ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2-97-323

В.Н.Первушин, В.И.Смиричинский

СЛЕД ВТОРОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ И ДИНАМИКА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Направлено в журнал «Ядерная физика»

1997

Первушин В.Н., Смиричинский В.И. P2-97-323
След второй квадратичной формы
и динамика уравнений Эйнштейна

В работе доказано, что пространства общей теории относительности со следом второй квадратичной формы семейства гиперповерхностей n, равным нулю, и плоской асимптотикой (либо замкнутыми гиперповерхностями), являются статическими. Этот факт разрешает использовать в теории гравитации гамильтонову редукцию, основанную на явном решении связей относительно следа второй квадратичной формы.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Перевод авторов

Pervushin V.N., Smirichinskii V.I. P2-97-323
Trace of the External Curvature
and Dynamic of the Einstein Equations

In present work we show that the manifolds of General Theory of Relativity with zero trace of the external curvature of spacelike hypesurfaces and with closed hypersurfaces (or special flat asymptotic) are static. This fact allows us to use Gaugeless Hamiltonian reduction based on the explicit constraint resolving with respect to the trace of the external curvature.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1997

1. Введение

В работах [1, 2] был предложен метод безкалибровочной редукции для выделения физических степеней свободы и построения физического гамильтониана и энергии. Суть этого метода состоит в явном разрешении связи [3] относительно одного из канонических импульсов P_a, который пропорционален следу второй квадратичной формы и построению редуцированного действия и гамильтониана с учетом всех поверхностных членов в исходном действии Гильберта – Эйнштейна. И этот метод был успешно опробован на примере некоторых космологических моделей [1, 2, 3, 4, 5].

Однако при обсуждении метода безкалибровочной редукции возникла следующая проблема: поскольку может существовать семейство гиперповерхностей с нулевым следом второй квадратичной формы, то преобразованиями координат можно обратить в нуль импульс P_a, и поэтому метод безкалибровочной редукции может быть не корректен и дает неверное определение физического гамильтониана .

В настоящей работе эта проблема снимается утверждением, доказанным в пункте 2.1 .

В пространстве Эйнштейна при замкнутой системе гиперповерхностей $t = const$, или при асимптотически плоском пространстве, из равенства нулю следа второй квадратичной формы $b = 0$ следует, что пространство статическое.

2. АДМ-формализм

Хорошо известна роль кинеметрических величин с точки зрения задания систем отсчета или монадного формализма [6]. Кинеметрические величины однозначно связаны с АДМ-параметрами

$$ds^2 = N^2dt^2 - h_{ik}(dx^i - N^idt)(dx^k - N^kdt)\ , \tag{1}$$

которые играют существенную роль в гамильтоновом формализме [7].

АДМ-параметризация метрики 4-х-мерного пространства означает разбиение 4-х-пространства на семейство пространственноподобных гиперповерхностей $t = cosnt$, при этом h_{jk} - внутренняя метрика гиперповерхности $t = const$ (первая квадратичная форма), а из параметров N(лэпс-функция) и N^k(шифт вектор) составляется 4-х-вектор $\nu^\alpha = (\frac{1}{N}, -\frac{N^k}{N})$, который является единичной нормалью к гиперповерхности. Кроме этих параметров, для полного определения гиперповерхности $t = const$ необходимо задать вторую квадратичную форму

$$b_{ik} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_i N_j) \,, \tag{2}$$

которая определяет как вложена гиперповерхность в 4-х-пространство. Первая h_{ik} и вторая b_{ik} квадратичные формы являются 3-х-тензорами относительно кинеметрических преобразований

$$t' = t'(t),$$

$$x' = x'(t, x).$$

Эти преобразования сохраняют семейство гиперповерхностей $t = const$, меняя лишь координатные линии времени и внутренние координаты самих гиперповерхностей.

Преобразования параметров АДМ-метрики при некинеметрических преобразованиях рассмотрены в работе [8].

Выразим уравнения Эйнштейна $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi\kappa}{c^4}T_{\alpha\beta}$ через АДМ-параметры. Прямая подстановка выражения для второй квадратичной формы и АДМ-параметров дает следующий вид уравнений Эйнштейна:

$$\kappa_0 \equiv {}^3R + b^2 - b^i_k b^k_i - \frac{8\pi\kappa}{c^4} 2T_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta = 0 \,; \tag{3}$$

$$\kappa_k \equiv \nabla_k b - \nabla_i b^i_k + \frac{8\pi\kappa}{c^4} T_{k\alpha}\nu^\alpha = 0 \,; \tag{4}$$

$$\frac{\overset{\odot}{b}_{ij}}{N} + {}^3R_{ij} - \frac{1}{N}\nabla_i\nabla_j N + bb_{ij} - \frac{8\pi\kappa}{c^4}\left(T_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}T\right) = 0 \,, \tag{5}$$

где

$$\overset{\odot}{b}_{ij} = \dot{b}_{ij} - (b_{ik}\nabla_j N^k + b_{jk}\nabla_i N^k + N^k\nabla_k b_{ij}) - 2Nb_{ik}b^k_j \,,$$

$b = b_{ij}h^{ij}$, $b^i_j = h^{ik}b_{kj}$, ${}^3R$ – скалярная кривизна по метрике h_{ij}.

