97-290

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-97-290

Р.Ледницки[1], В.В.Любошиц[2], В.Л.Любошиц[2]

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В КОНЕЧНОМ СОСТОЯНИИ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ И ПАРНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ НЕТОЖДЕСТВЕННЫХ И ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ ПРИ МАЛЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ СКОРОСТЯХ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

[1]Институт физики Академии наук Чешской Республики,
Na Slovance 2, 18040, Praha 8, Czech Republic
[2]E-mail: lyubosh@sunhe. jinr.ru

1997

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что парные корреляции тождественных частиц с малыми относительными импульсами чувствительны к геометрическим размерам области множественной генерации и длительности процесса генерации (см. обзор [1]). Эта чувствительность обусловлена двумя причинами: интерференцией квантово-механических амплитуд, связанной с неразличимостью тождественных частиц, и с взаимодействием в конечном состоянии. Последнее обстоятельство позволяет использовать для восстановления пространственно-временной картины развития множественных процессов также и корреляции нетождественных частиц с малыми относительными скоростями [2]. Корреляционный метод определения пространственно-временных характеристик области генерации частиц нашел в последние годы широкое применение в физике высоких и низких энергий, о чем свидетельствуют многие сотни теоретических и экспериментальных работ (см., например, обзоры [3,4]).

В ряде работ в рамках модели одночастичных источников, расположенных на конечном расстоянии друг от друга [1], детально анализировалось влияние s-волнового сильного взаимодействия в конечном состоянии, а также кулоновского взаимодействия на парные корреляции как тождественных, так и нетождественных частиц, движущихся с близкими 4-скоростями [2, 5—10]. Было показано, что при достаточно больших расстояниях между источниками величина эффекта взаимодействия в конечном состоянии определяется, помимо размеров области генерации, амплитудой рассеяния и ее производной по энергии [2,6,8]. При этом, как правило, рассматривалось только чисто упругое рассеяние частиц в конечном состоянии (см., впрочем, [11]). Это оправдано, если речь идет о pp-, $\pi^+\pi^+$- или $\pi^-\pi^-$-корреляциях, но не вполне корректно в случае, например, $K^0_SK^0_S$- и K^+K^--корреляций.

В настоящей работе на основе унитарной теории низкоэнергетического многоканального рассеяния анализируется вклад бинарных реакций в конечном состоянии в корреляционные функции пар тождественных и нетождественных частиц; в случае заряженных частиц учитывается их взаимное отталкивание или притяжение. Существенно, что найденные приближенные аналитические формулы не зависят от конкретной формы короткодействующего потенциала. В работе получены интегральные соотношения, позволяющие в ряде случаев расширить область применимости этих формул. Развитый формализм предполагается в дальнейшем применить для анализа двухчастичных корреляций типа $(\pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0)$, $(\pi^- p, \pi^0 n)$, $(K_S^0 K_S^0, K^+K^-)$.

2. СТРУКТУРА ДВУХЧАСТИЧНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ В МОДЕЛИ ИСТОЧНИКОВ

Корреляционная функция $R_{ab}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ двух частиц a и b с импульсами $\mathbf{p}_a$ и $\mathbf{p}_b$ обычно определяется как отношение двухчастичного импульсного распределения к произведению одночастичных распределений. Считая такое произведение хорошим приближением для описания двухчастичного распределения при отсутствии корреляций, связанных с тождественностью и взаимодействием в конечном состоянии, при не слишком большой плотности частиц в фазовом пространстве и при достаточной гладкости одночастичных амплитуд, корреляционную функцию двух невзаимодействующих тождественных бесспиновых частиц, движущихся с близкими 4-скоростями, можно представить в виде [1]:

$$R_{aa}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \langle \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{iqx/2} + e^{-iqx/2}) \right|^2 \rangle. \qquad (1)$$

Здесь $hq = p_1 - p_2$ — разность 4-импульсов частиц, а усреднение проводится по относительным 4-координатам $x = x_1 = x_2$ точек генерации. В с.ц.и. пары частиц $q = \{0, 2\mathbf{k}\}$. В этой системе отсчета амплитуда $e^{iqx/2} = e^{-i\,\mathbf{kr}}$ не зависит от разности времен испускания частиц t и определяется только расстоянием между точками генерации $\mathbf{r}$.

В пренебрежении неупругими каналами взаимодействие между конечными частицами приводит к замене амплитуды плоской волны на несимметризованную амплитуду Бете — Солпитера в непрерывном спектре двухчастичных состояний: $e^{iqx/2} \to \psi_q(x)$ [2, 7—9, 12]. Другими словами, роль плоских волн, как функционального базиса, на который проектируются двухчастичные состояния, переходит к амплитудам Бете — Солпитера (волнам, искаженным взаимодействием). Для частиц с ненулевым спином амплитуда Бете — Солпитера, вообще говоря, зависит от суммарного спина рассматриваемой пары частиц. В формуле (1) в этом случае следует сделать замену:

$$e^{iqx/2} + e^{-iqx/2} \to \psi_q^{(S)}(x) + (-1)^S\, \psi_{-q}(x) \qquad (2)$$

и провести усреднение по возможным значениям суммарного спина S [2,7,8].

При одинаковых временах испускания двух частиц в их с.ц.и. $(t = 0)$ амплитуда $\psi_q^{(S)}(x)$ совпадает со стационарным решением уравнения Шредингера в

задаче о рассеянии с заменой относительного импульса $\hbar\,\mathbf{k}$ в с.ц.и. пары на $(-\hbar\,\mathbf{k})$: $\psi_q^{(S)}(\mathbf{r}, 0) = \psi_{-\mathbf{k}}^{(S)}(\mathbf{r})$. Это решение имеет асимптотику в виде суперпозиции плоской волны и расходящейся сферической волны.

В работе [2] было показано, что при вычислении корреляционной функции амплитуду Бете — Солпитера в с.ц.и. пары $\psi_q^{(S)}(\mathbf{r}, t)$ можно заменить волновой функцией $\psi_{-\mathbf{k}}^{(S)}(\mathbf{r})$, если выполняется условие

$$t << \frac{\mu \mathbf{r}^2}{\hbar},$$

где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса двух частиц. Для тяжелых частиц, таких как каоны или нуклоны, это условие обычно выполняется, так что «приближение одинаковых времен» испускания в с.ц.и. пары вполне оправдано. Но даже для пионов данное приближение в реалистических условиях приводит лишь к небольшому завышению ($< 10\%$) вклада сильного взаимодействия в корреляционную функцию. Важно, что при этом указанное приближение не влияет на основной вклад кулоновского взаимодействия, связанный с малыми расстояниями по сравнению с боровским радиусом пары.

В случае, когда при взаимодействии конечных частиц a и b, кроме упругого рассеяния $ab \to ab$, возможны также бинарные реакции типа $cd \to ab$, соответствующие амплитуды Бете — Солпитера зависят от промежуточного состояния $\alpha = \{ab, cd, \ldots\}$. В приближении «одинаковых времен в с.ц.и.» эти амплитуды совпадают со стационарными решениями $\psi_{-\mathbf{k}}^{(\alpha)}(\mathbf{r})$ задачи о многоканальном рассеянии рассматриваемых частиц a и b. В задаче о многоканальном рассеянии вкладу реакции $cd \to ab$ в конечном состоянии в процесс генерации частиц a и b соответствует обратная реакция $ab \to cd$ с изменением направления относительного импульса частиц a и b, а под аргументом функции $\psi_{-\mathbf{k}}^{(cd)}(\mathbf{r})$ понимается разность координат точек испускания частиц c и d в их с.ц.и. При этом функция $\psi_{-\mathbf{k}}^{(cd)}(\mathbf{r})$ имеет асимптотику в виде расходящейся сферической волны, отвечающей паре (cd) с учетом кинематики реакции $ab \to cd$.

В соответствии со сказанным, в приближении $t = 0$ в с.ц.и. пары корреляционная функция двух тождественных частиц с произвольным спином дается формулой

$$R_{aa}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{2} \sum_{S,\alpha} \omega_\mathbf{v}^{(S,\alpha)} \int d^3\mathbf{r}\, W_\mathbf{v}^{(S,\alpha)}(\mathbf{r}) \mid \psi_{-\mathbf{k}}^{(S,\alpha)}(\mathbf{r}) + (-1)^S\, \psi_\mathbf{k}^{(S,\alpha)}(\mathbf{r}) \mid^2, \quad (3)$$

а корреляционная функция двух нетождественных частиц a и b, которая в случае отсутствия взаимодействия была бы равна единице, при наличии взаимодействия в конечном состоянии будет иметь вид:

$$R_{ab}(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) = \sum_{S,\alpha} \omega_{\mathbf{v}}^{(S,\alpha)} \int d^3\mathbf{r} W_{\mathbf{v}}^{(S,\alpha)}(\mathbf{r}) \, | \, \psi_{-\mathbf{k}}^{(S,\alpha)}(\mathbf{r}) \, |^2, \tag{4}$$

где $\hbar\,\mathbf{k}$ — импульс частицы a в с.ц.и. пары ab.

