СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

97-68

Р2-97-68

Н.А.Черников

ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

1997

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Здесь рассматривается задача о движении планеты в пространстве Лобачевского в её простейшем варианте, когда звезда покоится, а планета выступает как пробное тело. В этом случае задача сводится к решению вопроса о том, как отражается на законах Кеплера введение геометрии Лобачевского в видимый нами мир.

Фактически эту задачу поставил сам Н.И.Лобачевский, ибо ему принадлежит приоритет не только в создании неевклидовой геометрии, но и в постановке двух совершенно новых проблем: об астрономической проверке геометрии видимого мира (в связи с чем он пытался обнаружить угловой дефект треугольника, с вершинами на Земле, на Солнце и на Сириусе, [1, с. 207-209], [2, с. 162]) и о том, какого рода перемена произойдёт от введения новой геометрии в механику [1, с. 261]. Одно это приводит нас к задаче о движении планеты в пространстве Лобачевского, а в нижеследующей цитате мы находим прямое указание, как надо поставить эту задачу.

Сначала напишем в современных обозначениях полученные Лобачевским формулы

$$L = 2\pi r, \qquad S = 4\pi r^2 \tag{1}$$

для длины окружности L и площади сферы S радиуса ρ, где

$$r = k\, sh\, \frac{\rho}{k}\ , \tag{2}$$

k - характерная для геометрии Лобачевского константа: её квадрат является коэффициентом пропорциональности между площадью Σ треугольника и дефектом его углов A, B и C:

$$\Sigma = k^2 (\pi - A - B - C)\ . \tag{3}$$

С поправкой на обозначения цитирую:

"Полагаем, как и многие в этом уверены, что силы притягательные слабеют от распространения своего действия по сфере. В употребительной Геометрии величину сферы принимают $4\pi\rho^2$ для полупоперечника ρ, от чего сила должна уменьшаться в содержании к квадрату расстояния. В воображаемой Геометрии нашёл я поверхность шара $4\pi r^2$..." [2, с. 159].

Остановимся здесь и увидим, что Лобачевский ввёл выражение для силы тяготения в условиях открытой им геометрии: сила, с которой планета притягивается к звезде, равна

$$F = \gamma \frac{m\,M}{r^2}\,, \tag{4}$$

где γ - гравитационная константа Ньютона, m - масса планеты, M - масса звезды, r есть (2), а ρ - расстояние от звезды до планеты.

Звезду можно считать покоящейся при условии, что масса M намного больше массы m. При этом условии масса m из уравнений движения планеты выпадает.

Введём сферические координаты ρ, θ и φ, где θ и φ - широта и долгота на сфере радиуса ρ. Так как на этой сфере длина экватора равна $2\pi r$, то в сферических координатах метрика пространства Лобачевского равна

$$d\,s^2 = d\,\rho^2 + r^2\,(\,d\,\theta^2 + \sin^2\theta\,d\,\varphi^2\,)\,, \tag{5}$$

а квадрат скорости планеты равен

$$V^2 = \left(\frac{d\,\rho}{d\,t}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\,\theta}{d\,t}\right)^2 + r^2 \sin^2\theta\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2\,, \tag{6}$$

где t - время.

Совмещая центр сферических координат с притягивающей звездой, определим создаваемый ею гравитационный потенциал U, решая систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \gamma\,M\,r^{-2}\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \tag{7}$$

с граничным условием

$$\lim_{\rho \to \infty} U = 0\,. \tag{8}$$

Отсюда находим

$$U = \frac{\gamma\,M}{K}\,\left[\,1 - cth\,\frac{\rho}{K}\,\right]\,. \tag{9}$$

Теперь составим лагранжеву функцию

$$\Lambda = \frac{1}{2}\,V^2 - U \tag{10}$$

и уравнения движения планеты

$$\frac{d}{d\,t}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot\rho} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho}\,, \quad \frac{d}{d\,t}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot\theta} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta}\,, \quad \frac{d}{d\,t}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot\varphi} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi}\,, \tag{11}$$

где точкой над координатами ρ, θ и φ планеты отмечены их производные по времени t.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Так как лагранжева функция (10) не зависит явно от времени t, то сохраняется энергия планеты

$$E = \frac{1}{2}\,V^2 + U\,, \tag{12}$$

а в силу сферической симметрии сохраняется момент импульса планеты с компонентами

$$L_1 = y\,\dot z - z\,\dot y\,, \quad L_2 = z\,\dot x - x\,\dot z\,, \quad L_3 = x\,\dot y - y\,\dot x\,, \tag{13}$$

где

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi\,, \quad y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi\,, \quad z = r\,\cos\theta\,. \tag{14}$$

Впрочем, в этом можно убедиться непосредственно, дифференцируя по времени t функции (12) и (13).

