ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-97-308

О. О. Воскресенская, А. Н. Сисакян, А. В. Тарасов,
Г. Т. Торосян

ТЕОРИЯ ЭФФЕКТА ЛАНДАУ—ПОМЕРАНЧУКА ДЛЯ МИШЕНЕЙ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Направлено в журнал «Письма в ЖЭТФ»

1997

Воскресенская О. О. и др. Р2-97-308
Теория эффекта Ландау—Померанчука
для мишеней конечных размеров

Показано, что наилучшее согласие мигдаловской теории эффекта Ландау—Померанчука с экспериментом достигается в том случае, когда для описания рассеяния электронов атомами используется квазиклассическое приближение вместо традиционно используемого борновского.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Перевод авторов

Voskresenskaya O. O. et al. P2-97-308
Theory of the Landau—Pomeranchuk Effect for Finite-Size Targets

It is shown that the best agreement of Migdal theory of the Landau—Pomeranchuk effect with experiment is achieved in the case, when electron-atomic scattering is described in quasiclassical approximation instead usualy used Born one.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1997

1. Результаты недавнего эксперимента [1] по обнаружению эффекта Ландау—Померанчука [2] подтвердили основной качественный вывод о том, что многократное рассеяние сверхрелятивистских заряженных частиц в веществе приводит к подавлению их тормозного излучения в мягкой части спектра.

Однако попытки [1,3] количественного описания полученных экспериментальных данных столкнулись с неожиданной трудностью. Для достижения удовлетворительного согласия с экспериментом авторы [1,3] вынуждены были домножать результаты своих расчётов на нормировочный множитель, равный $0,93$ [3]$\div 0,94$ [1], чему они не находят разумного объяснения. Однако если учесть, что при проведении расчётов [1,3] для описания процессов взаимодействия электронов с атомами мишени из золота ($Z\alpha \sim 0,6$) авторами использовалось борновское приближение, то отмеченное расхождение теории и эксперимента по крайней мере качественно объяснимо. Цель данной работы — показать, что при аккуратном учёте поправок к результатам борновского приближения удаётся объяснить и численную величину обсуждаемого расхождения.

2. Пренебрегая численно малыми квантовомеханическими поправками, мы проведём это рассмотрение в рамках классического варианта теории эффекта Ландау—Померанчука, развитого в работе Мигдала [4] (см. также [5]). Из результатов работ [4,5] с помощью несложных, но достаточно громоздких вычислений можно получить следующие выражения для усреднённой по всевозможным траекториям движения электрона в веществе интенсивности его тормозного излучения (всё в единицах $\hbar = c = 1$, $e^2 = 1/137$)

$$\frac{dI}{d\omega} = 2\sum_{\vec{e}}\Big\{n_0 L\int f^*(\vec{n}_2)\nu(\vec{n}_2-\vec{n}_1)f(\vec{n}_1)d\vec{n}_1 d\vec{n}_2$$

$$-(n_0 v)^2\int\limits_0^T dt_1\int\limits_{t_1}^T dt_2\cdot Re\Big[\int f^*(\vec{n}_2)\nu(\vec{n}_2-\vec{n}_2')\cdot w(t_2,t_1,\vec{n}_2',\vec{n}_1',\vec{k})$$

$$\cdot f(\vec{n}_1)\nu(\vec{n}_1'-\vec{n}_1)d\vec{n}_1 d\vec{n}_1' d\vec{n}_2 d\vec{n}_2'\Big]\Big\}, \qquad (1)$$

где

$$f(\vec{n}_{1,2}) = \frac{e}{2\pi} \cdot \frac{\vec{\epsilon}\vec{v}_{1,2}}{1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_{1,2}} ,$$

$$\vec{v}_{1,2} = \nu \cdot \vec{n}_{1,2} , \quad \vec{n} = \frac{\vec{k}}{\omega} , \quad d\vec{n}_{1,2} \equiv do_{1,2} , \quad T = \frac{L}{v} ,$$

$$\nu(\vec{n}_2 - \vec{n}_1) = \delta(\vec{n}_2 - \vec{n}_1) \int \sigma_0(\vec{n}_2' - \vec{n}_1) d\vec{n}_2' - \sigma_0(\vec{n}_2 - \vec{n}_1) ,$$

$$w(t_2, t_1, \vec{n}_2, \vec{n}_1, \vec{k}) = \int w(t_2, t_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_1) \cdot$$

$$\cdot \exp[i\omega(t_2 - t_1) - i\vec{k}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] d\vec{r}_2 .$$

