ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-97-331

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

НЕЙТРИНО В СФЕРИЧЕСКОМ МИРЕ ДЕ СИТТЕРА: ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ИЗОТРОПНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Направлено в журнал «Известия высших учебных заведений. Физика»

1997

На поведение элементарной частицы со спином 1/2 в мире де Ситтера обратил внимание Дирак в 1935 году [1]. С тех пор эта тема остается актуальной.

Особенно интересным нам представляется поведение нейтрино, массу которого считаем равной нулю. Иногда утверждают, что масса нейтрино либо равняется нулю, либо нулю не равняется, но очень мала, не обращая внимания на то, что между этими возможностями пролегает пропасть: если масса нейтрино равна нулю, то поведение нейтрино можно описать полуспинором, а если не равна нулю, то непременно спинором. Говоря о спиноре и полуспиноре, мы имеем в виду тот смысл, который придал им Картан [2].

Качественные различия между частицами, масса покоя которых больше нуля, и частицами с нулевой массой покоя проявляются не только на квантовом, но и на классическом уровне (то есть в классической механике). Существенно, что частицы с нулевой массой покоя на любом уровне должны рассматриваться как релятивистские, ибо при нерелятивистском рассмотрении масса покоя частицы должна быть строго больше нуля.

Что до геометрии сферического мира де Ситтера, то она принадлежит к классу квадратичных геометрий [3], открытых Пуанкаре в 1887 году в результате изучения и развития им идей геометрии Лобачевского. Естественно, что и сама геометрия Лобачевского входит в тот же класс, занимая в нем главное место. Все квадратичные геометрии относятся к числу римановых геометрий и характеризуются метрикой вида $g_{\alpha\beta}\, d\xi^{\alpha}\, d\xi^{\beta}$.

Геометрия сферического мира де Ситтера интересна тем, что она, как и геометрия плоского мира, допускает пятнадцать линейно независимых конформных моментов импульса и, в том числе, десять изометрических моментов.

ИЗОТРОПНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ

В классической релятивистской механике свободное движение частицы представляется мировой геодезической траекторией в четырехмерном римановом мире и задается уравнениями

$$\frac{d\xi^{\alpha}}{d\tau} = p^{\alpha}, \qquad \frac{dp^{\alpha}}{d\tau} = - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\, p^{\mu}\, p^{\nu}, \tag{1}$$

где $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ – связность Кристоффеля для метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ риманова мира:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\sigma}\, (\partial_{\mu}\, g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}\, g_{\mu\nu} - \partial_{\sigma}\, g_{\mu\nu}) . \tag{2}$$

Так как в силу (1)

$$\frac{d}{d\tau}\, g_{\alpha\beta}\, p^{\alpha}\, p^{\beta} = 0 , \tag{3}$$

то скалярный квадрат импульса p^{α} частицы, равный

$$g_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} \cdot p^{\beta} = - m^2\, c^2 , \tag{4}$$

является первым интегралом системы уравнений (1). Здесь через m обозначена масса покоя частицы, через c – скорость света.

В классической механике нейтрино описывается уравнениями (1) при условии, что

$$g_{\alpha\beta}\, p^{\alpha}\, p^{\beta} = 0 . \tag{5}$$

Линии, на которых выполняется это условие, называются изотропными.

Среди прочих геодезических изотропные геодезические выделяются исключительными свойствами, из которых главное называется их конформной инвариантностью.

КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ИЗОТРОПНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Две метрики $ds^2 = g_{\alpha\beta}(\xi)\, d\xi^{\alpha}\, d\xi^{\beta}$ и $d\check{s}^2 = \check{g}_{\alpha\beta}(\xi)\, d\xi^{\alpha}\, d\xi^{\beta}$, заданные в координатной карте $\xi = \xi^0, \dots , \xi^n$, находятся в конформном соответствии [4], если

$$\check{g}_{\alpha\beta}\,(\xi) = \Omega^2\,(\xi)\, g_{\alpha\beta}\,(\xi) . \tag{6}$$

Здесь $(n + 1)$ – размерность мира. В действительности $n = 3$.

Очевидно, что всякая линия, изотропная относительно метрики $ds^2 = g_{\alpha\beta}(\xi)\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta$, является изотропной линией и относительно метрики (6).

Докажем, что геодезическая линия, изотропная относительно некоторой метрики $ds^2 = g_{\alpha\beta}(\xi)\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta$, является изотропной геодезической линией и относительно метрики (6).