В формулах (3) и (4) функции $W_{\mathbf{v}}^{(S,\alpha)}(\mathbf{r})$ описывают распределение расстояний между точками испускания пары исследуемых частиц (aa или ab) и пар «промежуточных» частиц (cd, ef и т.д.) в их с.ц.и., зависящее от типа частиц $\{\alpha\}$, суммарного спина пары S и скорости пары $\mathbf{v}$ относительно какой-либо заданной системы отсчета, $\omega_{\mathbf{v}}^{(S,\alpha)}$ — веса пар $\{\alpha\}$*. Функции $W_{\mathbf{v}}^{(S,\alpha)}(\mathbf{r})$ нормированы условием

$$\int d^3\mathbf{r} W_{\mathbf{v}}^{(S,\alpha)}(\mathbf{r}) = 1. \tag{5}$$

Поскольку при отсутствии реакций все входящие в формулы (3) и (4) волновые функции, кроме $\psi_{-\mathbf{k}}^{(S,\,aa)}$ и $\psi_{-\mathbf{k}}^{(S,\,ab)}$ соответственно, равны нулю, следует положить:

$$\sum_S \omega_{\mathbf{v}}^{(S,\,aa)} = 1, \quad \sum_S \omega_{\mathbf{v}}^{(S,\,ab)} = 1. \tag{5а}$$

Тогда для остальных «промежуточных» пар частиц $\{\alpha\}$, отличающихся от исследуемых, суммы $Q_\alpha = \sum_S \omega_{\mathbf{v}}^{(S,\alpha)}$ определяют их веса по отношению к конечным парам (aa) или (ab). Подчеркнем, что в случае отсутствия взаимодействия формула (4) при условиях (5) и (5а) дает: $R_{ab}(\mathbf{p}_a,\mathbf{p}_b) = 1$.

Известно, что двухчастичное взаимодействие в конечном состоянии заметно влияет только на корреляции частиц с медленным относительным движением. Именно в этом случае две рассматриваемые частицы продолжают взаимодействовать друг с другом после того, как покидают область генерации. Таким образом, «быстрый» процесс рождения и «медленный» процесс взаимодействия в конечном состоянии оказываются разделенными во времени, что приводит к факторизации сечений генерации (см. [13,14]). В духе этой концепции соотношения (3) и (4) имеют смысл только для тех промежуточных состояний (cd), относительное движение которых является «медленным». Это означает, что сумма масс промежуточных частиц должна быть близка к сумме масс конечных частиц a и b; вклад каналов, для которых это условие не выполняется, неотделим от процесса рождения частиц и не должен учитываться в формулах (3) и (4). Поэтому в реальных случаях мы имеем дело с одним или двумя каналами. В соответствии с этим, мы ограничимся в основном анализом эффекта двухканального s-волнового взаимодействия в конечном состоянии. Проблема в этом случае сводится к задаче о двухканальном рассеянии при низких энергиях и адекватному выбору функций $W^{(\alpha)}(\mathbf{r})$, описывающих распределение источников исследуемых и промежуточных частиц.

*Разность координат точек генерации частиц $\mathbf{r}$ в с.ц.и. пары связана со значениями разности координат $\tilde{\mathbf{r}}$ и разности времен испускания $\tilde{t}$ в системе отсчета, относительно которой пара движется со скоростью $\mathbf{v}$, преобразованием Лоренца:

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} + (\gamma - 1)\, \mathbf{n}\, (\tilde{\mathbf{r}}\mathbf{n}) - \gamma\, \mathbf{v}\, \tilde{t},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления скорости $\mathbf{v}$, $\gamma = \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$.

3. S-ВОЛНОВОЕ МНОГОКАНАЛЬНОЕ РАССЕЯНИЕ БЕССПИНОВЫХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим двухканальное рассеяние бесспиновых частиц при низких энергиях. Пусть канал (ab) является входным. В этом входном канале возможны два процесса: упругое рассеяние $a + b \to a + b$ и реакция $a + b \to c + d$.

Волновая функция относительного движения, описывающая процесс упругого рассеяния и реакцию $a + b \to c + d$ при столкновении частиц a и b с импульсами $\hbar\,\mathbf{k}_a$ и $\hbar\,\mathbf{k}_b = -\hbar\,\mathbf{k}_a$, имеет структуру [14]:

$$|\,\psi(\mathbf{r})\,\rangle = \psi_{\mathbf{k}_a}^{(ab)}(\mathbf{r})\,|\,ab\,\rangle + \psi_{\mathbf{k}_a}^{(cd)}(\mathbf{r})\,|\,cd\,\rangle\,. \tag{6}$$

Здесь $|\,ab\,\rangle$ и $|\,cd\,\rangle$ — внутренние состояния пар (ab) и (cd) соответственно, $\psi_{\mathbf{k}_a}^{(ab)}(\mathbf{r})$ и $\psi_{\mathbf{k}_a}^{(cd)}(\mathbf{r})$ — координатные волновые функции.

Ниже мы будем обозначать величины, относящиеся к каналу (ab), индексом 1, а величины, относящиеся к каналу (cd), — индексом 2:

$$\mathbf{k}_a \equiv \mathbf{k}_1, \quad \psi_{\mathbf{k}_a}^{(ab)}(\mathbf{r}) \equiv \psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}), \quad \psi_{\mathbf{k}_a}^{(cd)}(\mathbf{r}) \equiv \psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})\,.$$

Функции $\psi_{\mathbf{k}_1,1}$ и $\psi_{\mathbf{k}_1,2}$ удовлетворяют системе уравнений Шредингера для связанных каналов [15,16]:

$$\vec{\nabla}^2 \psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) + \left(k_1^2 - \frac{2\mu_1}{\hbar^2}\, V_{11}(r)\right) \psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) - \frac{2\mu_1}{\hbar^2}\, V_{12}(r)\, \psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) = 0, \tag{7}$$

$$\vec{\nabla}^2 \psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) + \left(k_2^2 - \frac{2\mu_2}{\hbar^2}\, V_{22}(r)\right) \psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) - \frac{2\mu_2}{\hbar^2}\, V_{21}(r)\, \psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) = 0. \tag{8}$$

Здесь $\mu_1 = \dfrac{m_a m_b}{m_a + m_b}$ и $\mu_2 = \dfrac{m_c m_d}{m_c + m_d}$ — приведенные массы пар (ab) и (cd) соответственно, $r = |\mathbf{r}|$, $k_1 = |\mathbf{k}_1|$, а значение k_2 определяется из закона сохранения энергии в процессе $a + b \to c + d$:

$$k_2^2 = k_1^2 \frac{\mu_2}{\mu_1} + 2\frac{\mu_2 c^2}{\hbar^2}(m_a + m_b - m_c - m_d). \tag{9}$$

Будем считать, что $\Delta m = m_a + m_b - m_c - m_d > 0$. Тогда у порога упругого рассеяния частиц a и b (т.е., при $k_1 = 0$) модуль импульса каждой из частиц c и d в их с.ц.и. равен:

$$\hbar k_2 = \sqrt{2\mu_2 \Delta m c^2}\,. \tag{9a}$$

В силу эрмитовости потенциала $\hat{V}(r)$

$$V_{21}(r) = V_{12}^*(r). \tag{10}$$

При отсутствии кулоновского взаимодействия, в случае s-волнового рассеяния на короткодействующем потенциале волновые функции имеют вне области влияния короткодействующих сил следующий вид [14]:

$$\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) \approx \tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} + \frac{f_{11}(k_1)}{r} e^{ik_1 r}, \tag{11}$$

$$\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) \approx \tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\,\frac{f_{21}(k_1)}{r} e^{ik_2 r}, \tag{12}$$

где волновые числа k_1 и k_2 связаны соотношением (9), $f_{11}(k_1)$ — амплитуда рассеяния частиц a и b, $f_{21}(k_1)$ — амплитуда реакции $a + b \to c + d$ (при $k_1 = 0$ обе амплитуды стремятся к константам [14]). Функции $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$ и $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$ при всех значениях $\mathbf{r} \neq 0$ удовлетворяют уравнениям Шредингера для свободных частиц:

$$\vec{\nabla}^2 \tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) + k_1^2 \tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) = 0,$$

$$\vec{\nabla}^2 \tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) + k_2^2 \tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) = 0. \tag{13}$$

Из инвариантности относительно обращения времени следует соотношение симметрии $f_{12} = f_{21}$. Сечения упругого рассеяния $a + b \to a + b$,

$c + d \to c + d$ и реакций $a + b \to c + d$, $c + d \to a + b$ определяются по формулам:

$$\sigma_{ab,ab} = 4\pi|f_{11}|^2, \quad \sigma_{cd,cd} = 4\pi|f_{22}|^2,$$

$$\sigma_{cd,ab} = 4\pi|f_{12}|^2 \frac{k_2}{k_1}, \quad \sigma_{ab,cd} = 4\pi|f_{21}|^2 \frac{k_1}{k_2}. \tag{14}$$

При этом согласно условию унитарности (оптическая теорема), в случае двухканального s-волнового рассеяния выполняются равенства:

$$\operatorname{Im} f_{11} = k_1|f_{11}|^2 + k_2|f_{21}|^2, \tag{15}$$

$$\operatorname{Im} f_{22} = k_2|f_{22}|^2 + k_1|f_{21}|^2,$$

$$\operatorname{Im} f_{21} = f_{21}^* k_1 f_{11} + f_{22}^* k_2 f_{21}. \tag{15a}$$

Если разность масс $\Delta m = m_a + m_b - m_c - m_d < 0$, и речь идет об упругом рассеянии $a + b \to a + b$ ниже порога реакции $a + b \to c + d$, то уравнения (7) и (8) описывают связь между открытым и закрытым каналами. При этом, в соответствии с кинематическим соотношением (9), при $k_1 < \sqrt{\dfrac{2\mu_1|\Delta m|c^2}{\hbar^2}}$ «импульс» $\hbar k_2$ становится чисто мнимым ($k_2 = i\kappa_2$), и отвечающая закрытому каналу волновая функция $\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$ экспоненциально затухает на больших расстояниях [17,18]:

$$\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) \approx \tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\,\frac{\tilde{f}_{21}(k_1)}{r} e^{-\kappa_2 r} \tag{16}$$

(здесь $\tilde{f}_{21}(k_1)$ — аналитическое продолжение амплитуды $f_{21}(k_1)$ неупругого процесса $a + b \to c + d$ в подпороговую область).

