СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-97-27

Н.А.Черников

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

1997

"Силы всё производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы".
Н.И.Лобачевский. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных. 1835.

Благодаря почину академика А.М.Балдина и успешной работе Лаборатории высоких энергий в Дубне, где теперь получаются сверхбыстрые атомные ядра, нерелятивистская ядерная физика превратилась в новую науку и стала релятивистской.

Впрочем, желая сделать ядра релятивистскими, необязательно их ускорять, так как и покоящееся-то ядро является релятивистской системой (о чём свидетельствует экспериментально наблюдаемый дефект масс), но столкновения сверхбыстрых ядер позволяют проникнуть в их (ядерную) структуру, а для этого ускорять ядра необходимо.

1. *Расшифровка одной пары противоположных терминов*

Можно заметить, что употребление пары противоположных терминов "нерелятивистский – релятивистский" может приводить к путанице. Дело в том, что называть теорию нерелятивистской мы привыкли в том случае, когда она инвариантна относительно группы Галилея, а релятивистской – в том случае, когда она инвариантна относительно группы Лоренца. Но, насколько распространённа эта привычка, настолько же и нелепа. Ведь излишне напоминать, что слово relativity означает относительность, а между тем как в том, так и в другом случаях мы имеем дело как раз с относительностью, так что переход от нерелятивистского случая к релятивистскому означает всего лишь переход от старой формы теории относительности к новой. Так и возврат от релятивистского случая к нерелятивистскому означает отнюдь не отрицание относительности, а всего лишь возврат от новой формы теории относительности к старой.

В кругу этих вопросов путеводной звездой для меня являлась и теперь является геометрия Лобачевского. Я изучил её раньше, чем нам (тогда студентам, кстати сказать, единственного выпуска физтеха МГУ) стали преподавать курс теории относительности. Слушая этот курс, я вскоре стал замечать, что повторяю пройденное, и не ошибся в этом, хотя нам и не говорили, что теория относительности является одним из эпизодов в развитии геометрии Лобачевского.

Составив представление о пространстве скоростей, я убедился, что все постулаты Евклида, кроме пятого, в нём действительны и что нам остаётся (для пространства скоростей) принять или отвергнуть пятый постулат, после чего в первом случае пространство скоростей становится пространством Евклида, а во втором – пространством Лобачевского. В этом суть теории относительности, так как группа Галилея является группой изометрий пространства Евклида, а группа Лоренца является группой изометрий пространства Лобачевского.

Так как оказалось, что оба термина – "нерелятивистский" и "релятивистский" – приходится считать чисто условными, то мы должны либо вовсе отказаться от их употребления, либо, если будем их употреблять, то договориться, какой смысл им будем придавать. Итак, не отказываясь от употребления привычных терминов, условимся, что в "нерелятивистском" случае для пространства скоростей мы принимаем пятый постулат Евклида, а в "релятивистском" случае – отвергаем.

2. *Определение пространства скоростей*

Что до пространства скоростей, то это понятие является производным от понятия пространства-времени, представляемого в виде гладкого четырёхмерного многообразия и, в частности, в виде четырёхмерного же аффинного пространства.

Так можно было бы писать для теоретиков, знакомых с понятиями многообразия, аффинного пространства и т. п. Но я пишу здесь для экспериментаторов и прибегать к мало знакомым им понятиям не стану. Начнём с того, что со всякой инерциальной системой отсчёта можно связать время t и обычные декартовы координаты x, y, z в видимом нами мире. Уточним, однако, что можно связать, но не однозначно, а с точностью до параллелльных переносов

$$t \to t + \Delta t\,, \quad x \to x + \Delta x\,, \quad y \to y + \Delta y\,, \quad z \to z + \Delta z\,. \qquad (1)$$

Уточним также, что видимый мир мы считаем здесь евклидовым независимо от того, какой из двух случаев – нерелятивистский или релятивистский – мы рассматриваем.

Частице, покоящейся в исходной системе отсчёта, поставим в соответствие в пространстве скоростей некоторую точку o. Частице, движущейся по оси x или параллельно оси x, поставим в соответствие в пространстве скоростей прямую ось $o\,e_1$. Частице, движущейся по оси y или параллельно оси y, поставим в соответствие в пространстве скоростей прямую ось $o\,e_2$. Наконец, частице, движущейся по оси z или параллельно оси z, поставим в соответствие в пространстве скоростей прямую ось $o\,e_3$. Тем самым инерциальной системе отсчёта ставим в соответствие в пространстве скоростей репер $o\,e_1\,e_2\,e_3$. Заметим, что плоскости $o\,e_1\,e_2$, $o\,e_2\,e_3$ и $o\,e_3\,e_1$ этого репера взаимно перпендикулярны.

В пространстве-времени, то есть в четырёхмерном мире событий, четвёрка t, x, y, z является координатной картой. Значения этих чисел для данного события зависят от нашего выбора единиц длины и времени. В нерелятивистском случае выбор единицы длины объективно никак не связан с выбором единицы времени, и потому в этом случае мы не имеем абсолютной меры скорости. Вследствие этого в нерелятивистском случае в пространстве скоростей существуют подобные фигуры, и пространство скоростей наделяется геометрией Евклида. Напротив, в релятивистском случае мы имеем абсолютную меру скорости, равную скорости света c. В этом случае пространство скоростей наделяется геометрией Лобачевского с характерной константой, равной скорости света c, и можно так выбрать единицу длины и единицу времени, что выполнится условие c = 1.