Действительно, при переходе (6) от одной метрики к другой условие изотропности, очевидно, не меняется. Положив $p^\alpha = \Omega^2\, \check{p}^\alpha$, преобразуем уравнения (1) к виду

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \Omega^2\, \check{p}^\alpha, \qquad \frac{d\check{p}^\alpha}{d\tau} = -\,\Omega^2\{\,\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\, \check{p}^\mu\, \check{p}^\nu + 2\,\Omega^{-1}\,\Omega_\mu\, \check{p}^\mu\, \check{p}^\alpha\,\}. \qquad (7)$$

Но в случае конформного соответствия

$$\check{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Omega^{-1}\, \{\delta_\mu{}^\alpha\Omega_\nu + \delta_\nu{}^\alpha\Omega_\mu - \Omega^\alpha g_{\mu\nu}\}, \qquad (8)$$

так что на изотропной линии

$$\{\,\check{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,\}\, \check{p}^\mu\, \check{p}^\nu = 2\,\Omega^{-1}\,\Omega_\mu\, \check{p}^\mu\, \check{p}^\alpha\,. \qquad (9)$$

Поэтому уравнения (7) можно представить в виде

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \Omega^2\, \check{p}^\alpha, \qquad \frac{d\check{p}^\alpha}{d\tau} = -\,\Omega^2\, \check{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}\, \check{p}^\mu\, \check{p}^\nu, \qquad (10)$$

Следовательно, при условии (5) уравнения

$$\frac{d\,\xi^1}{p^1} = \ldots = \frac{d\,\xi^n}{p^4} = -\,\frac{d\,p^1}{\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\, p^\mu\, p^\nu} = \ldots - \frac{d\,p^n}{\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\, p^\mu\, p^\nu}, \qquad (11)$$

инвариантны относительно умножения компонент $g_{\alpha\beta}$ на общий множитель Ω^2.

Если собственное время τ частицы с нулевой покоя заменить на время $\check{\tau}$ так, чтобы выполнялось равенство $\Omega^2\, d\,\tau = d\,\check{\tau}$, и положить $\xi^\alpha = \check{\xi}^\alpha$, то уравнения (10) перейдут в уравнения (1), в которых все переменные снабжены отметкой $\check{}$. Значит, и уравнения (1) инвариантны относительно умножения компонент $g_{\alpha\beta}$ на Ω^2.

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЙ И КОНФОРМНЫЙ МОМЕНТЫ ИМПУЛЬСА

Назовем моментом импульса частицы относительно некоторого векторного поля $k^\alpha(\xi)$ скалярное произведение

$$(k,p) = g_{\alpha\beta}\, k^\alpha\, p^\beta = k_\beta\, p^\beta \qquad (12)$$

импульса частицы с этим полем. Момент импульса частицы назовем изометрическим, если поле удовлетворяет условию

$$\nabla_\mu\, k_\nu + \nabla_\nu\, k_\mu = 0\,, \qquad (13)$$

и назовем конформным, если поле удовлетворяет условию

$$\nabla_\mu\, k_\nu + \nabla_\nu\, k_\mu = 2\,F\, g_{\mu\nu}\,, \qquad (14)$$

где F – некоторая скалярная функция, так что изометрический момент является частного вида (когда F = 0) конформным моментом.

В силу (1) имеем

$$\frac{d}{d\tau}\,(k,p) = \frac{1}{2}(\nabla_\mu\, k_\nu + \nabla_\nu\, k_\mu)\, p^\mu\, p^\nu. \qquad (15)$$

Следовательно, изометрический момент импульса любой частицы сохраняется. Равным образом, сохраняется и конформный момент частицы, но только если масса покоя этой частицы равна нулю. Это еще одно отличительное свойство частиц с нулевой массой покоя.

СРАВНЕНИЕ ДВУХ УРАВНЕНИЙ

Уравнения (13) и (14) тесно связаны друг с другом. В самом деле, имеем

$$\nabla_\mu\, k_\nu + \nabla_\nu\, k_\mu = k^\alpha\, \partial_\alpha\, g_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}\, \partial_\nu\, k^\alpha + g_{\alpha\nu}\, \partial_\mu\, k^\alpha\,. \qquad (16)$$

Поэтому уравнение (14) можно написать в виде

$$k^\alpha\, \partial_\alpha\, g_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}\, \partial_\nu\, k^\alpha + g_{\alpha\nu}\, \partial_\mu\, k^\alpha = 2\,F\, g_{\mu\nu}\,. \qquad (17)$$

Теперь сделаем подстановку (6) и подчиним функцию Ω уравнению

$$k^{\alpha}\,\partial_{\alpha}\,\Omega + F\,\Omega = 0\,. \tag{18}$$

В результате получим уравнение

$$k^{\alpha}\,\partial_{\alpha}\,\breve{g}_{\mu\nu} + \breve{g}_{\alpha\mu}\,\partial_{\nu}\,k^{\alpha} + \breve{g}_{\alpha\nu}\,\partial_{\mu}\,k^{\alpha} = 0\,. \tag{19}$$

