ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-97-66

В.Н.Первушин, В.И.Смиричинский

ДИНАМИКА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА В ТЕРМИНАХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ КРИВИЗНЫ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

1997

1. Введение

Эта работа посвящена исследованию структуры уравнений Эйнштейна в вакууме с точки зрения свойств кинеметрических инвариантов, т.е. инвариантов относительно широкого подкласса общековариантных преобразований: $t' = t'(t)$, $x' = x'(t,x)$.

Хорошо известна роль кинеметрических величин с точки зрения задания систем отсчета или монадного формализма [1]. Кинеметрические величины однозначно связаны с АДМ-параметрами

$$ds^2 = N^2 dt^2 - h_{ik}(dx^2 - N^i dt)(dx^k - N^k dt) , \tag{1}$$

которые играют существенную роль в гамильтоновом формализме [2]. В частности, недавно был предложен метод безкалибровочной редукции [3]-[4], основанный на явном решении гамильтоновой связи относительно следа второй квадратичной формы. С этой точки зрения имеет смысл исследовать динамическое содержание кинеметрического инварианта, такого как вторая квадратичная форма. Кинеметрические инварианты - это величины, которые под действием этих преобразований ведут себя как скаляры. Например, собственные значения второй квадратичной формы, или собственные значения внутренней кривизны ${}^3R_{ij}(h_{ij})$, или углы ориентации собственного базиса второй квадратичной формы относительно собственного базиса внутренней кривизны - все это кинеметрические инварианты.

Именно с точки зрения свойств кинеметрических инвариантов мы попытаемся проанализировать структуру уравнений Эйнштейна. За основу мы возьмем собственные значения второй квадратичной формы. Такой подход нарушает явную общековариантность теории, что соответствует фиксации семейства гиперповерхностей. Поэтому в секции 2 показано, как преобразуются АДМ-параметры при переходе от одной системы гиперповерхностей к другой, т.е. при некинеметрических преобразованиях. В секции 3 получены уравнения Эйнштейна в терминах АДМ-параметров и второй квадратичной формы, здесь мы просто делаем подстановку АДМ-параметров в выражение для второй квадратичной формы и в уравнения Эйнштейна. Также в секции 3 проводится анализ уравнений и обсуждается редукция к физическим степеням свободы. В секции 4 приводятся некоторые простейшие примеры частных решений связей.

2. АДМ-формализм. Трансформационные свойства АДМ-параметров при некинеметрических преобразованиях

АДМ-параметризация метрики 4-х мерного пространства

$$ds^2 = N^2dt^2 - h_{ik}(dx^2 - N^i dt)(dx^k - N^k dt)$$

означает разбиение 4-х пространства на семейство пространственноподобных гиперповерхностей $t = cosnt$, при этом h_{jk} - внутренняя метрика гиперповерхности $t = const$ (первая квадратичная форма), а из параметров N(лэпс-функция) и N^k(шифт вектор) составляется 4-х вектор $\nu^\alpha = (\frac{1}{N}, \frac{N^k}{N})$, который является единичной нормалью к гиперповерхности. Кроме этих параметров для полного определения гиперповерхности $t = const$, необходимо задать вторую квадратичную форму

$$b_{ik} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_i N_j) ,$$

которая определяет как вложена гиперповерхность в 4-х пространство. Первая h_{ik} и вторая b_{ik} квадратичные формы являются 3-х тензорами относительно указанных выше кинеметрических преобразований $t' = t'(t)$ $x' = x'(t, x)$. Эти преобразования сохраняют семейство гиперповерхностей $t = const$, меняя лишь координатные линии времени и внутренние координаты самих гиперповерхностей.

Рассмотрим как преобразуются параметры АДМ-метрики при некинеметрических преобразованиях $t = t(t', x')$.