В силу (13)

$$L_1\,x + L_2\,y + L_3\,z = 0\,. \tag{15}$$

Следовательно, сохранение момента импульса в данном случае означает, что планета движется в плоскости Лобачевского, проходящей через центр притяжения.

Без ограничения общности можно считать, что $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, так что планета движется в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$. При этом компонента $L_3 = L$ момента импульса принимает вид

$$L = r^2\,\dot\varphi\,, \tag{16}$$

а энергия планеты принимает вид

$$E = \frac{1}{2} [\, \dot{\rho}^{\,2} + r^2 \dot{\varphi}^{\,2} \,] + U \,. \tag{17}$$

Так как планета на звезду не падает, то $L \neq 0$. Подставляя (16) в (17), получаем следующее дифференциальное уравнение для радиуса ρ в зависимости от угла φ :

$$L^2 \left[\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + r^2 \right] = 2\,(E - U)\, r^4 \,. \tag{18}$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение, обозначим

$$k\; th\, \frac{\rho}{k} = \frac{1}{w} \,. \tag{19}$$

Так как

$$d\,w = -\, r^{-2}\, d\,\rho \,, \qquad w^2 = r^{-2} + k^{-2} \,, \tag{20}$$

то уравнение (18) преобразуется к виду

$$L^2 \left[\left(\frac{d\,w}{d\,\varphi}\right)^2 + w^2 - k^{-2} \right] = 2\,\left(E - \frac{\gamma M}{k} + \gamma M w\right) . \tag{21}$$

В свою очередь, уравнение (21) можно преобразовать к виду

$$E + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma M}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{L^2}{\gamma M k}\right)^2 = \frac{L^2}{2} \left[\left(\frac{d\,w}{d\,\varphi}\right)^2 + (w - \gamma M L^{-2})^2 \right], \tag{22}$$

(что нетрудно сделать). Отсюда следует, что на область возможных значений $(E,\ L^2)$ накладывается условие

$$E \geqslant -\,\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma M}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{L^2}{\gamma M k}\right)^2 . \tag{23}$$

Обозначая

$$P = \frac{L^2}{\gamma M} \,, \qquad N = \sqrt{\left(1 - \frac{P}{k}\right)^2 + \frac{2\,P\,E}{\gamma M}} \,, \tag{24}$$

уравнение (22) запишем в виде

$$P^2 \left(\frac{d\,w}{d\,\varphi}\right)^2 + (P\,w - 1)^2 = N^2 \,. \tag{25}$$

Считая, что наибольшее значение w принимает при $\varphi = 0$, находим

$$P\,w = 1 + N \cos\varphi \,, \tag{26}$$

или

$$k\; th\, \frac{\rho}{k} = \frac{P}{1 + N \cos\varphi} \,. \tag{27}$$

Заметим, что в силу (23) и (24) число N неотрицательное, а число P положительное. Наконец, так как расстояние от звезды до планеты ограничено, то согласно (27) при всяком значении угла φ для планеты выполняется неравенство

$$\frac{P}{1 + N \cos\varphi} < k \,. \tag{28}$$

Полагая здесь $\varphi = \pi$, получаем неравенство $p < (1 - N)k$.

Следовательно, для всякой планеты в пространстве Лобачевского выполняются неравенства

