880a^4n^3+574a^4n^4\\
& -2759a^4n^5-1148352a^5+239184a^5n+44488a^5n^2-9456a^5n^3-1540a^5n^4+\\
& 288a^5n^5+45a^5n^6+78240a^6+91000a^6n+24600a^6n^2-42040a^6n^3-7155a^6n^4\\
& \left.\left.+2160a^6n^5+360a^6n^6\right)\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{24} = {} & \frac{1}{192a^3(\frac{n}{2}-2)_4}\left\{8(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\left(24+48a-50a^2-16a^2n+6a^2n^2-2a^3-5a^3n\right.\right.\\
& -2a^3n^2\left.\right)-192-192a-96an+784a^2-16a^2n-72a^2n^2-384a^3+224a^3n\\
& \left.+80a^3n^2-28a^3n^3-16a^4-36a^4n+10a^4n^2+12a^4n^3-3a^4n^4\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{25} = {} & \frac{1}{4608a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\left\{(1-a)^{-1-\frac{n}{2}}\left(18432+4608n-55680a-24576an-3456an^2+\right.\right.\\
& 64512a^2+52992a^2n+10176a^2n^2+96a^2n^3-51840a^3-48480a^3n-11376a^3n^2\\
& -528a^3n^3+24a^3n^4+29952a^4+21376a^4n+5680a^4n^2+488a^4n^3-16a^4n^4-\\
& 5376a^5-5680a^5n-1756a^5n^2-92a^5n^3+19a^5n^4+512a^6n+320a^6n^2+16a^6n^3\\
& -8a^6n^4\left.\right)+12\left(-1536-384n+3104a+896an+96an^2-2272a^2-1584a^2n-\right.\\
& 16a^2n^2+88a^2n^3+2048a^3+800a^3n-440a^3n^2-84a^3n^3+22a^3n^4+2a^3n^5-\\
& \left.\left.448a^4-96a^4n+28a^4n^2+54a^4n^3-3a^4n^5-192a^5n+60a^5n^3-3a^5n^5\right)\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{26} = {} & \frac{1}{384a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\{4(1-a)^{1-\frac{n}{2}}(-48n+576a+144an-272a^2-132a^2n+32a^2n^2 \\
& +12a^2n^3-16a^3-68a^3n-44a^3n^2-7a^3n^3)+192n-2304a-768an+96an^2 \\
& +3392a^2-48a^2n-464a^2n^2-24a^2n^3-1024a^3+864a^3n+408a^3n^2-60a^3n^3 \\
& -20a^3n^4-64a^4-160a^4n+4a^4n^2+58a^4n^3-3a^4n^5\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{27} = {} & \frac{1}{384a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\{4(1-a)^{1-\frac{n}{2}}(48n+576a+144an-336a^2-180a^2n+24a^2n^2+ \\
& 12a^2n^3-16a^3-68a^3n-44a^3n^2-7a^3n^3)-192n-2304a-384an-96an^2+ \\
& 3648a^2+144a^2n-336a^2n^2-72a^2n^3-1280a^3+800a^3n+504a^3n^2-44a^3n^3 \\
& -28a^3n^4-64a^4-160a^4n+4a^4n^2+58a^4n^3-3a^4n^5\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{28} = {} & \frac{1}{2304a^2(\frac{n}{2}-2)_5}\{(1-a)^{-1-\frac{n}{2}}(-8832+3840n+2304n^2+13824a-21888an- \\
& 7296an^2-96an^3+14976a^2+30816a^2n+9840a^2n^2+768a^2n^3-25344a^3- \\
& 19072a^3n-6544a^3n^2-1064a^3n^3-56a^3n^4+5376a^4+5680a^4n+2332a^4n^2+ \\
& 524a^4n^3+53a^4n^4-128a^5n-224a^5n^2-112a^5n^3-16a^5n^4)+12(736-320n \\