Приведенные выше формулы справедливы, когда по крайней мере одна из частиц в каждой из пар (ab) и (cd) нейтральна. Перейдем теперь к учету кулоновского взаимодействия заряженных частиц во входном и выходном каналах. В этом случае потенциалы $V_{11}(r)$ и $V_{22}(r)$, входящие в систему уравнений Шредингера (7), (8), имеют структуру:

$$V_{11}(r) = V_{11}^{(0)}(r) + \frac{e_a e_b}{r},$$

$$V_{22}(r) = V_{22}^{(0)}(r) + \frac{e_c e_d}{r},$$

где $V_{11}^{(0)}$ и $V_{22}^{(0)}$ — короткодействующие части потенциалов, связанные только с сильным взаимодействием, e_a, e_b, e_c, e_d — заряды частиц. Мы по-прежнему будем считать, что упругое рассеяние на короткодействующем потенциале и реакция $a+b \to c+d$ связаны только с s-волной. Для соответствующих амплитуд рассеяния, удовлетворяющих условию унитарности (15), сохраним обозначения f_{11} и f_{21}, имея, однако, в виду, что эти амплитуды существенно перенормируются кулоновским взаимодействием. Под $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$ и $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$ мы будем понимать волновые функции пар (ab) и (cd), удовлетворяющие уравнениям:

$$\vec{\nabla}^2\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) + \left(k_1^2 - \frac{2\mu_1}{\hbar^2}\frac{e_a e_b}{r}\right)\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) = 0, \tag{17}$$

$$\vec{\nabla}^2\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) + \left(k_2^2 - \frac{2\mu_2}{\hbar^2}\frac{e_c e_d}{r}\right)\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) = 0 \tag{18}$$

и совпадающие вне области сильного взаимодействия с истинными волновыми функциями $\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$ и $\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$, описывающими двухканальное рассеяние заряженных частиц.

Учитывая сильное взаимодействие только в s-волне, мы можем записать функции $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$ и $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$ в виде (см. [14,2,19]):

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) = e^{i\delta_c(\eta_1)}\sqrt{A_c(\eta_1)}\left[e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}}F(-i\eta_1, 1, i\xi_1) + \frac{f_{11}(k_1)}{A_c(\eta_1)}\frac{\tilde{G}(\rho_1,\eta_1)}{r}\right], \tag{19}$$

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) = e^{i\delta_c(\eta_1)}\frac{f_{21}(k_1)}{\sqrt{A_c(\eta_2)}}\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\frac{\tilde{G}(\rho_2,\eta_2)}{r}. \tag{20}$$

Здесь $\rho_1 = k_1 r$, $\rho_2 = k_2 r$, $\xi_1 = k_1 r - \mathbf{k}_1\mathbf{r}$; $\eta_1 = 1/k_1 a_1$, $\eta_2 = 1/k_2 a_2$ — т.н. кулоновские параметры, характеризующие силу кулоновского взаимодействия; $a_1 = \hbar^2/\mu_1 e_a e_b$, $a_2 = \hbar^2/\mu_2 e_c e_d$ — боровские «радиусы», включающие знак взаимодействия; $\delta_c(\eta) = \arg\Gamma(1+i\eta)$ — кулоновский s-волновой фазовый сдвиг; $A_c(\eta)$ — кулоновский фактор, равный квадрату модуля кулоновской волновой функции непрерывного спектра при $r=0$:

$$A_c(\eta) = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta}-1}; \tag{21}$$

$F(\alpha, 1, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция,

$$\tilde{G}(\rho,\eta) = \sqrt{A_c(\eta)}\,(G_0(\rho,\eta) + iF_0(\rho,\eta)) \text{ —}$$

комбинация сингулярной и регулярной кулоновских функций G_0 и F_0 [14]. В формулах (19), (20), (21) параметры η и a положительны для частиц с зарядами одинакового знака (кулоновское отталкивание) и отрицательны для частиц с зарядами противоположного знака (кулоновское притяжение). Если $\eta \to 0$ ($|a|$ или $k\to\infty$), то $\delta_c \to 0$, $\tilde{G} \to e^{i\rho}$, $F \to 1$, и, как и следовало ожидать, формулы (19) и (20) переходят соответственно в выражения (11) и (12), применимые при отсутствии кулоновского взаимодействия.

При $r \ll |a_1|, |a_2|$; $\rho_1, \rho_2 \lesssim 1$ можно пользоваться приближенными выражениями [2,6]:

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) = \sqrt{A_c(\eta_1)}\,e^{i\delta_c(\eta_1)}\left(e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} + \frac{f_{11}(k_1)}{A_c(\eta_1)}\frac{\cos\rho_1 + iA_c(\eta_1)\sin\rho_1}{r}\right), \tag{22}$$

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) = e^{i\delta_c(\eta_1)}\frac{f_{21}(k_1)}{\sqrt{A_c(\eta_2)}}\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\frac{\cos\rho_2 + iA_c(\eta_2)\sin\rho_2}{r}. \tag{23}$$

В то же время в пределе очень больших r (асимптотика):

$$\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) = \tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) \to \exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{r} + i\eta_1\ln\xi_1)\left(1 + \frac{\eta_1^2}{i\xi_1}\right) + \\ + \left(f_{coul}(k_1,\theta) + f_{11}(k_1)\,e^{2i\delta_c(\eta_1)}\right)\frac{\exp(i\rho_1 - i\eta_1\ln(2\rho_1))}{r}, \tag{24}$$

$$\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) = \tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) \to \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}f_{21}(k_1)\,e^{i(\delta_c(\eta_1)+\delta_c(\eta_2))}\frac{\exp(i\rho_2 - i\eta_2\ln(2\rho_2))}{r}, \tag{25}$$

где

$$f_{coul}(k_1,\theta) = -\left(\frac{\eta_1}{2k_1\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)\exp\left(2i\delta_c - i\eta_1\ln\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

— амплитуда чисто кулоновского рассеяния, θ — угол между $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{r}$.

Приведенные в этом разделе формулы сохраняют свой вид при любом числе каналов $n \geq 2$. В общем случае мы имеем n волновых функций $\psi_{\mathbf{k}_1,m}(\mathbf{r})$, удовлетворяющих системе уравнений ($m = 1, 2, \ldots n$):

$$\vec{\nabla}^2\psi_{\mathbf{k}_1,m}(\mathbf{r}) + \left(k_m^2 - \frac{2\mu_m}{\hbar^2}\, V_{mm}(r)\right)\psi_{\mathbf{k}_1,m}(\mathbf{r}) - \sum_{l \neq m} \frac{2\,\mu_m}{\hbar^2}\, V_{ml}(r)\, \psi_{\mathbf{k}_1,l}(\mathbf{r}) = 0, \tag{26}$$

где $V_{ml} = V^*_{lm}$, а волновые числа k_m связаны с k_1 соотношением, аналогичным (9):

$$k_m^2 = k_1^2\,\frac{\mu_m}{\mu_1} + \frac{2\mu_m c^2}{\hbar^2}\,(M_1 - M_m) \tag{9б}$$

(здесь M_1 и M_m — суммарные массы частиц во входном и m-ом каналах соответственно).

Вне области сильного взаимодействия для функции $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$, отвечающей входному каналу, по-прежнему справедливы формулы (11) или (19), (22), (24), а остальные $(n-1)$ функций $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,m}(\mathbf{r})$ определяются согласно (12) или (20), (23), (25) с соответствующей заменой индекса $2 \to m$.

4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Умножим уравнение (7) для комплексно сопряженных волновых функций на $\frac{\partial}{\partial k_1}\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$; далее продифференцируем уравнение (7) по k_1 и умножим полученное выражение на $\psi^*_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$. Вычитая из второго результата первый, получаем

$$|\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{2k_1}\,\vec{\nabla}\left[\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})}{\partial k_1}\,\vec{\nabla}\psi^*_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) - \psi^*_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})\,\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})}{\partial k_1}\right)\right] -$$
$$-\frac{\mu_1}{\hbar^2 k_1}\left(\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})}{\partial k_1}\, V^*_{12}(r)\,\psi^*_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) - \psi^*_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})\, V_{12}(r)\,\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})}{\partial k_1}\right). \tag{27}$$

Аналогичная процедура с уравнением (8) приводит к равенству:

$$|\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{2k_2}\,\vec{\nabla}\left[\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})}{\partial k_2}\,\vec{\nabla}\psi^*_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) - \psi^*_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})\,\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})}{\partial k_2}\right)\right] -$$
$$-\frac{\mu_2}{\hbar^2 k_2}\left(\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})}{\partial k_2}\, V^*_{21}(r)\,\psi^*_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) - \psi^*_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})\, V_{21}(r)\,\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})}{\partial k_2}\right). \tag{28}$$

Заметим, что согласно (9)

$$\frac{\mu_1}{k_1}\,\frac{\partial}{\partial k_1}\,\psi = \frac{\mu_2}{k_2}\,\frac{\partial}{\partial k_2}\,\psi. \tag{29}$$

Сложим теперь равенства (27) и (28). Легко видеть, что с учетом соотношений (10) и (29) «перекрестные» члены, содержащие функции ψ_1 и ψ_2, взаимно сокращаются. В результате получаем:

$$|\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})|^2 + |\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})|^2 =$$
$$= \frac{1}{2k_1}\,\vec{\nabla}\left[\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})}{\partial k_1}\,\vec{\nabla}\psi^*_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) - \psi^*_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})\,\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})}{\partial k_1}\right)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2k_2}\,\vec{\nabla}\left[\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})}{\partial k_2}\,\vec{\nabla}\psi^*_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) - \psi^*_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})\,\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})}{\partial k_2}\right)\right]. \tag{30}$$