$$N \geqslant 0, \quad P > 0, \quad N + \frac{P}{k} < 1. \tag{29}$$

На плоскости $P\,N$ (см. рисунок 1) множество (29) состоит из отрезка

$$N = 0, \quad 0 < P < k, \tag{30}$$

и треугольника

$$N > 0, \quad P > 0, \quad N + \frac{P}{k} < 1. \tag{31}$$

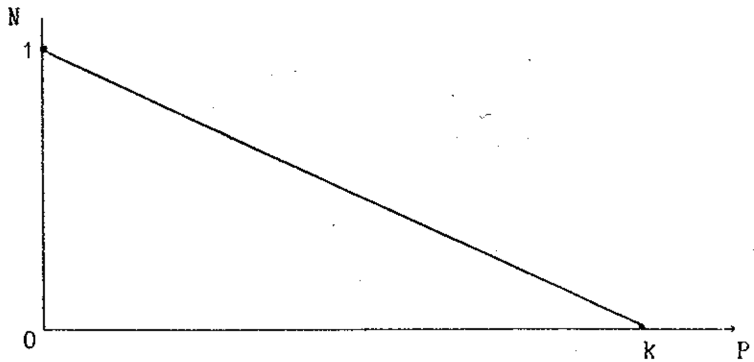

Рисунок 1

3. КРУГОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТЫ

При круговом движении планеты выполняются условия (30). Наоборот, если эти условия выполняются, то планета движется по кругу. Эти условия эквивалентны условиям

$$E = -\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma M}{L}\right)^2\left(1-\frac{L^2}{\gamma M k}\right)^2, \quad 0 < L^2 < \gamma M k. \qquad (32)$$

На плоскости L^2 E множество точек (32) изображается кривой линией типа $y = 2 - x - \frac{1}{x}$, $0 < x < 1$.

Расстояние ρ от звезды до планеты при круговом движении не зависит от φ. Обозначим его через a. Согласно (24) и (27) квадрат момента импульса планеты в этом случае равен

$$L^2 = \gamma M k \, th \frac{a}{k}, \qquad (33)$$

а согласно (31) энергия планеты равна

$$E = \frac{\gamma M}{k}\left(1 - cth \frac{2a}{k}\right). \qquad (34)$$

Согласно (16) по окружности планета вращается равномерно с угловой скоростью

$$\dot{\varphi} = L / \left(k \, sh \frac{a}{k}\right)^2. \qquad (35)$$

Период обращения планеты равен

$$T = \frac{2\pi}{|L|}\left(k \, sh \frac{a}{k}\right)^2, \qquad (36)$$

то есть

$$2\,|L|\,T = 2\pi k^2 \left(ch \frac{2a}{k} - 1\right). \qquad (37)$$

Заметим, что в правой части последнего равенства стоит площадь круга радиуса 2 a.

Из (33) и (36) получаем следующее выражение для квадрата периода:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M}\left(k \, sin \frac{a}{k}\right)^3 ch \frac{a}{k}. \qquad (38)$$

3. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТЫ

Орбиту планеты на плоскости Лобачевского можно определить так же, как и на плоскости Евклида. Действительно, как мы видели, при выполнении условий (30) орбита является окружностью, то есть геометрическим местом точек, равноудалённых от заданной точки.

Рассмотрим теперь условия (31). Они эквивалентны условиям

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma M}{L}\right)^2\left(1-\frac{L^2}{\gamma M k}\right)^2 < E < 0, \quad 0 < L^2 < \gamma M k. \qquad (39)$$

На плоскости L^2 E множество точек (39) изображается криволинейным треугольником.

При выполнении этих условий орбиту планеты можно назвать эллипсом, определяя эллипс как геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек есть величина постояннная. Заданные точки назовём фокусами и обозначим F и $\tilde{F}$. Постоянную сумму расстояний обозначим через $2a$ и назовём длиной большой оси эллипса. Расстояние между фокусами обозначим через $2c$. Среднюю точку между фокусами обозначим O и назовём центром эллипса. Большая ось эллипса проходит через его фокусы и делится центром эллипса пополам. Малая ось эллипса проходит через его центр перпендикулярно к большой оси. Как и большая, малая ось делится центром эллипса пополам. Длину малой оси обозначим через $2b$. Расстояния от точки Q, лежащей на эллипсе, до фокусов обозначим ρ и $\tilde{\rho}$, так что $\rho + \tilde{\rho} = 2a$, $a > c$.