Преобразования $t = t(t', x')$ принадлежат к классу ортометрических преобразований, которые обеспечивают переход от одной системы гиперповерхностей к другой, сохраняя линии времени неизменными. За счет кинеметрических преобразований, которые сохраняют систему гиперповерхностей

$$t' = t'(t)$$

$$x' = x'(t, x),$$

шифт вектор N^k всегда можно обратить в нуль (по крайней мере, в пределах некоторой координатной карты, что соответствует переходу к линиям времени ортогональным 3-х поверхностям $t = const$)

$$ds^2 = N^2dt^2 - h_{ik}(dx^i)(dx^k) .$$

Подставляя в последнюю формулу выражение $dt = \frac{\partial t}{\partial t'}dt' + \frac{\partial t}{\partial x^{i'}}dx^{i'}$ и группируя соответствующие члены при соответствующих дифференциалах координат и времени, мы получим

$$ds^2 = N'^2dt'^2 - h'_{ik}(dx^{i'} - N'^i dt')(dx^{k'} - N'^k dt') ,$$

где

$$h'_{ij} = h_{ij} - N^2\frac{\partial t}{\partial x^{i'}}\frac{\partial t}{\partial x^{j'}} ;$$

$$N'^k = h'^{pk}\frac{\partial t}{\partial x^{p'}}\frac{\partial t}{\partial t'} \quad ; \quad N' = \sqrt{N^2(\frac{\partial t}{\partial t'})^2 + N'^k N'_k} .$$

Можно также выписать как преобразуется вторая квадратичная форма семейства гиперповерхностей $t = const$:

$$b'_{ij} = \frac{1}{2N'^2}\left(2Nb_{ij}\frac{\partial t}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial t'}\left(N^2\frac{\partial t}{\partial x^{i'}}\frac{\partial t}{\partial x^{j'}}\right) + \nabla'_i N_j + \nabla'_j N_i\right) .$$

В закон преобразования входит одна произвольная функция времени и координат , за счет выбора которой всегда, по крайней мере, один кинеметрический инвариант можно обратить в нуль или в любую заданную функцию. Однако, как мы покажем в секции 3, в пространстве Эйнштейна можно обратить в нуль не любой кинеметрический инвариант.

3. Анализ уравнений Эйнштейна в АДМ-формализме

3.1. АДМ-формализм

Выразим уравнения Эйнштейна $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 0$ через АДМ-параметры. Прямая подстановка выражения для второй квадратичной формы и АДМ-параметров дает следующий вид уравнений Эйнштейна:

$$\kappa_0 \equiv {}^3R + b^i_k b^k_i - b^2 = 0 ; \tag{2}$$

$$\kappa_\alpha \equiv \nabla_k b - \nabla_i b^i_k = 0 ; \tag{3}$$

$$\frac{\dot{b}_{ij}}{N} - \frac{1}{N}(b_{ik}\nabla_j N^k + b_{jk}\nabla_i N^k + N^k\nabla_k b_{ij}) = {}^3R_{ij} + 2b^k_i b_{kj} + \frac{1}{N}\nabla_i\nabla_j N - bb_{ij} , \tag{4}$$

где $b = b_{ij}h^{ij}$, $b^i_j = h^{ik}b_{kj}$, ${}^3R-$ скалярная кривизна по метрике h_{ij}.

Нужно еще добавить выражение для второй квадратичной формы

$$b_{ij} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_i N_j) . \tag{5}$$

Ковариантная производная берется здесь по метрике h_{ij} ; (2) и (3) есть связи, а уравнения (4) и (5) назовем динамическими уравнениями и их стуктуру можно записать в "стандартной канонической" форме

$$\dot{b} = f_{(1)}(b, h, N, N^i) , \tag{6}$$

$$\dot{h} = f_{(2)}(b, h, N, N^i) \, .$$

Для проверки полученных формул можно воспользоваться теорией гиперповерхностей (соотношения Гаусса и Петерсона-Кодаци), изложенной, например, в книгах [5], [6].

3.2. Локальная инвариантность, калибровочный произвол в уравнениях

Из структуры уравнений (2)-(5) видно, что в связи (2) и (3), N и N^k не входят и нет динамических уравнений на эти величины.

Эти переменные входят в правую часть (4)-(5) и обеспечивают инвариантность уравнений относительно общекоординатных преобразований

$$t' = t'(t, x) \, ,$$

$$x' = x'(t, x) \, .$$

Выбор этих переменных достаточно произволен, однако корректно сформулировать задачу Коши без конкретного задания N и N^k нельзя.