Как уже говорилось, вне области влияния короткодействующих сил (т.е. при достаточно больших растояниях r) волновые функции $\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$ и $\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$ совпадают соответственно с волновыми функциями $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$ и $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$, удовлетворяющими уравнениям (13) для свободных частиц. Ясно, что для функций $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$ и $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$ справедливы соотношения (27) и (28) с $V = 0$, а также формула (30). По аналогии с тем, как это было сделано в статье [6] для чисто упругого рассеяния, рассмотрим интеграл:

$$J_2 = \int \left[(|\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})|^2 + |\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})|^2) - (|\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})|^2 + |\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})|^2)\right] d^3\mathbf{r}, \tag{31}$$

взятый по объему, ограниченному двумя сферическими поверхностями, у одной из которых радиус стремится к бесконечности, а у другой — к нулю. Применяя теорему Гаусса и учитывая, что функции $\psi_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$ и $\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$ (в отличие от асимптотических функций $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$ и $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$) конечны при $r = 0$, получаем соотношение

$$J_2 = \lim_{r \to 0} \pi r^2 \left\{\frac{1}{k_1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})}{\partial k_1}\,\frac{\partial\tilde{\psi}^*_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})}{\partial r} - \tilde{\psi}^*_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})}{\partial k_1}\right)\right] d(\cos\theta) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{k_2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})}{\partial k_2}\,\frac{\partial\tilde{\psi}^*_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})}{\partial r} - \tilde{\psi}^*_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})}{\partial k_2}\right)\right] d(\cos\theta)\right\}, \tag{32}$$

где θ — угол между $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{r}$. Согласно формулам (11) и (12), при отсутствии кулоновского взаимодействия в пределе очень малых r имеем (мы отбрасываем линейные r по члены, которые заведомо не дают вклада в J_2):

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) = 1 + \frac{f_{11}(k_1)}{r} + i\,k_1 f_{11}(k_1),$$

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\left(\frac{f_{21}(k_1)}{r} + i\,k_2 f_{21}(k_1)\right). \tag{33}$$

Подставляя производные от функций $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$ в формулу (32), находим:

$$J_2 = \left[4\pi\,\mathrm{Im}\left(\frac{df_{11}}{dk_1}f_{11}^*\right) - \frac{2\pi i}{k_1}\frac{d}{dk_1}(k_1|f_{11}|^2) + \frac{2\pi}{k_1}\frac{df_{11}}{dk_1}\right] +$$

$$+\left[4\pi\,\frac{\mu_2}{\mu_1}\,\mathrm{Im}\left(\frac{df_{21}}{dk_2}f_{21}^*\right) - \frac{2\pi i}{k_2}\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{d}{dk_2}(k_2|f_{21}|^2)\right]. \tag{34}$$

Как и следовало ожидать, содержащие $1/r$ члены в формуле (32) взаимно сокращаются. С учетом (29) мы можем также написать:

$$\frac{2\pi i}{k_2}\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{d}{dk_2}(k_2|f_{21}|^2) = \frac{2\pi i}{k_1}\frac{d}{dk_1}(k_2|f_{21}|^2),$$

а в силу условия унитарности (15) имеем:

$$\frac{2\pi i}{k_1}\frac{d}{dk_1}[k_1|f_{11}|^2 + k_2|f_{21}|^2] = \frac{2\pi i}{k_1}\frac{d}{dk_1}(\mathrm{Im}\,f_{11}).$$

В итоге приходим к основному результату данного раздела:

$$J_2 = 4\pi\,\mathrm{Im}\left(\frac{df_{11}}{dk_1}f_{11}^* + \frac{k_2}{k_1}\frac{df_{21}}{dk_1}f_{21}^*\right) + \frac{2\pi}{k_1}\frac{d}{dk_1}(\mathrm{Re}\,f_{11}). \tag{35}$$

Формулу (35) легко обобщить на случай произвольного числа открытых связанных каналов. Действительно, исходя из системы уравнений (26), мы получаем соотношение, аналогичное (30):

$$\sum_{l=1}^{n}|\psi_{\mathbf{k}_1,l}(\mathbf{r})|^2 = \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2k_l}\vec{\nabla}\left[\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1,l}(\mathbf{r})}{\partial k_l}\vec{\nabla}\psi_{\mathbf{k}_1,l}^*(\mathbf{r}) - \psi_{\mathbf{k}_1,l}^*(\mathbf{r})\,\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1,l}(\mathbf{r})}{\partial k_l}\right)\right]. \tag{36}$$

Рассматривая далее интеграл

$$J_n = \sum_{l=1}^{n}\int(|\psi_{\mathbf{k}_1,l}(\mathbf{r})|^2 - |\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,l}(\mathbf{r})|^2)\,d^3\mathbf{r} \tag{37}$$

и проводя такие же вычисления, как и при выводе формулы (35), с учетом многоканального условия унитарности [14]

$$\mathrm{Im}\,f_{11} = \sum_{l=1}^{n}k_l|f_{l1}|^2 \tag{38}$$

и связи между волновыми числами k_l и k_1 (см. (9б)) находим:

$$J_n = 4\pi\sum_{l=1}^{n}\frac{k_l}{k_1}\,\mathrm{Im}\left(\frac{df_{l1}}{dk_1}f_{l1}^*\right) + \frac{2\pi}{k_1}\frac{d}{dk_1}(\mathrm{Re}\,f_{11}). \tag{39}$$

При $n = 1$ выражение (39) совпадает с соотношением (20) работы [6], полученным ранее для одноканального случая.

Для заряженных частиц мы можем по-прежнему пользоваться формулой (32). При очень малых r, с учетом свойств кулоновских функций G_0 и F_0, имеем:

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) = e^{i\,\delta_c(\eta_1)}\sqrt{A_c(\eta_1)}\left\{1 + \frac{f_{11}(k_1)}{A_c(\eta_1)}\left[\frac{1}{r} + ik_1A_c(\eta_1) + 2k_1\eta_1 g\left(\eta_1, \frac{r}{a_1}\right)\right]\right\}, \tag{40}$$

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) = e^{i\,\delta_c(\eta_1)}\frac{1}{\sqrt{A_c(\eta_2)}}\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\,f_{21}(k_1)\left[\frac{1}{r} + ik_2A_c(\eta_2) + 2k_2\eta_2 g\left(\eta_2, \frac{r}{a_2}\right)\right]. \tag{41}$$

Здесь (см. [14])

$$g\left(\eta, \frac{r}{a}\right) = \ln\left(\frac{2r}{a}\right) + 2C - 1 + h(\eta),$$
$$h(\eta) = \eta^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+\eta^2)} - C - \ln|\eta|, \tag{42}$$

$C = 0{,}5772$ — постоянная Эйлера.

Легко непосредственно убедиться в том, что при вычислении J_2 по формуле (32) члены, содержащие $\ln\left(\dfrac{2r}{a}\right)$ и $1/r$, взаимно сокращаются; как и следовало заранее ожидать, с учетом условия унитарности сокращаются также члены, пропорциональные производной от общей фазы $\delta_c(k_1)$. В результате получаем:

$$J_2 = \frac{2\pi}{k_1}\left[-\frac{f_{11}^*(k_1)}{\sqrt{A_c(\eta_1)}}\frac{d}{dk_1}D_1(k_1) + \frac{d}{dk_1}\left(\frac{f_{11}(k_1)}{\sqrt{A_c(\eta_1)}}\right)D_1^*(k_1)\right] +$$

$$+\frac{2\pi}{k_2}\left[-\frac{f_{21}^*(k_1)}{\sqrt{A_c(\eta_2)}}\frac{d}{dk_2}D_2(k_1) + \frac{d}{dk_2}\left(\frac{f_{21}(k_1)}{\sqrt{A_c(\eta_2)}}\right)D_2^*(k_1)\right], \qquad (43)$$

где

$$D_1(k_1) = \sqrt{A_c(\eta_1)}\left[1 + \frac{f_{11}(k_1)}{A_c(\eta_1)}\left(ik_1A_c(\eta_1) + 2k_1\eta_1h(\eta_1)\right)\right],$$

$$D_2(k_1) = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{1}{\sqrt{A_c(\eta_2)}}f_{21}(k_1)\left(ik_2A_c(\eta_2) + 2k_2\eta_2h(\eta_2)\right), \qquad (43a)$$

величина k_2 в соответствии с соотношением (9) является функцией k_1. Далее, используя равенство (29) и условие унитарности (15), после элементарных преобразований приходим к формуле, содержащей производные только по k_1, которая обобщает результат (35) на случай заряженных частиц:

$$J_2 = 4\pi\,\mathrm{Im}\left(\frac{df_{11}}{dk_1}f_{11}^* + \frac{k_2}{k_1}\frac{df_{21}}{dk_1}f_{21}^*\right) + \frac{2\pi}{k_1}\frac{d}{dk_1}(\mathrm{Re}\,f_{11}) -$$

$$-\frac{2\pi}{k_1}\frac{d}{dk_1}(\ln A_c(\eta_1))\,\mathrm{Re}\,f_{11} - 4\pi\,\eta_1\frac{|f_{11}|^2}{A_c(\eta_1)}\frac{d}{dk_1}h(\eta_1) -$$

$$-4\pi\,\eta_2\frac{k_2}{k_1}\frac{|f_{21}|^2}{A_c(\eta_2)}\frac{d}{dk_1}h(\eta_2). \qquad (44)$$

В пределе $e_ae_b = e_ce_d = 0$ (т.е. при отсутствии кулоновского взаимодействия) $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $A_c(\eta_1) = A_c(\eta_2) = 1$, произведение $\eta\,\frac{d}{dk_1}h(\eta) \to 0$, и выражение (44) переходит в формулу (35). Если частицы a и b во входном канале имеют противоположные заряды, а частицы c и d нейтральны, то в формуле (44) следует положить $\eta_2 = 0$; при этом в соответствии с притяжением между

частицами a и b параметр $\eta_1 < 0$. В случае, когда нейтральны частицы a и b, наоборот, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 < 0$.