Следовательно, конформный момент относительно метрики $g_{\mu\nu}$ с заданной функцией F является изометрическим моментом для метрики (6), если фунция Ω удовлетворяет уравнению (18).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО МИРА ДЕ СИТТЕРА

Сферический мир де Ситтера характеризуется радиусом r. Его можно представить в виде четырехмерного однополостного гиперболоида

$$\eta_{AB}\,x^A\,x^B = x^1\,x^1 + x^2\,x^2 + x^3\,x^3 + x^4\,x^4 - x^0\,x^0 = r^2 \tag{20}$$

в пятимерном псевдоевклидовом пространстве. К этому представлению мы приходим, заменяя декартовы координаты x сферическими:

$$x^0 = R\,tg\,\theta, \tag{21}$$

$$x^1 = \frac{R}{\cos\theta}\,\sin\zeta\,\sin\xi, \qquad x^2 = \frac{R}{\cos\theta}\,\cos\zeta\,\sin\eta,$$

$$x^3 = \frac{R}{\cos\theta}\,\sin\zeta\,\cos\xi, \qquad x^4 = \frac{R}{\cos\theta}\,\cos\zeta\,\cos\eta,$$

где $R \geqslant 0$,

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\,, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant \frac{\pi}{2}\,. \tag{22}$$

Имеем

$$\eta_{AB}\,dx^A\,dx^B = \tag{23}$$

$$= \left(\frac{R}{\cos\theta}\right)^2 \left(\sin^2\zeta\,d\xi^2 + \cos^2\zeta\,d\eta^2 + d\zeta^2 - d\theta^2\right) + dR^2.$$

Полагая здесь $R = r$, $dR = 0$, находим, что геометрия сферического мира де Ситтера задается следующей метрикой:

$$ds^2 = \left(\frac{r}{\cos\theta}\right)^2 \left(\sin^2\zeta\,d\xi^2 + \cos^2\zeta\,d\eta^2 + d\zeta^2 - d\theta^2\right)\,. \tag{24}$$

СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В МИРЕ ДЕ СИТТЕРА

В случае сферического мира де Ситтера уравнения (1) в координатах θ, ξ, η, ζ принимают следующий вид:

$$\ddot\theta = -\left(\sin^2\zeta\,\dot\xi^2 + \cos^2\zeta\,\dot\eta^2 + \dot\zeta^2 - \dot\theta^2\right) tg\,\theta - 2\,tg\,\theta\,\dot\theta\,\dot\theta\,,$$

$$\ddot\xi = -2\,ctg\zeta\,\dot\xi\,\dot\zeta - 2\,tg\theta\,\dot\xi\,\dot\theta\,, \quad \sim \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sin\zeta}{\cos\theta}\right)^2\dot\xi = 0\,,$$

$$\ddot\eta = 2\,tg\zeta\,\dot\eta\,\dot\zeta - 2\,tg\theta\,\dot\eta\,\dot\theta\,, \quad \sim \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\cos\zeta}{\cos\theta}\right)^2\dot\eta = 0\,,$$

$$\ddot\zeta = \sin\zeta\,\cos\zeta\,(\dot\xi^2 - \dot\eta^2) - 2\,tg\theta\,\dot\zeta\,\dot\theta\,. \tag{25}$$

Переходя к однородным координатам, которые получаются из сферических при $R = r$, преобразуем уравнения (25) к виду

$$\frac{dx^A}{d\tau} = P^A, \qquad r^2\,\frac{dP^A}{d\tau} = -\,(P,P)\,x^A, \tag{26}$$

где

$$(P,P) = \eta_{AB}\,P^A\,P^B = g_{\alpha\beta}\,p^{\alpha}\,p^{\beta} = -\,m^2\,c^2\,. \tag{27}$$

Отсюда следует, что

$$\ddot x^A = \left(\frac{m\,c}{r}\right)^2 x^A\,. \tag{28}$$

Интегрируя это уравнение, находим, что при ненулевой массе покоя мировая траектория частицы является гиперболой

$$x^A = x_0^A\,ch\,\frac{mc\tau}{r} + P_0^A\,\frac{r}{m\,c}\,sh\,\frac{mc\tau}{r}\,, \tag{29}$$

а при нулевой – является прямой

$$x^A = x_0^A + P_0^A\,\tau\,. \tag{30}$$

Таким образом, изотропные геодезические в сферическом мире де Ситтера являются прямыми в объемлющем псевдоевклидовом пространстве, а неизотропные геодезические в объемлющем пространстве прямыми не являются. Так исключительные свойства изотропных геодезических проявляются в мире де Ситтера .