& -192n^2-416a+1872an+256an^2-88an^3-1664a^2-1088a^2n+360a^2n^2+ \\
& 64a^2n^3-20a^2n^4+448a^3+96a^3n-28a^3n^2-54a^3n^3+3a^3n^5+192a^4n- \\
& 60a^4n^3+3a^4n^5)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{29} = {} & \frac{1}{11520a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}(23040+11520n+167424a+172224an+32592an^2 \\
& -304320a^2-281616a^2n-78072a^2n^2-6672a^2n^3+62816a^3n+50288a^3n^2+ \\
& 10234a^3n^3+397a^3n^4+6352a^4n+1588a^4n^2-1588a^4n^3-397a^4n^4)-23040- \\
& 11520n-144384a-172224an-38352an^2+471744a^2+375888a^2n+24552a^2n^2 \\
& -11064a^2n^3-304320a^3-148496a^3n+35536a^3n^2+8270a^3n^3-1375a^3n^4\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{30} = {} & \frac{1}{11520a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}(187392+41088n-523776a-121152an+ \\
& 2448an^2+125760a^2+87984a^2n+10968a^2n^2-792a^2n^3+256a^3n+376a^3n^2 \\
& +170a^3n^3+23a^3n^4+368a^4n+92a^4n^2-92a^4n^3-23a^4n^4)+3(-62464- \\
& 13696n+237056a+22848an-7664an^2-216512a^2+33200a^2n+12968a^2n^2 \\
& -1856a^2n^3+41920a^3-30160a^3n+1736a^3n^2+1802a^3n^3-263a^3n^4)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{31} = {} & \frac{1}{5760a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\{3(1-a)^{1-\frac{n}{2}}(-31232-8768n+48256a+27488an+3856an^2- \\
& 29632a^2-27440a^2n-7616a^2n^2-652a^2n^3+5536a^3n+4496a^3n^2+950a^3n^3+ \\
& 43a^3n^4+688a^4n+172a^4n^2-172a^4n^3-43a^4n^4)+93696+26304n-238464a \\
& -61920an+1584an^2+233664a^2+68976a^2n-1680a^2n^2-540a^2n^3-88896a^3 \\
& -26096a^3n+5152a^3n^2+1154a^3n^3-49a^3n^4\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{32} = {} & \frac{1}{23040a^4(\frac{n}{2}-2)_5}\{(1-a)^{-2-\frac{n}{2}}(-61440-15360a-34560an+1645056a^2+ \\
& 379392a^2n-16128a^2n^2-4751616a^3-1306752a^3n-13632a^3n^2+2400a^3n^3+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 5413632a^4+2036736a^4n+165136a^4n^2+720a^4n^3+476a^4n^4-2663040a^5- \\
& 1520160a^5n-258512a^5n^2-17064a^5n^3-1384a^5n^4+387648a^6+458544a^6n+ \\
& 154720a^6n^2+22692a^6n^3+1616a^6n^4+46080a^7-4384a^7n-28600a^7n^2- \\
& 9692a^7n^3-884a^7n^4-960a^8-7616a^8n-3284a^8n^2+644a^8n^3+251a^8n^4)+ \\
& 4(15360+34560a+16320an-357504a^2-56448a^2n+10272a^2n^2+438336a^3 \\
& -4640a^3n-18912a^3n^2+2816a^3n^3-119232a^4+38400a^4n+2524a^4n^2- \\
& 4152a^4n^3+305a^4n^4+105a^4n^5-11040a^5+3320a^5n+60a^5n^2-170a^5n^3+ \\