При произвольном числе каналов n аналогичное вычисление интеграла J_n по формуле (37) приводит к результату:

$$J_n = 4\pi\sum_{l=1}^{n}\frac{k_l}{k_1}\left[\mathrm{Im}\left(\frac{df_{l1}}{dk_1}f_{l1}^*\right) - \eta_l\frac{|f_{l1}|^2}{A_c(\eta_l)}\frac{d}{dk_1}h(\eta_l)\right] +$$

$$+\frac{2\pi}{k_1}\left[\frac{d}{dk_1}(\mathrm{Re}\,f_{11}) - \mathrm{Re}\,f_{11}\frac{d}{dk_1}(\ln A_c(\eta_1))\right]. \qquad (45)$$

В одноканальном случае, с учетом представления $f(k) = \dfrac{e^{i\delta}\sin\delta}{k}$, следующего из условия унитарности для амплитуды s-волнового рассеяния, формулу для J_1 можно преобразовать к виду (см. [6]):

$$J_1 = -\frac{2\pi}{k}A_c(\eta)\,|f_c(k)|^2\frac{d}{dk}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{1}{f_c(k)}\right) + 2k\,\eta h(\eta)\right], \qquad (46)$$

где $f_c(k) = \dfrac{f(k)}{A_c(k)}$.

До сих пор все каналы считались открытыми. Интересно рассмотреть случай $\Delta m = m_a + m_b - m_c - m_d < 0$, когда ниже порога неупругих процессов возможно только чисто упругое рассеяние. Пусть имеется только один закрытый канал, а частицы нейтральны. Тогда, с учетом связи открытого и закрытого каналов, в формулах (31) и (32) следует заменить k_2 на $i\,\kappa_2$ и в качестве волновой функции $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$ взять затухающую сферическую волну (16). Это дает:

$$J_2 = 4\pi\,\mathrm{Im}\left(\frac{df_{11}}{dk_1}f_{11}^*\right) + \frac{2\pi}{k_1}\frac{d}{dk_1}(\mathrm{Re}\,f_{11}) - 2\pi\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{|\tilde{f}_{21}|^2}{\kappa_2}, \qquad (47)$$

или, с учетом представления $f_{11} = \dfrac{e^{i\delta}\sin\delta}{k_1}$,

$$J_2 = \frac{2\pi}{k_1^2}\left(\frac{d\delta}{dk_1} - \frac{\sin 2\delta}{2k_1}\right) - 2\pi\frac{|\tilde{f}_{21}|^2}{\kappa_2}\frac{\mu_2}{\mu_1}. \qquad (48)$$

Здесь $\delta(k_1)$ — фаза рассеяния,

$$\kappa_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}(\tilde{k}_1^2 - k_1^2)}, \quad \hbar\,\tilde{k}_1 = \sqrt{2\mu_1|\Delta m|c^2}; \qquad (49)$$

по определению, $\lim_{k_1 \to \tilde{k}_1} \tilde{f}_{21}(k_1) = f_{21}(\tilde{k}_1)$. В случае нескольких закрытых каналов член $(-2\pi \mu_2 |\tilde{f}_{21}|^2 / \mu_1 \kappa_2)$ в формулах (47) и (48) заменяется на сумму $\sum_{k=2}^{n} (-2\pi \mu_k |\tilde{f}_{k1}|^2 / \mu_1 \kappa_k)$.

Заметим, что выражения для J_2 содержат член, который при приближении к порогу реакции стремится к бесконечности как $1/\kappa_2$. Однако, с учетом пороговой особенности амплитуды f_{11}, эта сингулярность сокращается с аналогичной сингулярностью в производной от фазы $\delta(k_1)$. Действительно, при приближении (снизу) к пороговому импульсу $h\tilde{k}_1$ [14,17]:

$$\delta(k_1) = \delta(\tilde{k}_1) - \kappa_2 \tilde{k}_1 |f_{21}(\tilde{k}_1)|^2. \tag{50}$$

С учетом (49) при $k_1 \to \tilde{k}_1$ имеем:

$$\frac{d\delta}{dk_1} = -\tilde{k}_1 |f_{21}(\tilde{k}_1)|^2 \frac{d\kappa_2}{dk_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{|f_{21}(\tilde{k}_1)|^2}{\kappa_2} \tilde{k}_1^2. \tag{51}$$

В результате сингулярные члены в выражении для J_2 исчезают, и вблизи порога справедлива одноканальная формула с фазой $\delta(\tilde{k}_1)$.

Учитывая, что выше порога (при $k_1 > \tilde{k}_1$, $(k_1 - \tilde{k}_1) << \tilde{k}_1$) амплитуда упругого рассеяния имеет вид:

$$f_{11}(k_1) = \frac{e^{2i\delta(\tilde{k}_1)}(1 - 2k_2\tilde{k}_1 |f_{21}(\tilde{k}_1)|^2) - 1}{2i\,\tilde{k}_1}, \tag{52}$$

где $k_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}(k_1^2 - \tilde{k}_1^2)}$, легко убедиться в том, что вычисленная по формуле (35) величина J_2 также не содержит сингулярностей.

Ниже порога рождения частиц с одинаковыми зарядами связь каналов отсутствует, поскольку ввиду кулоновского отталкивания $f_{21}(\tilde{k}_1) = 0$, и в соответствии с этим подпороговые амплитуды $\tilde{f}_{21}(k_1)$ равны нулю. В этом случае справедлива одноканальная формула (46).

Ситуация, когда частицы a и b нейтральны, а частицы c и d имеют противоположные заряды, требует специального рассмотрения, поскольку здесь аналитическое продолжение волновой функции $\psi_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$ и амплитуд рассеяния

в подпороговую область не является тривиальным. При этом пороговые особенности проявляются, как известно, в том, что амплитуда упругого рассеяния содержит бесконечное число резонансов, сгущающихся к порогу и сосредоточенных в области $\Delta k \sim 1/|a_2| = \frac{\mu_2 |e_c e_d|}{2\hbar^2}$ [14,17]. Анализ показывает, что, как и следовало ожидать, при вычислении J_2 связанная с подпороговыми резонансами сингулярность в производной от фазы амплитуды упругого рассеяния $\frac{d\delta}{dk}$ полностью сокращается с соответствующим сингулярным вкладом второго, закрытого канала.

5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПАР НЕТОЖДЕСТВЕННЫХ И ПАР ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ

В рамках модели источников, испускающих бесспиновые частицы (a, b) и (c, d), корреляционная функция частиц a и b при малых относительных скоростях в соответствии с формулой (4) имеет вид:

$$R_{ab}(\mathbf{k}_1) = \int W_{\mathbf{v}}^{(1)}(\mathbf{r}) |\psi_{-\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} + \omega_{\mathbf{v}}^{(2)} \int W_{\mathbf{v}}^{(2)}(\mathbf{r}) |\psi_{-\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r}, \tag{53}$$

где $\psi_{-\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$ и $\psi_{-\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$ — рассмотренные выше волновые функции, описывающие двухканальное рассеяние частиц a и b.

Если характерное расстояние $\tilde{r}$ между точками испускания частиц a и b (c и d) в с.ц.и. пары велико по сравнению с радиусом короткодействующих сил r_0, то в хорошем приближении функции $\psi_{-\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$ и $\psi_{-\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$ можно заменить соответственно на функции $\tilde{\psi}_{-\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$ и $\tilde{\psi}_{-\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$, которые определяются по формулам (11) и (12) (или, в случае заряженных частиц, (19) и (20)).

Предположим теперь, что пары (a, b) и (c, d) испускаются одними и теми же парами источников с одинаковыми вероятностями. Тогда:

$$\omega_{\mathbf{v}}^2 = 1, \quad W_{\mathbf{v}}^{(1)}(\mathbf{r}) = W_{\mathbf{v}}^{(2)}(\mathbf{r}) = W_{\mathbf{v}}(\mathbf{r}). \tag{54}$$

В этом случае мы можем улучшить приближение, используя рассмотренные в предыдущем разделе интегральные соотношения для волновых функций, и, как и в работах [2,6], выразить корреляционную функцию через амплитуды рассеяния и их производные. Учитывая, что в интеграле (31) основную роль играют малые расстояния $r \lesssim r_0 << \tilde{r}$, имеем (ср. с [6]):

$$R_{ab}(\mathbf{k}_1) = \int W_\mathbf{v}(\mathbf{r}) \left(| \tilde{\psi}_{-\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) |^2 + | \tilde{\psi}_{-\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) |^2 \right) d^3\mathbf{r} + J_2 W_\mathbf{v}(\mathbf{r}=0), \qquad (55)$$

где J_2 определяется по формуле (35) при отсутствии кулоновского взаимодействия, и по формуле (44), если частицы заряжены. Заметим, что поправочный член пропорционален $\tilde{r}^{-3}$.

Если кулоновское взаимодействие отсутствует (частица a и частица c нейтральны), то с учетом соотношений (11) и (12) формула (55) дает:

$$R_{ab}(\mathbf{k}_1) = 1 + b(\mathbf{k}_1),$$

$$b(\mathbf{k}_1) = \left\langle \frac{|f_{11}|^2}{r^2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{|f_{21}|^2}{r^2} + 2\mathrm{Re}\left(\frac{f_{11}}{r} \exp(ik_1 r + i\,\mathbf{k}_1\mathbf{r}) \right) \right\rangle + J_2 W_\mathbf{v}(\mathbf{r}=0), \qquad (56)$$

где J_2 имеет вид (35), $\langle \{ \dots \} \rangle \equiv \int W_\mathbf{v}(\mathbf{r}) \{ \dots \} d^3\mathbf{r}$.