Нужно еще добавить выражение для второй квадратичной формы (2). Ковариантная производная берется здесь по метрике h_{ij}. Уравнения (3) и (4) – есть связи, а уравнения (5) и (2) назовем динамическими уравнениями и их стуктуру можно записать в "стандартной канонической" форме

$$\dot{b} = f_{(1)}(b, h, N, N^i) \,, \tag{6}$$

$$\dot{h} = f_{(2)}(b, h, N, N^i) \,.$$

Для проверки полученных формул можно воспользоваться теорией гиперповерхностей (соотношения Гаусса и Петерсона – Кодаци), изложенной, например, в книгах [9, 10].

2.1. Кинеметрические инварианты в уравнениях Эйнштейна

В работе [8] показано, что за счет выбора системы гиперповерхностей любой из кинеметрических инвариантов можно локально обратить в нуль (в пределах некоторой координатной карты). Вопрос о том, можно ли глобально обратить в нуль какой-либо из кинеметрических инвариантов, требует специального рассмотрения. Так, если на пространство Эйнштейна наложить некоторые топологические условия, например, что гиперповерхности $t = const$[1] замкнуты[2] или что пространство асимптотически плоское[3], то нельзя обратить в нуль b, т.к. иначе мы имеем статическую метрику. Сформулируем это в виде **утверждения**.

В пространстве Эйнштейна при замкнутой системе гиперповерхностей $t = const$ или при асимптотически плоском пространстве из равенства нулю второй квадратичной формы $b = 0$ следует, что пространство статическое.

Доказательство.

Свернем уравнение (5) по метрике h_{ij}

$$\frac{\dot{b}}{N} - \frac{N^k}{N}\nabla_k b + b^2 + {}^3R - \frac{1}{N}\Delta N = \frac{8\pi\kappa}{c^4}(T_{ij}h^{ij} + \frac{3}{2}T) \,, \tag{7}$$

учитывая связь (3), имеем

$$\frac{\dot{b}}{N} - \frac{N^k}{N}\nabla_k b - \frac{1}{N}\Delta N + b^i_j b^j_i + \frac{8\pi\kappa}{c^4}(T_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta - \frac{1}{2}T) = 0,$$

при условии $b = 0$ получим

$$-\frac{1}{N}\Delta N + b^i_j b^j_i + \frac{8\pi\kappa}{c^4}(T_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta - \frac{1}{2}T) = 0 \,. \tag{8}$$

Интегрируя по всему пространству последнее выражение, получим

$$\oint \{b_{ij}b^{ij} + \frac{8\pi\kappa}{c^4}(T_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta - \frac{1}{2}T)\}N\sqrt{h}d^3x = 0 \,, \tag{9}$$

$b_{ij}b^{ij}$ положительно-определенная функция от x, кроме того, для тензоров энергии импульса, удовлетворяющих сильному энергетическому условию,

[1]Здесь и далее предполагается, что существует глобальное разбиение всего 4-х пространства на семейство гиперповерхностей $t = const$, причем 4-х-векторное поле, нормальное к этим гиперповерхностям, является непрерывным. Физически это означает возможность синхронизации часов во всем пространстве.

[2]Под замкнутым многообразием понимается компактное многообразие без границ.

[3]Имеется в виду достаточная степень стремления на бесконечности метрики к плоской для обращения в нуль нужных нам поверхностных интегралов (например, $N \to 1 + \frac{const}{r^{1+\epsilon}}$, $\epsilon > 0$).

имеем

$$(T_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta - \frac{1}{2}T) \geq 0. \qquad (10)$$

Тогда из (9) следует $b_{ij} = 0$ (и $(T_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta - \frac{1}{2}T) = 0$), что и означает статичность метрики .