& 30a^5n^4+240a^6-220a^6n+60a^6n^2-5a^6n^3)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{33} = {} & \frac{1}{1440a^2(\frac{n}{2}-2)_4}\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}(-27984-2472n+16248a+9108an+492an^2- \\
& 1778a^2n-945a^2n^2-28a^2n^3-112a^3n+28a^3n^3)+27984+2472n-44232a \\
& +2412an+744an^2+16248a^2-4234a^2n-237a^2n^2+91a^2n^3\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{34} = {} & \frac{1}{192a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}(192+96n-384a+72an^2-128a^2-512a^2n- \\
& 136a^2n^2-4a^2n^3+416a^3+400a^3n+118a^3n^2+11a^3n^3-56a^4n-42a^4n^2 \\
& -7a^4n^3)-192-96n+384a-96an-120an^2+128a^2+656a^2n+88a^2n^2 \\
& -44a^2n^3-416a^3-272a^3n+146a^3n^2+23a^3n^3-9a^3n^4\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{35} = {} & \frac{1}{192a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}(-192+384a-96an+64a^2+144a^2n+32a^2n^2- \\
& 160a^3-144a^3n-38a^3n^2-3a^3n^3+24a^4n+18a^4n^2+3a^4n^3)+192-384a \\
& +192an-64a^2-288a^2n+40a^2n^2+160a^3+48a^3n-34a^3n^2+3a^3n^3\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{36} = {} & \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_4}\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}(192-288a+96an-144a^2-112a^2n-20a^2n^2 \\
& +48a^3n+26a^3n^2+a^3n^3+4a^4n-a^4n^3)-192+480a-192an-144a^2 \\
& +400a^2n-52a^2n^2-144a^3-144a^3n+70a^3n^2-7a^3n^3\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{37} = {} & \frac{1}{960a^2(\frac{n}{2}-2)_5}\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}(37312+12624n+1184n^2-58976a-31944an \\
& -5116an^2-204an^3+22624a^2+21280a^2n+6142a^2n^2+599a^2n^3+10a^2n^4 \\
& -2520a^3n-2050a^3n^2-435a^3n^3-20a^3n^4-160a^4n-40a^4n^2+40a^4n^3 \\
& +10a^4n^4)-37312-12624n-1184n^2+58976a+13288an-1196an^2- \\
& 388an^3-22624a^2-1120a^2n+2010a^2n^2+85a^2n^3-56a^2n^4\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{38} = {} & \frac{1}{192a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}(-192+384a-96an+64a^2+144a^2n+32a^2n^2- \\
& 160a^3-144a^3n-38a^3n^2-3a^3n^3+24a^4n+18a^4n^2+3a^4n^3)+192-384a \\
& +192an-64a^2-288a^2n+40a^2n^2+160a^3+48a^3n-34a^3n^2+3a^3n^3\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{39} = {} & \frac{1}{192a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}(192+96n-384a+72an^2-128a^2-512a^2n- \\
& 136a^2n^2-4a^2n^3+416a^3+400a^3n+118a^3n^2+11a^3n^3-56a^4n-42a^4n^2 \\
& -7a^4n^3)-192-96n+384a-96an-120an^2+128a^2+656a^2n+88a^2n^2
\end{aligned}
$$