Здесь ω, $\vec{k}$, $\vec{\epsilon}$ — частота, волновой вектор и вектор поляризации испускаемого фотона; $\vec{n}_{1,2}$ — единичные векторы в направлении движения электрона; v — величина его скорости, которая полагается неизменной в процессе его взаимодействия с мишенью (квантовомеханическим эффектом отдачи пренебрежено); e — его заряд; $\sigma_0(\vec{n}_2 - \vec{n}_1) = d\sigma/do_{\vec{n}_2}$ — дифференциальное сечение рассеяния электрона атомами мишени. Наконец, n_0 — число атомов вещества в единице объёма; L — толщина мишени; $w(t_2, t_1, r_2 - r_1, \vec{n}_2, \vec{n}_1)$ — функция распределения электрона по координатам $\vec{r}_2$ и направлению движения $\vec{n}_2$ в момент времени t_2 при условии, что в момент времени t_1 электрон имел координату $\vec{r}_1$ и двигался в направлении, характеризуемом единичным вектором $\vec{n}_1$. Эта функция удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial w(t_2, t_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_1)}{\partial t_2} = -\vec{v}_2 \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}_2} \cdot w(t_2, t_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_1)$$

$$- n_0 \int \nu(\vec{n}_2 - \vec{n}_1') w(t_2, t_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}_2', \vec{n}_1) d\vec{n}_2' \qquad (2)$$

с граничным условием

$$w(t_2, t_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_1)|_{t_2 = t_1} = \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\delta(\vec{n}_2 - \vec{n}_1). \qquad (3)$$

Линейное по n_0 слагаемое в выражении (1) представляет "обычный" (некогерентный) вклад в интенсивность тормозного излучения электрона в веществе, получаемый суммированием интенсивностей излучения при взаимодействии электронов с отдельными

атомами мишени. Квадратичное же по n_0 слагаемое в этом выражении учитывает вклад интерференции амплитуд тормозного излучения на различных атомах. Деструктивный характер этой интерференции и приводит к подавлению интенсивности мягкого излучения, т.е. к эффекту Ландау—Померанчука. При значениях ω, превышающих ω_{cr} (оценку ω_{cr} см. в [1,2,4]) интерференционное слагаемое становится пренебрежимо малым, и излучение носит чисто некогерентный характер.

При сверхрелятивистских скоростях электронов ($1 - v \ll 1$) в выражении (1) удобно перейти к малоугловому приближению [4,5] по схеме:

$$\vec{n}_{1,2} = \left(1 - \frac{\theta_{1,2}^2}{2}\right)\vec{n} + \vec{\theta}_{1,2};$$

$$d\vec{n}_{1,2} = d\vec{\theta}_{1,2} ;$$

$$f(\vec{n}_{1,2}) = f(\theta_{1,2}) = \frac{e}{\pi} \cdot \frac{\vec{\epsilon}\vec{\theta}_{1,2}}{\theta_{1,2}^2 + \lambda^2} ; \qquad (4)$$

$$\lambda = \frac{m}{E} = \gamma^{-1};$$

$$\sigma_0(\vec{n}_2 - \vec{n}_1) = \sigma_0(\vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1),$$

$$\delta_0(\vec{n}_2 - \vec{n}_1) = \delta_0(\vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1),$$

$$\nu_0(\vec{n}_2 - \vec{n}_1) = \nu_0(\vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1);$$

$$w(t_2, t_1, \vec{n}_2, \vec{n}_1, \vec{k}) = w(t_2, t_1, \vec{\theta}_2, \vec{\theta}_1, \omega);$$

и далее к фурье-преобразованиям величин f, ν, w:

$$f(\vec{\eta}) = \frac{1}{2\pi} \int f(\vec{\theta}) \exp[i\vec{\eta}\vec{\theta}] d\vec{\theta} = \frac{ie\lambda\vec{\epsilon}\vec{\eta}}{\pi\eta} K_1(\lambda\eta);$$

$$\nu(\vec{\eta}) = \int \nu(\vec{\theta}) e^{i\vec{\eta}\vec{\theta}} d\vec{\theta} = 2\pi \int \sigma_0(\theta)[1 - J_0(\eta\theta)]\theta d\theta); \qquad (5)$$

$$w(t_2, t_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_1, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int w(t_2, t_1, \theta_2, \theta_1, \omega) \cdot$$

$$\cdot \exp[i\vec{\eta}_2\vec{\theta}_2 - i\vec{\eta}_1\vec{\theta}_1] d\vec{\theta}_1 d\vec{\theta}_2 ,$$

где J_0 и K_1 — функции Бесселя и Макдональда соответственно.