Подчеркнем, что из-за множителя $e^{i\,\mathbf{k}_1\mathbf{r}}$ в формуле (56) корреляционная функция $R_{ab}(\mathbf{k}_1)$ несимметрична относительно замены $\mathbf{k}_1 \rightleftarrows -\mathbf{k}_1$. Это приводит к эффектам пространственно-временной асимметрии в корреляциях нетождественных частиц [10].

Соотношения (55) и (56) остаются в силе и в случае, когда c и d — тождественные частицы, которые испускаются источниками и затем переходят в пару нетождественных частиц (a, b), корреляции которых исследуются. При этом амплитуда реакции $f_{cc,ab} = \sqrt{2}\, f_{21}$ определена в половине телесного угла, а сечение реакции $\sigma_{cc,ab} = 4\pi |f_{21}|^2$, так что условие унитарности сохраняет прежний вид (15).

Согласно формуле (3), если тождественны конечные бесспиновые частицы (т.е. частицы во входном канале в задаче о рассеянии), то с учетом симметризации, независимо от того, тождественны или нетождественны промежуточные частицы, корреляционная функция при достаточно больших размерах области генерации и условии (54) имеет вид:

$$R_{aa}(\mathbf{k}_1) = \frac{1}{2} \int W_\mathbf{v}(\mathbf{r}) \left(| \tilde{\psi}_{-\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) + \tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r}) |^2 + | \tilde{\psi}_{-\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) + \tilde{\psi}_{\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r}) |^2 \right) d^3\mathbf{r} + 2J_2 W_\mathbf{v}(\mathbf{r}=0), \qquad (57)$$

где J_2 по-прежнему определяется по формуле (35) или (44). При отсутствии кулоновского взаимодействия с учетом (11) и (12) получаем:

$$R_{aa}(\mathbf{k}_1) = 1 + b(\mathbf{k}_1) + b(-\mathbf{k}_1) + \langle \cos(2\mathbf{k}_1\mathbf{r}) \rangle, \qquad (58)$$

где $b(\mathbf{k}_1)$ определяется согласно (56). В выражении (58) третий член соответствует эффекту бозе-статистики для невзаимодействующих бесспиновых частиц. При этом, в отличие от случая нетождественных частиц, всегда выполняется соотношение симметрии $R_{aa}(\mathbf{k}_1) = R_{aa}(-\mathbf{k}_1)$.

Заметим, что симметризованная амплитуда упругого рассеяния тождественных частиц $f_{aa,aa} = 2f_{11}$ и амплитуда реакции $f_{cc,aa} = 2f_{21}$ определены в половине телесного угла, а соответствующие сечения $\sigma_{aa,aa} = 8\pi |f_{11}|^2$, $\sigma_{cc,aa} = 8\pi |f_{21}|^2$; если частицы c и d нетождественны, то $f_{cd,aa} = \sqrt{2}\, f_{21}$, $\sigma_{cd,aa} = 8\pi |f_{21}|^2$.

Допустим теперь, что частицы a, b, c и d имеют ненулевые спины, и предположим, что по-прежнему пары (a, b) и (c, d) испускаются с одинаковой вероятностью, причем вероятность испускания каждой частицы не зависит от проекции ее спина. Тогда, с учетом того, что переходы между s-состояниями с разными значениями полного спина S отсутствуют, корреляционная функция нетождественных частиц (при упомянутом выше условии, что размеры области генерации существенно превышают радиус действия сил) будет иметь вид:

$$R_{ab}(\mathbf{k}_1) = 1 + \sum_{S=|j_a - j_b|}^{j_a + j_b} \frac{2S+1}{(2j_a+1)(2j_b+1)} b^{(S)}(\mathbf{k}_1), \qquad (59)$$

где величины $b^{(S)}(\mathbf{k}_1)$ вычисляются по формуле (56) с амплитудами $f_{11}^{(S)}$ и $f_{21}^{(S)}$, зависящими от полного спина S (те же амплитуды входят в выражение (35) для интеграла $J_2^{(S)}$).

В случае тождественных частиц s-волновое взаимодействие возможно только при четных значениях полного спина S [14]. Учет симметризации волновых функций приводит к следующему выражению для корреляционной функции:

$$R_{aa}(\mathbf{k}_1) = 1 + \sum_{S-\text{четн.}} \frac{2S+1}{(2j_a+1)^2} \left(b^{(S)}(\mathbf{k}_1) + b^{(S)}(-\mathbf{k}_1) \right) + \frac{(-1)^{2j_a}}{2j_a+1} \langle \cos(2\mathbf{k}_1\mathbf{r}) \rangle, \qquad (60)$$

где величины $b^{(S)}(\mathbf{k}_1)$ определяются по формуле (56) с амплитудами $f_{11}^{(S)}$ и $f_{21}^{(S)}$, зависящими от четных значений полного спина S ($S = 0, 2, \dots \le 2j_a$)).

Если частицы заряжены, то, при условиях $r << |a_1|$, $r << |a_2|$ и $k_1 r \lesssim 1$, $k_2 r \lesssim 1$ в формулах (55) и (57) можно использовать для функций $\tilde{\psi}_{-\mathbf{k}_1,1}(\mathbf{r})$ и $\tilde{\psi}_{-\mathbf{k}_1,2}(\mathbf{r})$ вместо (19), (20) приближенные выражения (22) и (23). Тогда для нетождественных бесспиновых частиц корреляционная функция будет иметь структуру:

$$R_{ab}(\mathbf{k}_1) = A_c(\eta_1)(1 + b_c(\mathbf{k}_1)), \tag{61}$$

а в случае тождественных бесспиновых частиц

$$R_{aa}(\mathbf{k}_1) = A_c(\eta_1)(1 + \langle \cos(2\mathbf{k}_1\mathbf{r}) \rangle + b_c(\mathbf{k}_1) + b_c(-\mathbf{k}_1)). \tag{62}$$

Здесь $A_c(\eta)$ — кулоновский фактор (см. формулу (21)),

$$b_c(\mathbf{k}_1) = \langle \frac{|f_{c,11}|^2}{r^2} (\cos^2(k_1 r) + A_c^2(\eta_1) \sin^2(k_1 r)) +$$

$$+ \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{|f_{c,12}|^2}{r^2} (\cos^2(k_2 r) + A_c^2(\eta_2) \sin^2(k_2 r)) +$$

$$+ 2\mathrm{Re}\left[\frac{f_{c,11}}{r} e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} (\cos(k_1 r) + iA_c(\eta_1) \sin(k_1 r)) \right] \rangle + J_2 W_{\mathbf{v}}(\mathbf{r} = 0), \tag{63}$$

$f_{c,11} = f_{11}/A_c(\eta_1)$, $f_{c,12} = f_{12}/\sqrt{A_c(\eta_1)A_c(\eta_2)}$, J_2 дается выражением (44). При $\eta_1 = \eta_2 = 0$ формула (63) совпадает с (56).

Аналогичным образом обобщаются формулы (59) и (60) для парных корреляций частиц с ненулевым спином: с учетом кулоновского взаимодействия их следует умножить на фактор $A_c(\eta_1)$ и заменить $b^{(S)}(\mathbf{k}_1)$ на $b_c^{(S)}(\mathbf{k}_1)$ согласно формуле (63).

Нужно, однако, иметь в виду, что в реальных случаях, когда размеры области генерации не слишком малы, формулы (61), (62), (63) могут привести к существенным ошибкам, даже при анализе $\pi^+\pi^-$-корреляций. Поэтому при расчетах лучше исходить из выражений (19) и (20); при больших ρ (≥ 15) ввиду очень медленной сходимости гипергеометрического ряда рекомендуется использовать асимптотические выражения (24) и (25).

6. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ АМПЛИТУД. ИЗОТОПИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Для расчета корреляционных функций на основе формул предыдущего раздела необходимо знать явный вид амплитуд многоканального рассеяния и их зависимость от относительного импульса в области малых энергий.