$$-44a^2n^3-416a^3-272a^3n+146a^3n^2+23a^3n^3-9a^3n^4\Big\},$$

$$\begin{aligned}C_{40} \;=\;& \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_4}\Big\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\big(-192+288a-96an+144a^2+112a^2n+20a^2n^2-\\&48a^3n-26a^3n^2-a^3n^3-4a^4n+a^4n^3\big)+192-480a+192an+144a^2-400a^2n\\&+52a^2n^2+144a^3+144a^3n-70a^3n^2+7a^3n^3\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{41} \;=\;& \frac{1}{96a^2(\frac{n}{2}-2)_5}\Big\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}\big(-72n+128a+96an+16an^2-80a^2-68a^2n-\\&16a^2n^2-a^2n^3+8a^3n+6a^3n^2+a^3n^3\big)+2\big(36n-64a-48an+10an^2+\\&40a^2+2a^2n-7a^2n^2+a^2n^3\big)\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{42} \;=\;& \frac{1}{5760a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\Big\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\big(11520-2880n+100416a+34992an+2472an^2-\\&63072a^2-51240a^2n-10836a^2n^2-492a^2n^3+7432a^3n+5878a^3n^2+1157a^3n^3\\&+38a^3n^4+608a^4n+152a^4n^2-152a^4n^3-38a^4n^4\big)-11520+2880n-88896a\\&-43632an-1032an^2+163488a^2+38904a^2n-6348a^2n^2-384a^2n^3-63072a^3\\&-1072a^3n+4862a^3n^2-227a^3n^3-41a^3n^4\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{43} \;=\;& \frac{1}{192a^2(\frac{n}{2}-2)_5}\Big\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}\big(-288-144n+448a+224an+44an^2+4an^3-112a^2\\&-140a^2n-56a^2n^2-7a^2n^3+24a^3n+18a^3n^2+3a^3n^3\big)+288+144n-448a\\&-80an+28an^2-4an^3+112a^2+52a^2n+16a^2n^2-17a^2n^3-2a^2n^4+a^2n^5\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{44} \;=\;& \frac{1}{192a^2(\frac{n}{2}-2)_5}\Big\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}\big(288-320a-96an-4an^2+80a^2+68a^2n+16a^2n^2\\&+a^2n^3-8a^3n-6a^3n^2-a^3n^3\big)-288+320a-48an+4an^2-80a^2+20a^2n-\\&4a^2n^2+a^2n^3\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{45} \;=\;& \frac{1}{96a^2(\frac{n}{2}-2)_4}\Big\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\big(-288+144a+88an+8an^2-24a^2n-14a^2n^2-a^2n^3\\&-4a^3n+a^3n^3\big)+288-432a+56an-8an^2+144a^2-32a^2n+14a^2n^2-3a^2n^3\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{46} \;=\;& \frac{1}{576a^2(\frac{n}{2}-2)_5}\Big\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}\big(-432n+576a+528an+144an^2+12an^3-288a^2\\&-392a^2n-176a^2n^2-28a^2n^3-a^2n^4+64a^3n+64a^3n^2+20a^3n^3+2a^3n^4+\\&16a^4n+4a^4n^2-4a^4n^3-a^4n^4\big)+432n-576a-528an+72an^2-12an^3+\\&288a^2+104a^2n+20a^2n^2+10a^2n^3-5a^2n^4\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{47} \;=\;& \frac{1}{96a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\Big\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\big(192-192a-48an+8a^3n+6a^3n^2+a^3n^3\big)\\&-192+384a-48an-192a^2+96a^2n-40a^3n+6a^3n^2+a^3n^3\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{48} \;=\;& \frac{1}{192a^2(\frac{n}{2}-2)_5}\Big\{(1-a)^{-1-\frac{n}{2}}\big(-192+1152a+192an-1680a^2-648a^2n-\\&36a^2n^2+768a^3+628a^3n+96a^3n^2+2a^3n^3-24a^4-178a^4n-63a^4n^2-\\&5a^4n^3-24a^5-2a^5n+9a^5n^2+2a^5n^3\big)+192-960a-96an+720a^2+24a^2n\\&-36a^2n^2-48a^3-20a^3n+24a^3n^2-4a^3n^3-24a^4+26a^4n-9a^4n^2+a^4n^3\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{49} \;=\;& \frac{a}{192(\frac{n}{2}-2)_5}\Big\{(1-a)^{-1-\frac{n}{2}}\big(-624-24n+1056a+228an+12an^2-\\&456a^2-238a^2n-39a^2n^2-2a^2n^3+24a^3+42a^3n+21a^3n^2+3a^3n^3\big)\\&+624+24n-432a+108an+24a^2-26a^2n+9a^2n^2-a^2n^3\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{50} \;=\;& \frac{1}{192a^2(\frac{n}{2}-2)_4}\Big\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\big(576-384a-192an+44a^2n+24a^2n^2+a^2n^3+\\&4a^3n-a^3n^3\big)-576+960a-96an-384a^2+116a^2n-4a^2n^2-5a^2n^3+a^2n^4\Big\},\end{aligned}$$