Можно даже указать на смысл этого произвола с точки зрения геометрии 4-х пространства. Поскольку из величин N и N^k составляется единичный 4-х вектор $\nu^\alpha = (\frac{1}{N}, \frac{N^k}{N})$, который является вектором нормали к гиперповерхности $t = const$, то фиксация этого вектора физически означает фиксацию конгруэнции наблюдателей, между которыми возможна однозначная синхронизация часов (см. [7] пар.85).

Итак, мы имеем динамическую систему со связями инвариантную относительно преобразований координат и времени (4 произвольные функции), и в системе присутствуют нединамические степени свободы (еще 4 функции), которые и обеспечивают эту инвариантность.

3.3. Кинеметрические инварианты в уравнениях Эйнштейна

В секции 2 было показано, что за счет выбора системы гиперповерхностей какой-то из инвариантов может принимать любые заданные значения. Однако здесь нужно быть весьма осторожным. Так, если на пространство Энштейна наложить некоторые топологические условия, например, что оно асимптотически плоское или что гиперповерхности $t = const$[1] замкнуты[2], то нельзя обратить в нуль b , т.к. иначе мы имеем статическую метрику. Сформулируем это в виде **утверждения** :

[1]Здесь и далее предполагается, что существует глобальное разбиение всего 4-х пространства на семейство гиперповерхностей $t = const$, причем 4-х векторное поле нормальное к этим гиперповерхностям является непрерывным. Физически это означает возможность синхронизации часов во всем пространстве.

[2]Под замкнутым многообразием понимается компактное многообразие без границ.

В пространстве Эйнштейна $R_{\alpha\beta} = 0$, при замкнутой системе гиперповерхностей $t = const$ или при асимптотически плоском пространстве из равенства нулю второй квадратичной формы $b = 0$ следует, что пространство статическое.

Доказательство.

Свернем уравнение (4)

$$\frac{\dot{b}}{N} - \frac{N^k}{N}\nabla_k b + = {}^3R - b^2 + \frac{1}{N}\nabla_i\nabla^i N \qquad (7)$$

при условии $b = 0$ получим

$${}^3RN\sqrt{h} = -\sqrt{h}\Delta N, \qquad (8)$$

учитывая связь (20), имеем

$$b_{ij}b^{ij}N\sqrt{h} = -\sqrt{h}\Delta N \, . \qquad (9)$$

Интегрируя по всему пространству последнее выражение, получим

$$\oint b_{ij}b^{ij}N\sqrt{h}d^3x = 0 \, , \qquad (10)$$

т.к. $b_{ij}b^{ij}$-положительно-определенная функция от x, то из (10) следует $b_{ij} = 0$, что и означает статичность метрики .

Интересно отметить, что для гамильтоновой редукции [3], [4] очень важен след второй квадратичной формы (СВКФ) $b \neq 0$ семейства гиперповерхностей $t = const$, относительно него решается связь, и координата метрики, сопряженная СВКФ, играет роль времениподобной "координаты".

Займемся теперь связью

$${}^3R + b^{ik}b_{ki} - b^2 = 0 \, ,$$

обозначая через λ_1, λ_2, λ_3 собственные значения второй квадратичной формы b_{ij} и учитывая, что

$$b^{ik}b_{ki} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \, ,$$

связь можно переписать в следующем виде:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = b^2 - {}^3R \, , \qquad (11)$$

где

$$b = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \, . \qquad (12)$$

Выражения (11) и (12) можно условно представить себе графически следующим образом. Отложим по оси x, y, z величины λ_1, λ_2, λ_3 соответственно, тогда выражение (11) определяет сферу радиуса $\sqrt{b^2 - {}^3R}$, а выражение (12) определяет плоскость. Пересечение плоскости и сферы дает множество значений λ_k, удовлетворяющих связи.

Существует два предельных случая:

1) когда плоскость и сфера касаются в одной точке, т.е. когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$;

2) когда сфера и плоскость пересекаются по окружности.