Из треугольника $QF\tilde{F}$ находим (см. рисунок 2)

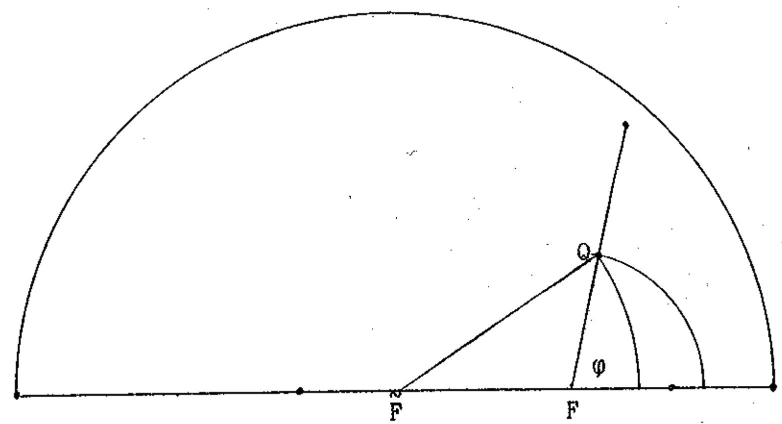

Рисунок 2

$$ch\,\frac{2a-\rho}{k} = ch\,\frac{2c}{k}\;ch\,\frac{\rho}{k} - sh\,\frac{2c}{k}\;sh\,\frac{\rho}{k}\;cos\,(\pi-\varphi)\,. \qquad (40)$$

После несложных преобразований отсюда получаем уравнение (27), где

$$P\;sh\,\frac{2a}{k} = k\,(ch\,\frac{2c}{k} - ch\,\frac{2c}{k}),\quad N\;sh\,\frac{2a}{k} = sh\,\frac{2c}{k}. \qquad (41)$$

Убедимся в том, что определённые таким образом P и N удовлетворяют условиям (31): так как c > 0 и a >c, то первые два из условий (31) удовлетворяются, а так как

$$N + \frac{P}{k} - 1 = [sh\,\frac{2c}{k} + ch\,\frac{2a}{k} - ch\,\frac{2c}{k} - sh\,\frac{2a}{k}]\;/\;sh\,\frac{2a}{k} =$$

$$= [exp\,(-\frac{2a}{k}) - exp\,(-\frac{2c}{k})]\;/\;sh\,\frac{2a}{k}\,, \qquad (42)$$

то удовлетворяется и третье из условий (31).

Когда точка Q находится на малой оси, то треугольник $Q\,\tilde{F}\,F$ становится равнобедренным, а треугольник $Q\;O\;F$ – прямоугольным. При этом $\rho = \tilde{\rho} = a$. Следовательно,

$$ch\,\frac{a}{k} = ch\,\frac{b}{k}\;ch\,\frac{c}{k}\,. \qquad (43)$$

Подставляя это равенство в формулу (41) для P, получаем

$$P\;th\,\frac{a}{k} = k\;th^2\,\frac{b}{k}\,. \qquad (44)$$

Согласно (24) и (44) получаем

$$L^2 = \gamma\,M\,k\;th^2\,\frac{b}{k}\;/\;th\,\frac{a}{k}\,. \qquad (45)$$

Подсчитаем E. Согласно (24) имеем

$$E = \frac{\gamma\,M}{2\,p}\,[\,N^2 - (1 - \frac{P}{k})^2\,]. \qquad (46)$$

Разлагая разность квадратов в произведение двух множителей, один из которых равен (42), а другой равен

$$N + 1 - \frac{P}{k} = [exp\,\frac{2c}{k} - exp\,(-\frac{2a}{k})]\;/\;sh\,\frac{2a}{k}\,,$$

находим

$$N^2 - (1 - \frac{P}{k})^2 = 2\,[ch\,\frac{2c}{k} - ch\,\frac{2a}{k}]\;exp\,(-\frac{2a}{k})\;/\;sh^2\,\frac{2a}{k}\,.$$

Подставляя сюда (41), находим

$$N^2 - (1 - \frac{P}{k})^2 = -\,2\,\frac{P}{k}\;exp\,(-\frac{2a}{k})\;/\;sh\,\frac{2a}{k}\,.$$

Подставляя это равенство в (46), получаем (34), так что энергия планеты, как и в евклидовой геометрии, не зависит от малой оси её орбиты. Сравнивая (34) с (9), получаем замечательное равенство

$$E = U\,(2a)\,, \qquad (47)$$

независимое от постулата Евклида о параллельных в видимом мире, то есть справедливое в абсолютной геометрии видимого мира.

В равной мере к абсолютной геометрии видимого мира относится первый закон Кеплера, согласно которому планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце (если под эллипсом понимать геометрическое место точек, сумма расстояний которых до фокусов есть величина постоянная; в соответствии с формулой (47) эта сумма равна 2a).

Можно определить орбиту планеты иначе. Проведём окружность радиуса 2a с центром в фокусе $\tilde{F}$ (см. рисунок 2). Орбита есть множество точек, равноудаленных от этой окружности и от фокуса F, что видно из формулы (40).