$$C_{51} \;=\; \frac{(1-a)^{2-\frac{n}{2}}+n-5}{180(n-4)},$$

$$\begin{aligned}C_{52} \;=\;& \frac{1}{96a^2(\frac{n}{2}-2)_5}\Big\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}\big(-72n+128a+96an+16an^2-80a^2-68a^2n\\&-16a^2n^2-a^2n^3+8a^3n+6a^3n^2+a^3n^3\big)+2\big(36n-64a-48an+10an^2\\&+40a^2+2a^2n-7a^2n^2+a^2n^3\big)\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{53} \;=\;& \frac{1}{5760a^2(\frac{n}{2}-2)_5}\Big\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}\big(2160n-4800a-3600an-600an^2+3360a^2+\\&2984a^2n+776a^2n^2+64a^2n^3+a^2n^4-448a^3n-352a^3n^2-68a^3n^3-2a^3n^4\\&-16a^4n-4a^4n^2+4a^4n^3+a^4n^4\big)-2160n+4800a+3600an-480an^2-\\&3360a^2-520a^2n+484a^2n^2-54a^2n^3-a^2n^4+a^2n^5\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{54} \;=\;& \frac{1}{960a^3(\frac{n}{2}-2)_5}\Big\{(1-a)^{1-\frac{n}{2}}\big(1920-1920a-480an+64a^3n+56a^3n^2+14a^3n^3\\&+a^3n^4+16a^4n+4a^4n^2-4a^4n^3-a^4n^4\big)-1920+3840a-480an-1920a^2+\\&960a^2n-320a^3n+64a^3n^2-14a^3n^3-a^3n^4+a^3n^5\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{55} \;=\;& \frac{1}{2304a^2(\frac{n}{2}-2)_5}\Big\{(1-a)^{-\frac{n}{2}}\big(1728-2112a-720an-48an^2+672a^2+584a^2n+\\&152a^2n^2+16a^2n^3+a^2n^4-64a^3n-64a^3n^2-20a^3n^3-2a^3n^4-16a^4n-4a^4n^2\\&+4a^4n^3+a^4n^4\big)-1728+2112a-144an+48an^2-672a^2+104a^2n-8a^2n^2-\\&12a^2n^3-a^2n^4+a^2n^5\Big\}.\end{aligned}$$

Коэффициенты C_i в размерности $n=4$:

$$C_1 \;=\; \frac{7-11a+a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{84-174a+112a^2-15a^3}{288a^2(1-a)},$$

$$C_2 \;=\; \frac{-1+a+a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{-12+18a+8a^2-7a^3}{288a^2(1-a)},$$

$$C_3 \;=\; \frac{3+a-2a^2}{12a^3}\ln(1-a)+\frac{36-6a-36a^2-5a^3}{144a^2(1-a)},$$

$$C_4 \;=\; \frac{-1+a+a^2}{12a^3}\ln(1-a)+\frac{-12+18a+8a^2-7a^3}{144a^2(1-a)},$$

$$C_5 \;=\; \frac{-3-a+2a^2}{12a^3}\ln(1-a)+\frac{-36+6a+36a^2+5a^3}{144a^2(1-a)},$$