Здесь мы выделим случай $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3$.

В секции 4 мы более подробно исследуем эти два случая. Ограничимся замечанием, что выбор этих случаев диктуется только простотой и возможностью удовлетворить условиям связи.

Связь (11) можно переписать и по-другому, перейдя к новой линейной комбинации кинеметрических инвариантов(b, P_1, P_2):

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}P_1 - P_2\right) + \frac{1}{3}b\,; \tag{13}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}P_1 + P_2\right) + \frac{1}{3}b\,; \tag{14}$$

$$\lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}P_1 + \frac{1}{3}b\,. \tag{15}$$

Тогда связь (11) запишется в виде

$$P_1^2 + P_2^2 - b^2 = -{}^3R\,. \tag{16}$$

В пространстве P_1, P_2, b эта связь есть уравнение поверхности второго порядка, а именно, однополостной либо двухполостной гиперболоид вращения, либо конус, если ${}^3R = 0$.

3.4. Триадная формулировка АДМ-формализма

Для диагонализации второй квадратичной формы необходима триадная формулировка уравнений Эйнштейна.

Метрика h_{ij} через триады записывается так:

$$h_{ij} = \omega_{i\underline{k}}\omega_{j\underline{k}} \tag{17}$$

или

$$h^{ij} = \omega^i_{\underline{k}}\omega^j_{\underline{k}}. \tag{18}$$

По повторяющимся триадным (подчеркнутым) индексам подразумевается суммирование, $\omega^i_{\underline{k}}$-есть матрица обратная к $\omega_{i\underline{k}}$:

$$\omega^i_{\underline{k}}\omega_{j\underline{k}} = \delta^i_j. \tag{19}$$

Если задана метрика, то триады определены с точностью до триадных вращений (ортогональных преобразований по подчеркнутым индексам), т.е. триадный формализм расширяет группу локальных симметрий теории.

Выпишем теперь уравнения (2)-(5) в триадном формализме

$${}^3R + b_{\underline{ik}}b_{\underline{ki}} - b^2 = 0; \tag{20}$$

$$\kappa_{\underline{k}} \equiv \nabla_{\underline{k}}b - \nabla_{\underline{i}}b_{\underline{ik}} \;=\; \partial_{\underline{i}}b_{\underline{ik}} - \partial_{\underline{k}}b + \gamma_{\underline{ipi}}b_{\underline{pk}} - \gamma_{\underline{pki}}b_{\underline{pi}} \;=\; 0, \tag{21}$$

здесь $\gamma_{\underline{pki}} = \omega^n{}_{\underline{i}}\omega_{\underline{k}m}\nabla_n\omega^m{}_{\underline{p}}$ – коэффициенты вращения Ричи. ${}^3R$– можно представить в виде

$$-{}^3R = -2\nabla_l(\omega^l_{\underline{k}}\nabla_p\omega^p_{\underline{k}}) - \gamma_{(\underline{np})}\gamma_{(\underline{np})} + \gamma^2 + \frac{1}{2}\nabla_p\omega^p_{\underline{k}}\nabla_i\omega^i_{\underline{k}};$$

$$\gamma_{\underline{np}} = \frac{1}{2}\epsilon_{\underline{nmk}}\gamma_{\underline{mkp}}\;\;;\;\; \gamma = \gamma_{\underline{nn}};$$

$$\frac{\dot b_{\underline{ij}}}{N} - \frac{N^k}{N}\nabla_k b_{\underline{ij}} + T_{\underline{ik}}b_{\underline{kj}} + T_{\underline{jk}}b_{\underline{ki}} = {}^3R_{\underline{i}\ \underline{j}} - bb_{\underline{ij}} + \frac{1}{N}\nabla_{\underline{i}}\nabla_{\underline{j}}N\,; \tag{22}$$

$$\dot\omega^i_{\underline{j}} = -\omega^i_{\underline{k}}[N(b_{\underline{kj}} + T_{\underline{kj}}) + \nabla_{\underline{k}}N_{\underline{j}} - N^m\nabla_m\omega_{\underline{k}n}\;\omega^n_{\underline{j}}]\,. \tag{23}$$