Докажем, что второй закон Кеплера (в уточнённой формулировке) также относится к абсолютной геометрии видимого мира.

Для этого рассмотрим площадь сектора, лежащего на плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$ и ограниченного лучами $\varphi = 0$, $\varphi = const$ и некоторой кривой $\rho = \rho\,(\varphi)$. Ввиду (5) равна

$$\Sigma\,(\varphi) = \int_0^{\varphi} d\,\mu \int_0^{\rho(\mu)} k\;sh\,\frac{\xi}{k}\;d\,\xi = \int_0^{\varphi} k^2 [\,ch\,\frac{\rho(\mu)}{k} - 1\,]\;d\,\mu\,. \qquad (48)$$

Если удвоим все радиальные размеры этого сектора, то получим сектор, ограниченного лучами $\varphi = 0$, $\varphi = const$ и кривой $\rho = 2\,\rho\,(\varphi)$. При этом его площадь в случае геометрии Евклида учетверится, а в случае геометрии Лобачевского станет равной

$$\hat{\Sigma}\,(\varphi) = \int_0^{\varphi} k^2 [\,ch\,\frac{2\,\rho(\mu)}{k} - 1\,]\;d\,\mu = \int_0^{\varphi} 2\,k^2\;sh^2\,\frac{\rho(\mu)}{k}\;d\,\mu\,. \qquad (49)$$

Следовательно, формулу (16) можно записать в виде

$$2\,L\,t = \hat{\Sigma}\,(\varphi)\ . \qquad (50)$$

Так можно записать второй закон Кеплера в абсолютной геометрии, понимая под $\hat{\Sigma}$ (φ) площадь сектора фигуры, которая получится из орбиты планеты, если удвоить её радиальные размеры . В геометрии Лобачевского этот сектор ограничен лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \mathrm{const}$ и кривой

$$k\ th\ \frac{\rho}{2\,k} = \frac{P}{1 + N\cos\varphi}\ . \qquad (51)$$

Следовательно, в геометии Лобачевского

$$\hat{\Sigma}\,(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{2\,P^2\,d\,\mu}{(1 + N\cos\mu)^2 - P^2/\,k^2}\ . \qquad (52)$$

Этот интеграл берётся подстановкой $\xi = tg\,\frac{\mu}{2}$. Действительно, так как под интегралом стоит разность

$$\frac{P\,k}{1 + N\cos\mu - P/\,k} - \frac{P\,k}{1 + N\cos\mu + P/\,k}\ , \qquad (53)$$

причём выполняются условия (29), а при $m > |n|$ имеем

$$\frac{d\,\mu}{m + n\cos\mu} = \frac{2}{\sqrt{m^2 - n^2}}\ d\ arctg\left[\sqrt{\frac{m - n}{m + n}}\ \ tg\ \frac{\mu}{2}\right], \qquad (54)$$

то

$$L\ t = \frac{P\,k}{(1 - P/\,k)^2 - N^2}\ arctg\left[\sqrt{\frac{k - P - kN}{k - P + kN}}\,tg\ \frac{\varphi}{2}\right] - \frac{P\,k}{(1 + P/\,k)^2 - N^2}\ arctg\left[\sqrt{\frac{k + P - kN}{k + P + kN}}\,tg\ \frac{\varphi}{2}\right]. \qquad (55)$$

Ввиду (54) удобно считать, что угол φ меняется $-\pi$ до $+\pi$. При этом условии время t меняется от $-\frac{T}{2}$ до $+\ \frac{T}{2}$, где T – находим период обращения планеты по орбите (её год). Отсюда находим:

$$|L|\ T = \pi\,P\,k\left[\frac{1}{(1 - P/\,k)^2 - N^2} - \frac{1}{(1 + P/\,k)^2 - N^2}\right]. \qquad (56)$$

Подставляя (24) в (56), находим, что период следующим образом зависит от энергии E:

$$T = \frac{\pi\,k}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{-E}} - \frac{1}{\sqrt{-E + 2\,\gamma\,M\,/\,k}}\right]. \qquad (57)$$

От момента L он вовсе не зависит.