$$
\begin{aligned}
C_6 &= \frac{3}{32a^2}\ln(1-a)+\frac{36-54a+12a^2+7a^3}{384a(1-a)^2},\\
C_7 &= -\frac{1}{32a^2}\ln(1-a)+\frac{-12+18a-4a^2-a^3}{384a(1-a)^2},\\
C_8 &= \frac{1+5a-4a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{12+54a-80a^2+13a^3}{288a^2(1-a)},\\
C_9 &= \frac{3+a-2a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{36-6a-36a^2-5a^3}{288a^2(1-a)},\\
C_{10} &= -\frac{13}{32a^2}\ln(1-a)+\frac{-156+426a-340a^2+71a^3}{384a(1-a)^2},\\
C_{11} &= \frac{-3-25a+14a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{-36-282a+324a^2+53a^3}{288a^2(1-a)},\\
C_{12} &= \frac{-1-5a+4a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{-12-54a+80a^2-13a^3}{288a^2(1-a)},\\
C_{13} &= \frac{16-18a-3a^2+a^3}{12a^3}\ln(1-a)+\frac{96-156a+20a^2+31a^3}{72a^2(1-a)},\\
C_{14} &= \frac{-3-25a+14a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{-36-282a+324a^2+53a^3}{288a^2(1-a)},\\
C_{15} &= \frac{-1-5a+4a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{-12-54a+80a^2-13a^3}{288a^2(1-a)},\\
C_{16} &= \frac{-8-18a+30a^2-3a^3}{12a^3}\ln(1-a)+\frac{-24-42a+121a^2-40a^3}{36a^2(1-a)},\\
C_{17} &= \frac{-3-a+2a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{-36+6a+36a^2+5a^3}{288a^2(1-a)},\\
C_{18} &= \frac{8-6a-6a^2+a^3}{12a^3}\ln(1-a)+\frac{24-30a-13a^2+16a^3}{36a^2(1-a)},\\
C_{19} &= \frac{-1+7a-2a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{-12+90a-64a^2-a^3}{288a^2(1-a)},\\
C_{20} &= \frac{684-2772a+1863a^2-148a^3}{360a^3}\ln(1-a)+\frac{1368-6228a+6330a^2-1409a^3}{720a^2(1-a)},\\
C_{21} &= \frac{-4068+4383a-385a^2}{720a^2}\ln(1-a)+\frac{-8136+12834a-3407a^2}{1440a(1-a)},\\
C_{22} &= \frac{-1584-47624a+31554a^2+6483a^3+2906a^4}{17280a^4}\ln(1-a)\\
&\quad+\frac{\begin{array}{l}(-95040-2524800a+11482440a^2-18335200a^3+12961138a^4\\ -3498802a^5-762607a^6+1727374a^7-1316820a^8+353710a^9)\end{array}}{1036800a^3(1-a)^4},\\
C_{23} &= \frac{-1584-47624a+31554a^2+6483a^3+3098a^4}{8640a^4}\ln(1-a)\\
&\quad+\frac{\begin{array}{l}(-95040-2524800a+11482440a^2-18421600a^3+13306738a^4\\ -4017202a^5-417007a^6+1640974a^7-1316820a^8+353710a^9)\end{array}}{518400a^3(1-a)^4},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{24} &= \frac{-4-12a-9a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{-24-60a-14a^2+83a^3+37a^4}{144a^2(1-a)},\\
C_{25} &= \frac{-96+257a-101a^2+16a^3}{288a^3}\ln(1-a)\\
&\quad+\frac{-1152+5964a-10458a^2+5708a^3+1807a^4-896a^5-1752a^6+864a^7}{3456a^2(1-a)^3},\\
C_{26} &= \frac{2-10a-15a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{12-66a-62a^2+84a^3+37a^4}{144a^2(1-a)},\\
C_{27} &= \frac{-2-14a-15a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{-12-78a-46a^2+102a^3+37a^4}{144a^2(1-a)},\\
C_{28} &= \frac{-113+173a-40a^2}{144a^2}\ln(1-a)\\
&\quad+\frac{-1356+5466a-6428a^2+1937a^3-592a^4+1752a^5-864a^6}{1728a(1-a)^3},\\
C_{29} &= \frac{-180-3768a+4323a^2-397a^3}{720a^3}\ln(1-a)+\frac{-120-2452a+4158a^2-1179a^3}{480a^2(1-a)},\\
C_{30} &= \frac{-916+1608a+39a^2-23a^3}{720a^3}\ln(1-a)+\frac{-5496+12396a-3674a^2-559a^3}{4320a^2(1-a)},\\
C_{31} &= \frac{518-1200a+1167a^2-129a^3}{360a^3}\ln(1-a)+\frac{1554-4377a+5042a^2-1712a^3}{1080a^2(1-a)},\\
C_{32} &= \frac{80+520a-2182a^2+1549a^3-28a^4}{720a^4}\ln(1-a)\\
&\quad+\frac{\begin{array}{l}(1920+5760a-87728a^2+280624a^3-421348a^4\\ +331500a^5-129802a^6+18484a^7+810a^8+5a^9)\end{array}}{17280a^3(1-a)^4},\\
C_{33} &= \frac{1578-945a+56a^2}{360a^2}\ln(1-a)+\frac{3156-3468a+499a^2}{720a(1-a)},\\
C_{34} &= \frac{-3-10a+7a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{-36-66a+252a^2-109a^3-38a^4}{288a^2(1-a)^2},\\
C_{35} &= \frac{1+2a-3a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{12+6a-68a^2+63a^3-10a^4}{288a^2(1-a)^2},\\
C_{36} &= \frac{-4-6a+13a^2-a^3}{12a^3}\ln(1-a)+\frac{-24-24a+100a^2-31a^3}{72a^2(1-a)},\\
C_{37} &= \frac{-556+355a-20a^2}{120a^2}\ln(1-a)+\frac{-3336+7134a-4327a^2+544a^3}{720a(1-a)^2},\\
C_{38} &= \frac{1+2a-3a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{12+6a-68a^2+63a^3-10a^4}{288a^2(1-a)^2},\\
C_{39} &= \frac{-3-10a+7a^2}{24a^3}\ln(1-a)+\frac{-36-66a+252a^2-109a^3-38a^4}{288a^2(1-a)^2},\\
C_{40} &= \frac{4+6a-13a^2+a^3}{12a^3}\ln(1-a)+\frac{24+24a-100a^2+31a^3}{72a^2(1-a)},
\end{aligned}
$$