В одноканальном случае амплитуда s-волнового упругого рассеяния при низких энергиях в приближении эффективного радиуса имеет структуру [20—22]:

$$f(k) = A_c(\eta) \left(\frac{1}{f_0} + \frac{1}{2} d_0 k^2 - 2k\,\eta h(\eta) - iA_c(\eta)k \right)^{-1}, \tag{64}$$

где f_0 — действительная длина рассеяния, перенормированная кулоновским взаимодействием, d_0 — эффективный радиус, $A_c(\eta)$ и $h(\eta)$ определяются согласно формулам (21) и (42)*. Если подставить выражение (64) в формулу (46), получается простой результат [2,6]:

$$J_1 = -2\pi A_c(\eta) |f_c(k)|^2 d_0.$$

Формулу (64) нетрудно обобщить на случай n открытых каналов, если под f понимать n-рядную симметричную матрицу, составленную из s-волновых амплитуд f_{ml} упругого рассеяния и бинарных реакций, в качестве f_0 и d_0 рассматривать n-рядные симметричные матрицы длин рассеяния и эффективных радиусов соответственно, а величины k, η, $h(\eta)$ и $A_c(\eta)$ заменить на диагональные матрицы в представлении каналов:

$$(\hat{k})_{ml} = k_m \delta_{ml}, \quad (\hat{\eta})_{ml} = \eta_m \delta_{ml}, \quad (h(\hat{\eta}))_{ml} = h(\eta_m)\, \delta_{ml},$$

$$(A_c(\hat{\eta}))_{ml} = A_c(\eta_m)\, \delta_{ml}. \tag{65}$$

Тогда:

$$\hat{f} = (A_c(\hat{\eta}))^{1/2} \left(\hat{f}_0^{-1} + \frac{1}{2} \hat{k}\hat{d}_0\hat{k} - 2\hat{k}\,\hat{\eta}\, h(\hat{\eta}) - i\,\hat{k}\, A_c(\hat{\eta}) \right)^{-1} (A_c(\hat{\eta}))^{1/2}. \tag{66}$$

Легко убедиться в том, что матричное выражение (66) автоматически удовлетворяет многоканальному условию унитарности [14]:

$$\mathrm{Im}\,\hat{f} = \hat{f}^+\hat{k}\hat{f}. \tag{67}$$

При отсутствии кулоновского взаимодействия ($\eta = 0$) формула (66) упрощается:

$$\hat{f} = \left(\hat{f}_0^{-1} + \frac{1}{2} \hat{k}\hat{d}_0\hat{k} - i\,\hat{k} \right)^{-1}. \tag{68}$$

*При отсутствии кулоновского взаимодействия длина рассеяния f_0, входящая в формулу (64), совпадает с амплитудой упругого рассеяния при нулевой энергии. Во избежание недоразумений следует иметь в виду, что при анализе барион-барионного (в частности, нуклон-нуклонного) взаимодействия под «длиной рассеяния» обычно понимают величину ($-f_0$), а во всех остальных случаях — ($+f_0$).

В предположении, что матрица эффективных радиусов $\hat{d}_0$ диагональна, формула (68) согласуется с параметризацией многоканальных амплитуд в работе [23].

Если кинетическая энергия в рассматриваемом входном канале 1 мала по сравнению с кинетическими энергиями во всех остальных каналах ($k_m >> k_1$), мы можем переопределить матрицу длин рассеяния в многоканальных формулах (66), (68) как $\hat{\tilde{f}}_0$, включив в $\hat{\tilde{f}}_0^{-1}$ все независящие от k_1 элементы, которые можно считать константами, а для учета зависимости амплитуды упругого рассеяния от энергии оставить в каждой из диагональных матриц (65) только первый элемент, положив остальные равными нулю. Существенно, что в силу условия унитарности элементы переопределенной матрицы $\hat{\tilde{f}}_0$ должны теперь быть комплексными; в частности, $\operatorname{Im}\tilde{f}_{0,11} = \sum_{m \neq 1} k_m |\tilde{f}_{0,m1}|^2$. Нетрудно убедиться в том, что в этом случае для амплитуды упругого рассеяния f_{11} будет справедлива одноканальная формула (64) с комплексной длиной рассеяния f_0, совпадающей с диагональным элементом $\hat{\tilde{f}}_{0,11}$ многоканальной матрицы $\hat{\tilde{f}}_0$.

Аналогично, если речь идет о двух каналах с близкими суммарными массами частиц, причем при $m > 2$ волновые числа $k_1, k_2 << k_m$, то энергетическая зависимость амплитуд f_{11}, f_{12}, f_{22} описывается формулой (66) с двухрядными диагональными матрицами (65) и двухрядной комплексной матрицей длин рассеяния $\hat{f}_0$, составленной из элементов «переопределенной» n-рядной матрицы $\hat{\tilde{f}}_0$:

$$\hat{f}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{0,11} & \tilde{f}_{0,12} \\ \tilde{f}_{0,21} & \tilde{f}_{0,12} \end{pmatrix}.$$

Формулы (66) и (68) могут быть обобщены на случай закрытых каналов. Что касается выражения (68), то для каждого из закрытых каналов l следует просто заменить волновое число k_l на мнимую величину $i\,\kappa_l$. Вклад закрытых каналов с одноименно заряженными частицами ввиду кулоновского отталкивания равен нулю.

Если в канале l частицы имеют противоположные по знаку заряды, то при переходе в подпороговую область в матрице (66) диагональные элементы

$$\beta_l = -ik_l A_c(\eta_l) - 2k_l \eta_l h(\eta_l)$$

заменяются на действительные величины (ср. с [14]):

$$\beta_l = -\frac{\pi}{|a_l|}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{|a_l|\kappa_l}\right) +$$
$$+\frac{2}{|a_l|}\left\{\ln\kappa_l + \frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{1}{\kappa_l|a_l|}\right) + \psi\left(-\frac{1}{\kappa_l|a_l|}\right)\right]\right\}, \qquad (69)$$

где $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции, a_l — боровский «радиус» ($a_l < 0$)[1].

В связи с проблемой влияния многоканального рассеяния в конечном состоянии на двухчастичные корреляции представляет интерес ситуация, когда во всех каналах все частицы a_l и все частицы b_l являются партнерами, принадлежащими к соответствующим изотопическим мультиплетам. Известно, что если длина рассеяния мала по сравнению с боровским радиусом, она слабо перенормируется кулоновским взаимодействием (эффект перенормировки имеет величину порядка $f_0/|a|$, см. [24]). В этом приближении, с учетом изотопической инвариантности потенциала сильного взаимодействия, можно считать, что независящие от энергии матрицы $\hat{f}_0$ и $\hat{d}_0$, входящие в формулу (66), диагональны в представлении состояний с определенными значениями полного изотопического спина[2]. При этом нарушение изотопической инвариантности связано с кулоновскими факторами $A_c(\eta)$ и различием волновых чисел k_l в разных каналах.

В двухканальном случае элементы матрицы длин рассеяния имеют структуру:

$$f_{0,11} = \alpha^2 f_0^{(I)} + \beta^2 f_0^{(II)},$$
$$f_{0,12} = f_{0,21} = \alpha\beta(f_0^{(I)} - f_0^{(II)}),$$
$$f_{0,22} = \beta^2 f_0^{(I)} + \alpha^2 f_0^{(II)}, \qquad (70)$$

где α и β — постоянные действительные коэффициенты, удовлетворяющие равенству $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, амплитуды $f_0^{(I)}$ и $f_0^{(II)}$ отвечают состояниям с определенным значением полного изотопического спина. В частности, в случае $\pi^+\pi^-$-системы:

---

[1]В пределе $\kappa_l \to 0$

$$\beta_l = -\frac{2\pi}{|a_l|}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{\kappa_l|a_l|}\right).$$

[2]Сказанное не относится к системе двух нуклонов, для которой параметр $f_0/|a| \approx 0{,}3$ достаточно велик.

$$f_0(\pi^+\pi^- \to \pi^+\pi^-) = \frac{2}{3} f_0^{(0)} + \frac{1}{3} f_0^{(2)},$$

$$f_0(\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0) = f(\pi^0\pi^0 \to \pi^+\pi^-) = \frac{\sqrt{2}}{3} (f_0^{(0)} - f_0^{(2)}),$$

$$f_0(\pi^0\pi^0 \to \pi^0\pi^0) = \frac{1}{3} f_0^{(0)} + \frac{2}{3} f_0^{(2)}, \tag{71}$$

где $f_0^{(0)}$ и $f_0^{(2)}$ — действительные длины s-волнового рассеяния в состояниях с изоспинами 0 и 2 соответственно. Такие же соотношения (с очевидной заменой $f_0^{(0)} \to f_0^{(1/2)}$, $f_0^{(2)} \to f_0^{(3/2)}$) справедливы для бинарных процессов $\pi^- p \to \pi^- p$, $\pi^- p \rightleftarrows \pi^0 n$, $\pi^0 n \to \pi^0 n$. Для системы $K\overline{K}$:

$$f_0(K^+K- \to K^+K^-) = f_0(K^0\overline{K}{}^0 \to K^0\overline{K}{}^0) = \frac{1}{2} (f_0^{(0)} + f_0^{(1)}),$$

$$f_0(K^+K^- \to K^0\overline{K}{}^0) = f_0(K^0\overline{K}{}^0 \to K^+K^-) = \frac{1}{2} (f_0^{(0)} - f_0^{(1)}), \tag{72}$$

где $f_0^{(0)}$ и $f_0^{(1)}$ — комплексные длины рассеяния в состояниях с полными изоспинами 0 и 1 соответственно ($\mathrm{Im} f_0^{(0)} > 0$ и $\mathrm{Im} f_0^{(1)} > 0$ ввиду возможности реакций $K\overline{K} \to \pi\pi$, $K\overline{K} \to \pi\eta$).

При достаточно больших относительных энергиях, когда можно «выключить» кулоновское взаимодействие и пренебречь кинематическими эффектами, считая, что $k_2 = k_1 = k$, соотношения вида (70) с теми же коэффициентами α и β становятся справедливыми уже и для полных амплитуд многоканального рассеяния f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}. Тогда, при условии, что матрица $\hat{f}_0$ действительна, амплитуды $f^{(\mathrm{I})}$, $f^{(\mathrm{II})}$ представляются в виде:

$$f^{(\mathrm{I})} = \frac{e^{i\,\delta^{(\mathrm{I})}} \sin \delta^{(\mathrm{I})}}{k}, \quad f^{(\mathrm{II})} = \frac{e^{i\,\delta^{(\mathrm{II})}} \sin \delta^{(\mathrm{II})}}{k},$$

где $\delta^{(\mathrm{I})}$ и $\delta^{(\mathrm{II})}$ — действительные фазы. При этом вычисление величины J_2 по формуле (35) приводит к линейной комбинации одноканальных формул:

$$J_2 = -\frac{2\pi}{k}\left[\alpha^2 |f^{(\mathrm{I})}|^2 \frac{d}{dk} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{f^{(\mathrm{I})}}\right) + \beta^2 |f^{(\mathrm{II})}|^2 \frac{d}{dk} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{f^{(\mathrm{II})}}\right)\right]. \tag{73}$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный в данной работе анализ может быть непосредственно использован для описания корреляций в парах $(\pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0)$, $(\pi^- p, \pi^0 n)$,

$(K^+K^-, K_S^0K_S^0)$ с учетом вклада бинарных реакций $\pi^+\pi^- \rightleftarrows \pi^0\pi^0$, $\pi^- p \rightleftarrows \pi^0 n$, $K^+K^- \rightleftarrows K^0\overline{K}{}^0$. В этих случаях одна из волновых функций (ψ_1 или ψ_2) соответствует нейтральным частицам, а вторая — разноименно заряженным частицам, причем регистрируемые и промежуточные частицы входят в одни и те же изотопические мультиплеты, так что предположение (54) о равновероятном испускании пар регистрируемых и промежуточных частиц является естественным. В соответствии с этим, при достаточно больших пространственно-временных параметрах области генерации (см. раздел 5) применимы формулы (55) и (57), в которых следует положить либо $\eta_1 = 0$, либо $\eta_2 = 0$. При этом амплитуды упругого рассеяния и бинарных реакций параметризуются с учетом изотопических соотношений типа (71) или (72).