Подставляя (34) в (57), получаем выражение (38) для квадрата периода T. Это выражение удобно записать в следующем виде:

$$(T\ ch\ \frac{a}{k})^2 = \frac{\pi^2}{2\gamma\,M}\ \ (k\ sh\ \frac{2a}{k})^3\ . \qquad (58)$$

Так выглядит третий закон Кеплера в геометрии Лобачевского.

4. О ГРАВИТАЦИОННОМ ПОТЕНЦИАЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Из (5) и (7) следует, что для гравитационного потенциала U, порождённого массой звезды в пространстве Лобачевского, второй дифференциальный параметр Бельтрами Δ U всюду вне звезды равен нулю. Считая, что радиус звезды мал по сравнению с константой k, находим вблизи звезды приближённое выражение

$$U = -\ \frac{\gamma\,M}{\rho} \qquad (59)$$

для потенциала (9) и приближённое выражение

$$d\,s^2 = d\,\rho^2 + \rho^2\ (\ d\,\theta^2 + \sin^2\theta\ d\,\varphi^2\ ) \qquad (60)$$

для метрики (5). Иначе говоря, в малой окрестности звезды потенциал (9) переходит в ньтоновский потенциал (59), а метрика (5) переходит в евклидову метрику (60). Так как ньтоновский потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ U = 4\,\pi\,\gamma\,M\,\delta\,(\mathbf{r}) \qquad (61)$$

с δ - образной плотностью массы, то потенциал (9) удовлетворяет уравнению

$$\Delta\,U = 4\,\pi\,\gamma\,M\,u\,\delta\,(x)\,\delta\,(y)\,\delta\,(z)\ , \qquad (62)$$

где x, y, z – суть (14),

$$u = ch\ \frac{\rho}{k}\,, \qquad (63)$$

Ряд результатов по данному вопросу опубликован в [3] – [5].

5. СЛУЧАЙ $L = 0$, $E < 0$

Случай $L = 0$, $E < 0$ можно считать предельным по отношению к рассматренному выше случаю эллиптического движения. При $L \to 0$ расстояние $2c$ между фокусами эллипса стремится к $2a$, а сам эллипс вырождается в радиальный отрезок длины $2a$. При этом фокусы стремятся к концам этого отрезка [6, с. 75].

При $L = 0$ согласно (16) $\dot{\varphi} = 0$. Наряду с $\theta = \frac{\pi}{2}$ мы можем положить $\varphi = 0$. Далее, обозначив через (34) отрицательную энергию E, при $L = 0$ согласно (9) и (17) получим

$$\left[\frac{d\rho}{dt}\right]^2 = \frac{2\gamma M}{k}\left[cth\,\frac{\rho}{k} - cth\,\frac{2a}{k}\right]. \qquad (64)$$

Как видно, задача свелась к квадратуре. Последняя берётся с помощью подстановки

$$S = \sqrt{cth\,\frac{\rho}{k} - cth\,\frac{2a}{k}}\;. \qquad (65)$$

В результате получаем

$$\sqrt{2\gamma M k^{-3}}\; t =$$

$$= \left[cth\,\frac{2a}{k} - 1\right]^{-1/2}\left[\frac{\pi}{2} - arctg\left[cth\,\frac{2a}{k} - 1\right]^{-1/2} S\right] -$$

$$- \left[cth\,\frac{2a}{k} + 1\right]^{-1/2}\left[\frac{\pi}{2} - arctg\left[cth\,\frac{2a}{k} + 1\right]^{-1/2} S\right]. \qquad (66)$$

Отсюда следуют формулы (57) и (58).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.И.Лобачевский. О началах геометрии. Полное собрание сочинений, М.-Л. Гостехиздат, т. 1, 1946, с. 185.

2. Н.И.Лобачевский. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных. Полное собрание сочинений, М.-Л. Гостехиздат, т. 2, 1949, с. 147.

5. Н.А.Черников. Введение геометрии Лобачевского в теорию гравитации Ньютона. Препринт ОИЯИ Р2-91-381, Дубна, 1991.

4. Н.А.Черников. Введение геометрии Лобачевского в теорию гравитации. ЭЧАЯ, том 23, вып. 5, 1992, с. 1155.

5. Н.А.Черников. Геометрия Лобачевского и теория тяготения Ньютона. В сб.: In memoriam N.I. Lobachevskii. Vol III. Part 1. Изд-во Казанского университета, 1995, с. 171.

6. И.И.Привалов. Аналитическая геометрия. М. ГИФМЛ. 1993.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 марта 1997 года.