В результате выражение для $\frac{dI}{d\omega}$ приводится к виду

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{2\lambda^2 e^2}{\pi^2}\Bigg\{n_0 L \int K_1^2(\lambda\eta)\nu(\eta)d\vec{\eta}$$

$$-n_0^2 \int_0^L dt_1 \int_0^L dt_2 \int \frac{(\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2)}{\eta_1\eta_2} K_1(\lambda\eta_1)K_1(\lambda\eta_2)\nu(\eta_1)\nu(\eta_2) \tag{6}$$

$$\cdot Re[w(t_2, t_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_1, \omega)]d\vec{\eta}_1 d\vec{\eta}_2\Bigg\}.$$

Величина w в этом выражении удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial w(t_2, t_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_1, \omega)}{\partial t_2} = \frac{i\omega}{2}\cdot(\lambda^2 - \Delta_{\vec{\eta}_2})w(t_2, t_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_1, \omega)$$

$$- n_0\nu(\vec{\eta}_2)w(t_2, t_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_1, \omega) \tag{7}$$

с граничным условием

$$w(t_1, t_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_1, \omega) = \delta(\vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_1). \tag{8}$$

По виду это уравнение совпадает с уравнением для функции Грина двумерного уравнения Шрёдингера с массой ω^{-1} и комплексным потенциалом

$$U(\eta) = -\frac{\omega\lambda^2}{2} - i\eta_0\nu(\eta) \tag{9}$$

и поэтому допускает формальное решение в виде континуального интеграла (см., например, [6]).

3. Получение аналитического решения этого уравнения при произвольных значениях ω возможно лишь в приближении Фоккера-Планка

$$\nu(\eta) = a\cdot\eta^2 \tag{10}$$

(явное выражение для w, получаемое в этом приближении, можно найти в работе [5]), а при $\omega = 0$ и для произвольных $\nu(\eta)$.

В последнем случае ($\omega = 0$)

$$w(t_2, t_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_1, 0) = \delta(\vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_1)exp[-n_0\nu(\eta_2)(t_2 - t_1)] \ , \tag{11}$$

и интегрирование по t_1, t_2 в (6) выполняется тривиально, приводя к следующему простому результату

$$\left.\frac{dI(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0} = \frac{4\lambda^2 e^2}{\pi}\int K_1^2(\lambda\eta)(1 - \exp[-n_0\nu(\eta)L])\eta d\eta. \tag{12}$$

В другом предельном случае ($\omega \gg \omega_{cr}$), с учётом сказанного выше, имеем

$$\left.\frac{dI(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega>\omega_{cr}} = n_0 L\lambda^2 e^2 \int K_1^2(\lambda\eta)\nu(\eta)\eta d\eta. \tag{13}$$

В силу свойств функций Макдональда основной вклад в интегралы (12), (13) вносит область $0 \le \eta \le 1/\lambda$. Как показано в классических работах Мольер [7] по теории многократного рассеяния заряженных частиц в веществе, величина $\nu(\eta)$ в этой области представима в виде

$$\nu(\eta) = \frac{2\pi(Z\alpha)^2\lambda^2\eta^2}{m^2}\left[\ln\frac{2}{\eta\theta_a} - C + \frac{1}{2}\right] , \tag{14}$$

где C — постоянная Эйлера, а величина θ_a, именуемая "углом экранирования", зависит как от экранирующих свойств атома, так и от используемого для расчёта величины $\sigma_0(\theta)$-приближения. Используя томас-фермиевскую модель атома [8], Мольер получил значения θ_a для случаев, когда σ_0 рассчитывается либо в борновском, либо в квазиклассическом приближениях:

$$(\theta_a)_{Born} = 1,2\cdot\lambda\cdot\alpha\cdot Z^{1/3}, \tag{15}$$

$$(\theta_a)_{qcl} = 1,2\cdot\lambda\cdot\alpha\cdot Z^{1/3}\sqrt{1 + 3,56\cdot(Z\alpha)^2}. \tag{16}$$

Последний результат носит приближённый характер (критические замечания к его выводу см. в обзоре В.Т. Скотта [9]).

Используя технику, развитую в [10], можно показать, что для любой атомной модели имеет место соотношение

$$\ln[(\theta_a)_{qcl}] = \ln[(\theta_a)_{Born}] + Re[\psi(1 - iZ\alpha)] + C\ , \qquad (17)$$

где ψ — логарифмическая производная Г-функции.

При подстановке $\nu(\eta)$ в виде (14) в выражение (13) интегрирование в нём выполняется аналитически, приводя к результату

$$\left.\frac{dI(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega>\omega_{cr}} = \frac{16}{3}\left(\frac{Z\alpha^2}{m}\right)^2 \cdot \left(\ln\frac{\lambda}{\theta_a} + \frac{7}{12}\right) n_0 \cdot L\ . \qquad (18)$$

Подставляя сюда численные значения параметра θ_a из (15) и (17), отвечающие $Z = 79$, и вводя величину

$$R(\omega) = \frac{\left[\frac{dI(\omega)}{d\omega}\right]_{qcl}}{\left[\frac{dI(\omega)}{d\omega}\right]_{Born}}\ , \qquad (19)$$

получим

$$R(\omega)|_{\omega>\omega_{cr}} = 0,922$$

(использование оригинального результата Мольер (16) для $(\theta_a)_{qcl}$ привело бы к значению $R(\omega)|_{\omega>\omega_{cr}} = 0,900$), что практически совпадает со значением нормировочного фактора $0,93 \div 0,94$, вводимого авторами [1,4] для согласования расчётов, выполненных в борновском приближении для σ_0, с экспериментом.