$$C_{41} = \frac{3-2a}{24a^2}\ln(1-a) + \frac{12-26a+16a^2-a^3}{96a(1-a)^2},$$

$$C_{42} = \frac{-1458+1005a-76a^2}{720a^2}\ln(1-a) + \frac{-2916+3468a-659a^2}{1440a(1-a)},$$

$$C_{43} = \frac{3-2a}{16a^2}\ln(1-a) + \frac{36-46a+11a^3}{192a(1-a)^2},$$

$$C_{44} = \frac{-3+2a}{48a^2}\ln(1-a) + \frac{-12+26a-16a^2+3a^3}{192a(1-a)^2},$$

$$C_{45} = \frac{6-7a+a^2}{12a^2}\ln(1-a) + \frac{12-20a+9a^2}{24a(1-a)},$$

$$C_{46} = \frac{9-12a+2a^2}{72a^2}\ln(1-a) + \frac{12-34a+36a^2-13a^3}{96a(1-a)^2},$$

$$C_{47} = \frac{-1+a+a^2}{12a^3}\ln(1-a) + \frac{-12+18a+8a^2-7a^3}{144a^2(1-a)},$$

$$C_{48} = \frac{4-28a+5a^2}{96a^2}\ln(1-a) + \frac{48-456a+988a^2-778a^3+182a^4+13a^5-a^6}{1152a(1-a)^3},$$

$$C_{49} = \frac{5a}{32}\ln(1-a) + \frac{a^2(180-450a+330a^2-57a^3+a^4)}{1152(1-a)^3},$$

$$C_{50} = \frac{-12+12a-a^2}{24a^2}\ln(1-a) + \frac{-6+10a-3a^2}{12a(1-a)},$$

$$C_{51} = \frac{2-\ln(1-a)}{360},$$

$$C_{52} = \frac{3-2a}{24a^2}\ln(1-a) + \frac{12-26a+16a^2-a^3}{96a(1-a)^2},$$

$$C_{53} = \frac{-45+60a-2a^2}{720a^2}\ln(1-a) + \frac{-180+526a-452a^2+91a^3}{2880a(1-a)^2},$$

$$C_{54} = \frac{-5+5a+5a^2-a^3}{60a^3}\ln(1-a) + \frac{-60+90a+64a^2-59a^3}{720a^2(1-a)},$$

$$C_{55} = \frac{-9+12a-2a^2}{288a^2}\ln(1-a) + \frac{-36+118a-116a^2+37a^3}{1152a(1-a)^2}.$$

Рукопись поступила в издательский отдел
17 марта 1997 года.