Замечание : в доказательстве существенно условие (10), для тензора энергии-импульса электромагнитного поля оно, очевидно, выполняется. Для тензора энергии-импульса макроскопических тел

$$T_{\alpha\beta} = (p+\varepsilon)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta}\ ,\ p < \frac{\varepsilon}{3}$$

(10) также выполняется. Действительно,

$$T_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta - \frac{1}{2}T = (p+\varepsilon)(u_\alpha\nu^\alpha)^2 - p - \frac{1}{2}(\varepsilon - 3p) = (p+\varepsilon)(u_\alpha\nu^\alpha)^2 + \frac{p}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

учитывая, что произведение двух времениподобных единичных векторов всегда больше единицы $u_\alpha\nu^\alpha \geq 1$, имеем

$$T_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta - \frac{1}{2}T \geq \frac{3}{2}p + \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Таким же образом можно показать выполнение условия (10) и для тензора энергии-импульса системы точечных частиц

$$T_{\alpha\beta} = \mu c u_\alpha u_\beta \frac{ds}{dt}.$$

Что касается тензора энергии-импульса микроскопических частиц, например спинорного поля, то после операции вторичного квантования, условие (10) выполняется в смысле вакуумных средних.

Это утверждение можно сформулировать следующим образом: **в нестатическом пространстве ОТО с замкнутым семейством гиперповерхностей $t = const$ и неравным нулю тензором энергии-импульса материи не существует глобальной времениподобной конгруэнции** (т.е. непрерывного семейства времениподобных линий) **такой, чтобы поле единичных касательных векторов τ^μ к этой конгруэнции удовлетворяло бы свойствам:**

1) тензор угловой скорости вращения системы отсчета[4] равен нулю

$$A_{\alpha\beta} = 0\ ;$$

[4]Понятия и обозначения здесь позаимствованы из ставшей уже классической монографии [11] .

2) след тензора скоростей деформации также равен нулю

$$D^\alpha_\alpha = \nabla_\alpha\tau^\alpha = 0.$$

3. Заключение

Мы показали, что если пространство Эйнштейна асимптотически плоское или при замкнутой системе гиперповерхностей $t = const$, и мы рассматриваем динамическую метрику (т.е. метрику, не сводимую преобразованием координат к статической), то мы не можем глобально обратить в нуль b. Это и есть основной результат данной работы, следующий из анализа свойств кинеметрических инвариантов и дающий геометрическое обоснование метода безкалибровочной редукции.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Г. Гогелидзе, Д. Младенову, Ю. Палий, М. Тентюкову, А. Хведелидзе за полезные дискуссии и обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A.M.Khvedelidze,V.V.Papoyan,V.N.Pervushin
Phys.Rev. D 51 (1995) 5654; 99. A.M.Khvedelidze, V.V.Papoyan, V.N.Pervushin.
Quantum Evolution of Universe: a Gaugeless Approach.
Gravitation and Cosmology **1** N 2 (1995) p.81-87.

[2] V.N.Pervushin,V.V.Papoyan,G.A.Gogilidze,A.M.Khvedelidze
Yu.G.Palii,V.I.Smirichinski Phys.Let.B 365 (1990)35-40.

[3] V. Pervushin, T. Towmasjan. Int.J.Mod.Phys. D 4 (1995) 105.
A. Khvedelidze, V. Papoyan, V. Pervushin. Phys.Rev. D 51 (1995) 5654.
V.N. Pervushin, V.V. Papoyan, G.A. Gogilidze, A.M. Khvedelidze, Yu.G. Palii, V.I. Smirichinski. Phys.Let.B 365 (1996) 35.

[4] S. Gogilidze, A. Khvedelidze, Yu. Palii, V. Papoyan, V. Pervushin. "Dirac and Friedmann Observables in Quantum Universe with Radiation" Preprint JINR, E2-96-475, Dubna,1996; gr-qc/9705036. "Gravitation and Cosmology" (in press).

A. Khvedelidze, Yu. Palii, V. Papoyan, V. Pervushin. "Description of the Friedmann Observables in Quantum Universe" Preprint JINR, E2-97-84, Dubna, 1997; gr-qc/9705035 Phys.Let.B (in press).

[5] V. Pervushin, V.Smirichinski. "On the cosmological origin of the homogeneous scalar field in Unified Theories." Preprint JINR, E2-97-155, Dubna, 1997; gr-qc/9704078 Phys.Let.B (submitted).

[6] А.Л.Зельманов - Докл.АН СССР, 1976, т.227, с.78 .

[7] R.Arnovit, S.Deser and C.W.Misner, Phys.Rev.117 (1960)1595.

[8] В.Н.Первушин, В.И.Смиричинский,
"Динамика уравнений Эйнштейна в терминах собственных значений первой и второй кривизны", ОИЯИ Р2-97-66,
направлено в журнал "Ядерная физика".

[9] Л.П.Эйзенхарт, Риманова геометрия , М. (1948).

[10] П.К.Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, М. (1953).

[11] Ю.С.Владимиров, Системы отсчета в теории гравитации, Энергоиздат, (1982).

Рукопись поступила в издательский отдел
27 октября 1997 года.