ПРИМЕР КОНФОРМНОГО СООТВЕТСТВИЯ

На участке $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ метрика сферического мира де Ситтера находится в конформном соответствии с метрикой

$$d\check{s}^2 = r^2 \, [\sin^2\zeta \, d\xi^2 + \cos^2\zeta \, d\eta^2 + d\zeta^2 - d\theta^2] \qquad (31)$$

сферического статического мира. В данном случае $\Omega = \cos\theta$.

Статический сферический мир можно представить в виде четырехмерного цилиндра

$$\eta_{ab} \, x^a x^b = x^1 x^1 + x^2 x^2 + x^3 x^3 + x^4 x^4 = r^2 \qquad (32)$$

в пятимерном псевдоевклидовом пространстве, заменяя декартовы координаты x цилиндрическими:

$$x^0 = r\,\theta, \qquad (33)$$

$$x^1 = P \sin\zeta \sin\xi, \quad x^2 = P \cos\zeta \sin\eta,$$

$$x^3 = P \sin\zeta \cos\xi, \quad x^4 = P \cos\zeta \cos\eta,$$

где $P \geqslant 0$, $-\infty < \theta < \infty$, а углы ξ, η, ζ ограничены, как прежде:

$$0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant \frac{\pi}{2} . \qquad (34)$$

Имеем

$$\eta_{AB} \, dx^A dx^B = \qquad (35)$$

$$= P^2 \, [\sin^2\zeta \, d\xi^2 + \cos^2\zeta \, d\eta^2 + d\zeta^2] + dP^2 - r^2 \, d\theta^2 .$$

Указанная выше процедура приводит от уравнений (25) к уравнениям

$$\ddot\theta = 0 , \qquad \ddot\xi = -2 \, ctg\zeta \, \dot\xi \, \dot\zeta ,$$
$$\ddot\eta = 2 \, tg\zeta \, \dot\eta \, \dot\zeta , \qquad \ddot\zeta = \sin\zeta \cos\zeta \, (\dot\xi^2 - \dot\eta^2) \qquad (36)$$

геодезических в сферическом статическом мире.

КОНФОРМНЫЕ МОМЕНТЫ ИМПУЛЬСА В ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В случае псевдоевклидова пространства с метрикой $\eta_{AB} \, dx^A dx^B$ конформный момент импульса имеет следующий общий вид [5]:

$$(K,P) = \frac{1}{2} C^{AB} (x_B P_A - x_A P_B) + C^A P_A +$$
$$+ (B + B^B x_B) \, x^A P_A - \frac{1}{2} (x,x) \, B^A P_A . \qquad (37)$$

где B, B^A, C^A и C^{AB} – константы, причем $C^{AB} + C^{BA} = 0$;

$x_A = \eta_{AB} x^B$, $P_A = \eta_{AB} P^B$, $(x,x) = \eta_{AB} x^A x^B$. При этом

функция F равна

$$F = B + B^B x_B . \qquad (38)$$

КОНФОРМНЫЕ МОМЕНТЫ В СФЕРИЧЕСКОМ МИРЕ ДЕ СИТТЕРА

Конформные моменты импульса в сферическом мире де Ситтера получаются из соответствующих моментов в псевдоевклидовом пространстве при условии

$$K^A x_A = 0 . \qquad (39)$$

Это условие означает, что векторное поле K^A , конформное в псевдоевклидовом пространстве, на гиперболоиде (20) является касательным к этому гиперболоиду. Чтобы удовлетворить этому условию, надо положить $B = 0$, $2 C^A + r^2 B^A = 0$.

Таким образом, конформный момент импульса в сферическом мире де Ситтера имеет следующий вид:

$$(K,P) = \frac{1}{2} C^{AB} (x_B P_A - x_A P_B) + B^A x_A x^B P_B - r^2 B^A P_A . \qquad (40)$$

При этом функция F равна

$$F = B^B x_B . \qquad (41)$$

В сферическом мире де Ситтера имеется, таким образом, десять линейно независимых изометрических моментов вида

$$x_A P_B - x_B P_A \qquad (42)$$

и еще пять линейно независимых неизометрических конформных моментов вида

$$r^2 P_A - x_A x^B P_B . \qquad (43)$$

В заключение авторы выражают признательность Польскому Комитету по научным исследованиям за частичную поддержку этой работы (грант № 603/Р03/96).

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P.A.M. Ann.Math., 36, 3 (1935).
2. Картан Э. Теория спиноров (1937). М., ИЛ., 1947.
3. Пуанкаре А. Об основных гипотезах геометрии (1887). М., Гостехиздат, 1956, с. 388.
4. Черников Н.А. -- Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1987, том 18, вып. 5, с. 1000.
5. Chernikov N.A. -- Acta Physica Polonica, 1964, vol. 26, No. 6 (12), p. 1069.

Рукопись поступила в издательский отдел 3 ноября 1997 года.