В другом предельном случае ($\omega = 0$) выполнением численного интегрирования в (12) получается следующий результат для трёх значений величины мишени в эксперименте [1]

$$R(\omega)|_{\omega=0} = \begin{cases} 0.936, & L = 0.001X_0; \\ 0.961, & L = 0.007X_0; \\ 0.982, & L = 0.060X_0; \end{cases} \qquad (20)$$

где $x_0 \approx 0.33$ см — радиационная длина вещества мишени ($Z = 79$).

Из общих соображений очевидно, что при $0 < \omega < \omega_{cr}$

$$R(\omega)|_{\omega>\omega_{cr}} \le R(\omega) \le R(\omega)|_{\omega=0}. \qquad (21)$$

Из (20), (21) следует, что, строго говоря, результаты квазиклассического приближения для $\frac{dI}{d\omega}$ не могут быть получены из результатов борновского приближения для этой величины путём домножения на нормировочный фактор, не зависящий от ω и L. Однако, учитывая примерно 3%-ю погрешность экспериментальных данных [1], можно понять, почему описанная выше простая процедура помогла авторам [1,3] удовлетворительно согласовать расчёты в борновском приближении с экспериментальными данными.

4. Наконец, обсудим вкратце точность приближения Фоккера-Планка, в рамках которого для w_0 получается аналитическое выражение, что позволяет достаточно просто (путём численного расчёта трёхкратных интегралов) рассчитать весь спектр $\frac{dI(\omega)}{d\omega}$.

С этой целью зафиксируем значение параметра a в выражении (14) таким образом, чтобы результаты точного расчёта величины $\left.\frac{dI(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega>\omega_{cr}}$ и её расчёта в приближении Фоккера-Планка совпадали.

Это приводит к следующему значению a

$$a = 2\pi\left(\frac{Z\alpha\sigma}{m}\right)^2\left[\ln\frac{\sigma}{\theta_a} + \frac{7}{12}\right]. \qquad (22)$$

Используем далее (10), (21) для расчёта величины $\left.\frac{dI(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0}$ и сравним полученный результат с результатом, получаемым с использованием "реалистического" (мольеровского) выражения (14) для $\nu(\eta)$.

Тогда для отношения

$$\bar{R} = \frac{\left[\left.\frac{dI(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0}\right]_{FP}}{\left[\left.\frac{dI(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0}\right]_{M}} \qquad (23)$$

имеем следующие значения

$$\bar{R} = \begin{cases} 0.947, & L = 0.001X_0 \\ 0.890, & L = 0.007X_0 \\ 0.872, & L = 0.060X_0 \end{cases}\ . \qquad (24)$$

Видно, что отличие этой величины от единицы заметно превосходит характерную погрешность эксперимента. Отсюда ясно, что использование приближения Фоккера-Планка оправдано лишь при проведении расчётов, имеющих целью исследование качественного поведения величины $\frac{dI(\omega)}{d\omega}$. Для проведения же аккуратного количественного анализа необходимо использовать значения w, полученные путём численного решения кинетического уравнения (7). Результаты такого анализа совместно с детальным сопоставлением с экспериментальными данными составят содержание отдельной статьи.

Литература

[1] P.L. Anthony, R. Becker-Szendy, P.E.Bosted et al., Phys. Rev. Lett., **75**, 1949 (1995).

[2] Л.Д. Ландау, И.Я. Померанчук, ДАН СССР, **92**, 535, 735 (1953).

[3] B.G. Zakharov. Preprint KFA-IKP(TH-1996-17), Jülich, 1996; hep-ph/9612431 (1996).

[4] А.В. Мигдал, ДАН СССР, **96**, 49 (1954).

[5] И.И. Гольдман, ЖЭТФ, **38**, 1866 (1960).

[6] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, New York: McGrav-Hill, 1965.

[7] G. Moliére, Z. Naturforsch., **2A**, 3 (1947).

[8] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика*, М.: Наука, 1974.

[9] W.T. Scott, Rev. Mod. Phys., **35**, 231 (1963).

[10] О.О. Воскресенская и др. Препринт ОИЯИ, Р2-97-18, Дубна, 1997.

Рукопись поступила в издательский отдел 14 октября 1997 года.