Здесь $T_{\underline{ij}}$-полностью антисимметричный тензор

$$T_{\underline{ij}} = \frac{1}{N}(\omega^n_{[\underline{i}}\dot\omega_{\underline{j}]} + \nabla_{[\underline{j}}N_{\underline{i}]} + N^m\nabla_m\omega_{\underline{i}n}\;\omega^n_{\underline{j}}). \tag{24}$$

Система уравнений (20)-(23) также может быть переписана в "стандартной канонической" форме

$$\kappa_\alpha(b,\omega) = 0;$$
$$\dot b = f_{(1)}(b,\omega,N,N^i,T);$$
$$\dot h = f_{(2)}(b,\omega,N,N^i,T).$$

Переход к триадному формализму расширяет группу локальных симметрий добавлением группы триадных вращений (3 произвольные функции), и тогда нединамический антисимметрический тензор T_{ik} обеспечивает требуемую инвариантность уравнений.

3.5. Уравнения Эйнштейна в терминах $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Для того, чтобы выписать уравнения Эйнштейна в терминах собственных значений второй квадратичной формы, воспользуемся инвариантностью относительно триадных вращений и выберем триады так, чтобы они являлись собственными векторами второй квадратичной формы, т.е.$b_{\underline{ij}} = \delta_{\underline{ij}}\lambda_{\underline{i}}$. Динамические уравнения (22) принимают вид

$$\overset{\odot}{\lambda}_{\underline{i}} = {}^3R_{\underline{ii}} - b\lambda_{\underline{i}} + \frac{1}{N}\nabla_{\underline{i}}\nabla_{\underline{i}}N, \tag{25}$$

$$\left(T_{\underline{ki}} - \frac{N^p}{N}\gamma_{\underline{k}\,\underline{i}\,\underline{p}}\right)(\lambda_{\underline{i}} - \lambda_{\underline{k}}) = {}^3R_{\underline{i}\,\underline{k}} + \frac{1}{N}\nabla_{\underline{i}}\nabla_{\underline{k}}N \quad , \quad \underline{i} \neq \underline{k}, \tag{26}$$

где $\overset{\odot}{\lambda}_{\underline{i}} \equiv \frac{1}{N}\dot{\lambda}_{\underline{i}} - \frac{N^k}{N}\partial_k\lambda_{\underline{i}}$, а $\gamma_{\underline{k}\,\underline{i}\,\underline{p}}$– коэффициенты вращения Ричи. Связь (21) запишется так:

$$\partial_{\underline{k}}\lambda_{\underline{k}} - \partial_{\underline{k}}b + \sum_{\underline{i}}(\lambda_{\underline{k}} - \lambda_{\underline{i}})\gamma_{\underline{iki}} \tag{27}$$

или в развернутом виде

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_{\underline{1}}\lambda_{\underline{1}} - \partial_{\underline{1}}b + (\lambda_{\underline{1}} - \lambda_{\underline{2}})\gamma_{\underline{212}} + (\lambda_{\underline{1}} - \lambda_{\underline{3}})\gamma_{\underline{313}} & = & 0, \\ \partial_{\underline{2}}\lambda_{\underline{2}} - \partial_{\underline{2}}b + (\lambda_{\underline{2}} - \lambda_{\underline{1}})\gamma_{\underline{121}} + (\lambda_{\underline{2}} - \lambda_{\underline{3}})\gamma_{\underline{323}} & = & 0, \\ \partial_{\underline{3}}\lambda_{\underline{3}} - \partial_{\underline{3}}b + (\lambda_{\underline{3}} - \lambda_{\underline{1}})\gamma_{\underline{131}} + (\lambda_{\underline{3}} - \lambda_{\underline{2}})\gamma_{\underline{232}} & = & 0. \end{array} \right. \tag{28}$$