Выражения для корреляционных функций существенно упрощаются в пренебрежении кулоновским взаимодействием и кинематическими эффектами, связанными с разностью масс «начальных» и «конечных» частиц. В этом грубом приближении, которое может быть оправдано только при достаточно больших относительных энергиях (предполагается, что $\mu_1 = \mu_2$, $k_2 = k_1 = k$), применение формул (56), (71) и (73) дает для корреляционной функции пары $(\pi^+\pi^-)$:

$$R_{\pi^+\pi^-}(\mathbf{k}) = 1 + \int d^3\mathbf{r} W_{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) \left\{ \frac{2|f^{(0)}(k)|^2 + |f^{(2)}(k)|^2}{3r^2} + \right.$$

$$\left. + 2\mathrm{Re}\left(\frac{2f^{(0)}(k) + f^{(2)}(k)}{3r} \mathrm{e}^{ikr + i\mathbf{kr}} \right) \right\} -$$

$$- \frac{2\pi}{3k}\left[2|f^{(0)}(k)|^2 \frac{d}{dk} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{f^{(0)}(k)}\right) + |f^{(2)}(k)|^2 \frac{d}{dk} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{f^{(2)}(k)}\right)\right] W_{\mathbf{v}}(\mathbf{r} = 0). \tag{74}$$

Далее, на основе соотношений (58), (56), (71) и (73) находим корреляционную функцию двух π^0-мезонов:

$$R_{\pi^0\pi^0}(\mathbf{k}) = 1 + \int d^3\mathbf{r} W_{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) \left\{ \cos(2\mathbf{kr}) + 2\frac{|f^{(0)}(k)|^2 + 2|f^{(2)}(k)|^2}{r^2} + \right.$$

$$\left. + 4\mathrm{Re}\left(\frac{f^{(0)}(k) + f^{(2)}(k)}{3r} \mathrm{e}^{ikr} \right) \cos(\mathbf{kr}) \right\} -$$

$$- \frac{4\pi}{3k}\left[|f^{(0)}(k)|^2 \frac{d}{dk} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{f^{(0)}(k)}\right) + 2|f^{(2)}(k)|^2 \frac{d}{dk} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{f^{(2)}(k)}\right)\right] W_{\mathbf{v}}(\mathbf{r} = 0). \tag{75}$$

Аналогичные приближенные выражения можно написать также для корреляционных функций пар $\pi^- p$, K^+K^- и $K^0_S K^0_S$. В последнем случае следует иметь в виду, что если генерируется пара $K^0 \bar{K}^0$, но регистрируются два короткоживущих нейтральных K^0-мезона, парные корреляции имеют такой же характер, как и в случае обычных тождественных бесспиновых частиц [25,26].

В дальнейшем на основе результатов настоящей работы мы предполагаем провести подробные вычисления корреляционных функций при малых относительных скоростях с учетом как кулоновского взаимодействия, так и разности масс заряженных и нейтральных пионов, нуклонов и каонов.

Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (В.Л.Л., грант № 97-02-16699) и фонда GA AVČR (Р.Л., грант № A1010601).

ЛИТЕРАТУРА

1. Подгорецкий М.И. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, с.628.
2. Ледницки Р., Любошиц В.Л. — Ядерная физика, 1982, т.35, с.1316.
3. Lorstad B. — J. Mod. Phys., 1989, v.A4, p.2861.
4. Boal D.N., Gelbke C.K., Jennigs B.K. — Rev. Mod. Phys., 1990, v.62, p.553.
5. Koonin S.E. — Phys. Lett., 1977, v.70B, p.43.
6. Любошиц В.Л. — Ядерная физика, 1985, т.41, с.820.
7. Любошиц В.Л. — Ядерная физика, 1988, т.48, с.1501.
8. Lednicky R., Lyuboshitz V.L. — Proceedings of the Int. Conf. on Nuclear Interferometry — Corinne 90, Nantes, France, 1990 (ed. by D.Ardouin, World Scientific, 1990).
9. Lednicky R., Lyuboshitz V.L. — Heavy Ion Physics, 1996, v.3, p.1.
10. Lednicky R., Lyuboshitz V.L., Erazmus B., Nouais D. — Phys. Lett., 1996, v.373B, p.30.
11. Bowler M.G. — Z. Phys., 1988, v.C39, p.81.
12. Gyulassy M., Kauffmann S.K., Wilson L.W. —Phys. Rev., 1979, v.20C, p.2267.
13. Мигдал А.Б. — ЖЭТФ, 1955, т.28, с.1.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М., Наука, 1989, § 138, 144, 146, 147.
15. Feshbach H. — Ann. Phys., 1958, v.5, p.357.
16. Dades G.C., Rasche G. — Helv. Physica Acta, 1971, v.44, p.141.
17. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. — Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. Гл. 8,9. М.: Наука, 1971.
18. Никитиу Ф. — Фазовый анализ в физике ядерных взаимодействий. М.: Мир, 1983.

19. Gmitro M., Kvasil Y., Lednicky R., Lyuboshitz V.L. — Czechoslovak Journal of Physics, 1986, v.B36, p.1281.
20. Ландау Л.Д., Смородинский Я.А. — ЖЭТФ, 1944, т.14, с.269.
21. Смородинский Я.А. — ДАН СССР, 1948, т.60, с.217.
22. Bethe H. — Phys. Rev., 1949, v.76, p.38.
23. Ross M.H., Shaw G.L. — Ann. Phys., 1961, v.13, p.147.
24. Бете Г., Моррисон Ф. — Элементарная теория ядра. М.: ИИЛ, 1958, §13 (Bethe H.A. Elementary Nuclear Theory. New York — London, 1956).
25. Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. — Ядерная физика, 1979, т.30, с.789.
26. Lipkin H.J. — Phys. Rev. Lett., 1992, v.69, p.3700.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 сентября 1997 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Ледницки Р., Любошиц В.В., Любошиц В.Л. Р2-97-290

Взаимодействие в конечном состоянии в многоканальных квантовых системах и парные корреляции нетождественных и тождественных частиц при малых относительных скоростях

В рамках модели источников исследуется влияние взаимодействия в конечном состоянии на корреляции пар тождественных и пар нетождественных частиц при малых относительных скоростях. Проведен учет как упругого рассеяния конечных частиц, так и бинарных реакций в конечном состоянии. В связи с этим проанализировано s-волновое многоканальное низкоэнергетическое рассеяние нейтральных и заряженных частиц. С использованием условия унитарности для амплитуд рассеяния получены интегральные соотношения для волновых функций относительного движения в двухчастичных квантовых системах с произвольным числом связанных каналов; при этом для заряженных частиц учтен вклад кулоновского взаимодействия. На основе развитого формализма получены приближенные аналитические формулы, выражающие парные корреляционные функции нейтральных и заряженных частиц через амплитуды рассеяния и их производные по импульсу. Рассмотрена матричная параметризация амплитуд многоканального s-волнового рассеяния для нейтральных и заряженных частиц, удовлетворяющая условию унитарности и обобщающая известное одноканальное приближение «эффективного радиуса». Обсуждаются возможности применения изотопических соотношений для длин и амплитуд рассеяния при описании парных корреляций типа $(\pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0)$, $(\pi^-p, \pi^0 n)$, $(K^+K^-, K^0_S K^0_S)$.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Lednicky R., Lyuboshitz V.L., Lyuboshitz V.V. P2-97-290

Final State Interaction in Multichannel Quantum Systems and Pair Correlations of Non-Identical and Identical Particles at Small Relative Velocities

The influence of final state interaction on the pair correlations of identical and non-identical particles at small relative velocities is investigated in the framework of the source model. Both the elastic scattering of final particles and binary reactions in the final state are taken into account. In connection with this, the low-energy s-wave multichannel scattering of neutral and charged particles has been analyzed. Using the unitarity condition for scattering amplitudes, the integral relations for wave functions of relative motion in two-particle quantum systems with an arbitrary number of bound channels have been derived; for charged particles the contribution of Coulomb interaction is involved. On the base of the developed formalism, the approximate analytical formulae have been obtained which express pair correlation functions of neutral and charged particles through scattering amplitudes and their momentum derivatives. The matrix parametrization of s-wave multichannel scattering amplitudes, satisfying the unitarity condition and generalizing the well-known one-channel «effective radius» approximation, has been considered. The possibilities of applying isotopic relations for scattering lengths and amplitudes to the description of pair correlations, like $(\pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0)$, $(\pi^-p, \pi^0 n)$, $(K^+K^-, K^0_S K^0_S)$, are discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1997