4. Частные решения связей

4.1. Случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

Приступим к анализу связей. Связь (2) дает

$$\frac{2}{3}b^2 = {}^3R. \tag{29}$$

А связь (3) приводит к тому, что b может быть только функцией времени

$$b = f(t). \tag{30}$$

Теперь уже как следствие выражения (5) (в системе координат, в которой $N^k = 0$) мы получим

$$b = \frac{\dot{\sqrt{h}}}{N\sqrt{h}}; \tag{31}$$

$$b_{ij} \equiv \frac{b}{3}h_{ij} = \frac{\dot{h}_{ij}}{2N}. \tag{32}$$

Из (31) и (32) следует

$$\frac{\dot{\sqrt{h}}}{3\sqrt{h}}h_{ij} = \frac{\dot{h}_{ij}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{h_{ij}}{h^{\frac{1}{3}}}\right) = 0\ . \tag{33}$$

Это означает, что метрика h_{ij} приводима к диагональному виду одновременно с $N^k = 0$:

$$h_{ij} = a^2 H_i \delta_{ij} \ ; \ H_i = H_i(x) \ ; \ a = a(t,x)\ ; \tag{34}$$

$$H_1 H_2 H_3 = 1\ .$$

Вывод: от 3-х метрики у нас осталась одна динамическая степень свободы $a(t,x)$.

Перейдем теперь к динамическому уравнению (4). Свертка этого уравнения дает

$${}^3RN\sqrt{h} = \frac{d}{dt}(\sqrt{h}b) - \sqrt{h}\Delta N\ . \tag{35}$$

Оставшиеся независимые уравнения имеют вид

$${}^3R_{ij} + \partial_i lnN \partial_j lnN + \nabla_i\partial_j lnN = \frac{{}^3R}{3}h_{ij} + \frac{\Delta N}{3N}h_{ij}\ . \tag{36}$$

Уравнения (36) не содержат производных по времени и могут рассматриваться как связи. Интересно отметить следующее : если положить $N = 1$, что соответствует переходу в синхронную систему отсчета, то метрика h_{ij} становится метрикой постоянной отрицательной кривизны, в пустом пространстве это означает плоское 4-х пространство [7].

Кроме того, случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ принадлежит к пространствам типа 1 по классификации Петрова. Сюда же относится метрика Фридмана (Робертсона – Уолкера).

4.2. Случай $\lambda_{\underline{1}} = 0$, $\lambda_{\underline{2}} = \lambda_{\underline{3}} = f(t)$

Связь (28) существенно упрощается, и можно сделать некоторые суждения относительно поведения триады:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \gamma_{\underline{212}} + \gamma_{\underline{313}} & = & 0 \\ \gamma_{\underline{121}} & = & 0 \\ \gamma_{\underline{131}} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \nabla_n\omega^n_{\underline{1}} & = & 0 \\ \nabla_{\underline{1}}\omega^k_{\underline{1}} & = & 0\,. \end{array} \right. \tag{37}$$

Таким образом $\omega^k_{\underline{1}}$ является геодезическим вектором по метрике h_{ij}, дивергенция которого равна нулю.

Оставшаяся связь приводит к тому, что

$${}^3R = 2f^2(t). \tag{38}$$

Из динамических уравнений (25) при этих условиях, только одно содержит производную по времени :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & {}^3R_{\underline{11}} + \frac{1}{N}\nabla_{\underline{1}}\nabla_{\underline{1}}N \\ \frac{\dot{f}}{N} & = & {}^3R_{\underline{22}} - 2f^2(t) + \frac{1}{N}\nabla_{\underline{2}}\nabla_{\underline{2}}N \\ 0 & = & {}^3R_{\underline{22}} + \frac{1}{N}\nabla_{\underline{2}}\nabla_{\underline{2}}N - {}^3R_{\underline{33}} - \frac{1}{N}\nabla_{\underline{3}}\nabla_{\underline{3}}N \end{array} \right. \tag{39}$$

Можно сделать следующее краткое резюме : даже если мы нашли частное решение связей, то необходима дальнейшая фиксация (калибровка) вектора сдвига N^k, функции смещения N и антисимметрического тензора T_{ij}. По-видимому, для этого необходимо привлечь дополнительные условия физического либо геометрического характера.

5. Заключение

В работах [3], [4] был предложен метод безкалибровочной редукции для выделения физических степеней свободы и построения физического гамильтониана и энергии. Суть этого метода состоит в явном разрешении связи [2] относительно одного из канонических импульсов P_a, который пропорционален следу второй квадратичной формы и построению редуцированного действия и гамильтониана с учетом всех поверхностных членов в исходном действии Гильберта – Эйнштейна. И этот метод был успешно опробован на примере некоторых космологических моделей.

Однако при обсуждении метода безкалибровочной редукции возникла следующая проблема: поскольку существует семейство гиперповерхностей с нулевым следом второй квадратичной формы, то преобразованиями координат можно обратить в нуль импульс P_a, и поэтому метод безкалибровочной редукции может быть не корректен и дает неверное определение физического гамильтониана .

Эта проблема снимается утверждением, доказанным в пункте 4.2 :

В пространстве Эйнштейна $R_{\alpha\beta} = 0$, $R_{\alpha\beta,\gamma\phi}$ *при замкнутой системе гиперповерхностей* $t = const$ *или при асимптотически плоском пространстве, из равенства нулю следа второй квадратичной формы* $b = 0$, *следует, что пространство статическое.*

Действительно, если пространство $R_{\alpha\beta} = 0$ асимптотически плоское (или при замкнутой системе гиперповерхностей $t = const$), и мы рассматриваем динамическую метрику (т.е. метрику, несводимую преобразованием координат к статической), то мы не можем глобально обратить в нуль b. Это и есть основной результат данной работы следующий из анализа свойств кинеметрических инвариантов и дающий геометрическое обоснование метода безкалибровочной редукции.

Этот результат можно сформулировать в терминах монадного формализма[3]:

В нестатическом пространстве Эйнштейна $R_{\alpha\beta} = 0$ с плоской асимптотикой не существует глобальной времениподобной конгруэнции (непрерывного семейства времениподобных линий) **такой, чтобы поле единичных касательных векторов τ^μ к этой конгруэнции (поле монад) удовлетворяло бы свойствам:**

1) тензор угловой скорости вращения системы отсчета[4] равен нулю

$$A_{\alpha\beta} = 0 ;$$

2) след тензора скоростей деформации так же равен нулю

$$D^\alpha_\alpha = \nabla_\alpha \tau^\alpha = 0.$$

[3]Термины *монада* и *монадный формализм* предложил А.Л.Зельманов [1].

[4]Понятия и обозначения здесь позаимствованны из ставшей уже классической монографии [8] .

Другими словами, некоторые топологические условия на многообразиях Эйнштейна могут привести к запрету существования целого класса систем отсчета. Поэтому закономерно появление вопроса о том, как вообще те или иные топологические условия могут привести к ограничениям на возможный выбор систем отсчета. В связи с этим авторы надеются, что структура уравнений в терминах собственных значений второй квадратичной формы, полученных в пункте 4.3, поможет ответить на вышепоставленный вопрос при более углубленном анализе.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Гогелидзе Г.А., Палий Ю.Г., Младенову Д., Хведелидзе А.М. за полезные дискуссии и обсуждения.

Литература

[1] Зельманов А.Л., Докл.АН СССР,1976,т.227,с.78 ;

[2] R.Arnovit, S.Deser and C.W.Misner, Phys.Rev.117 (1960)1595; .

[3] A.M.Khvedelidze,V.V.Papoyan,V.N.Pervushin, Phys.Rev. D 51 (1995) 5654;

[4] V.N.Pervushin,V.V.Papoyan,G.A.Gogilidze,A.M.Khvedelidze Yu.G.Palii,V.I.Smirichinski Phys.Let.B 365 (1990)35-40;

[5] Эйзенхарт Л.П.,Риманова геометрия , М. (1948);

[6] Рашевский П.К,Риманова геометрия и тензорный анализ,М.(1953);

[7] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц,Теоретическая физика,М.Наука, (1989) том 2 ;

[8] Владимиров Ю.С., Системы отсчета в теории гравитации, Энергоиздат,(1982).

Рукопись поступила в издательский отдел
28 февраля 1997 года.