В связи с этим вспомним, как преобразуется координатная карта t, x, y, z в мире событий при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой, тоже инерциальной, системе отсчета. Величины, относящиеся к новой системе, будем отмечать значком ^. Будем считать, что новая система движется относительно старой со скоростью V вдоль оси x, и напишем для нерелятивистского случая преобразование Галилея

$$\hat{t} = t, \quad \hat{x} = x - V\,t, \quad \hat{y} = y, \quad \hat{z} = z, \qquad (2)$$

а для релятивистского случая преобразование Лоренца

$$\hat{t} = \frac{t - V\,x\,/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad \hat{x} = \frac{x - V\,t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \quad \hat{y} = y\,, \quad \hat{z} = z\,, \qquad (3)$$

где, как и выше, c есть скорость света.

Хотя ни Лоренц, ни Эйнштейн, ни даже Пуанкаре в связи с преобразованием (3) и, вообще, в связи с созданием теории относительности о геометрии Лобачевского даже и не упоминали, для тех, кто знал геометрию Лобачевского, связь теории относительности с геометрией Лобачевского не могла оставаться тайной, и уже в ранних (а также и в более поздних) работах снова и снова замечалось, что в основе теории относительности лежит геометрия Лобачевского.

Вероятно, Пуанкаре не желал затемнять и без того трудную теорию ссылками на геометрию, хотя и полезную, но тоже трудную. С методической точки зрения такой приём можно оправдать, но, как говорится, шила в мешке не утаишь. По этому поводу интересно заметить, что при построении в 1882 году теории автоморфных функций Пуанкаре широко пользовался геометрией Лобачевского и даже построил модель геометрии Лобачевского, теперь называемую моделью Пуанкаре, но при изложении уже полученных им результатов он прибегал к другой терминологии. Он писал [1, с. 306] :

"Я не могу умолчать о связи предшествующих понятий с неевклидовой геометрией Лобачевского ."

Далее там же читаем:

"Если принять эти переименования, то теоремы Лобачевского верны, то есть к этим новым величинам прилагаются все теоремы обычной геометрии, за исключением тех, которые являются следствием постулата Евклида.

Эта терминология мне оказала большие услуги в моих изысканиях, но я, чтобы избегнуть всякой неясности, не буду ее здесь употреблять".

В свою очередь, об отношении Эйнштейна к геометрии Лобачевского можно судить по его статье [2]. В связи с этим особый интерес представляет известный факт сотрудничества [3] Эйнштейна с Марселем Гроссманом, опубликовавшим в 1904 году учебник [4] по неевклидовой геометрии.

Что до Лоренца, то об его отношении к геометрии Лобачевского мне ничего не известно.

А известно мне, что за добрую четверть века до создания теории относительности Фёдор Михайлович Достоевский поведал миру, что есть ум евклидовский, а есть ум и неевклидовский. Стоит внимательно послушать Ивана Карамазова [5, с. 294]:

"Если Бог есть и если Он действительно создал землю, то, как нам совершенно известно, создал Он её по евклидовой геометрии, а ум человеческий с понятием лишь о трёх измерениях пространства. Между тем находились и находятся даже и теперь геометры и философы, и даже из замечательнейших, которые сомневаются в том, чтобы вся вселенная или, еще обширнее – всё бытиё было создано лишь по евклидовой геометрии, осмеливаются даже мечтать, что две

параллельные линии, которые по Евклиду ни за что не могут сойтись на земле, может быть и сошлись бы где-нибудь в бесконечности. Я, голубчик, решил так, что если я даже этого не могу понять, то где ж мне про Бога понять. Я смиренно сознаюсь, что у меня нет никаких способностей разрешать такие вопросы, у меня ум евклидовский, земной, а потому, где нам решать о том, что не от мира сего... Пусть даже параллельные линии сойдутся и я это сам увижу: увижу и скажу, что сошлись, а все-таки не приму. Вот моя суть, Алёша, вот мой тезис."

Можно не сомневаться: эта речь привлекла к неевклидовой геометрии внимание многих читателей романа "Братья Карамазовы".

3. *Мировая траектория и годограф скорости*

Произвольное движение частицы задаётся некоторой зависимостью

$$x = x\,(t), \quad y = y\,(t), \quad z = z\,(t). \tag{4}$$

В четырехмерном мире событий эта зависимость изображается линией, называемой мировой траекторией частицы.

Производные

$$v_1 = x'\,(t), \quad v_2 = y'\,(t), \quad v_3 = z'\,(t) \tag{5}$$

функций (4) задают в пространстве скоростей линию, называемую годографом скорости частицы.

В случае, когда производные (5) не зависят от времени, годограф скорости частицы вырождается в точку.

Мировая траектория не зависит от выбора координат t, x, y, z, а годограф скорости не зависит от выбора репера $o\ e_1\ e_2\ e_3$.

4. *Быстрота*

Рассмотрим, как преобразуется скорость частицы при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой в случае, когда частица движется по оси x или параллельно оси x. Согласно (5) в этом случае $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ и $v_1 = v$, а также $\hat{v}_2 = 0$, $\hat{v}_3 = 0$ и $\hat{v}_1 = \hat{v}$, так что годограф скорости лежит на прямой $o\ e_1$. Дифференцируя (2), получаем

$$d\,\hat{t} = d\,t, \qquad d\,\hat{x} = d\,x - V\,d\,t, \tag{6}$$

а дифференцируя (3), получаем

$$d\,\hat{t} = \frac{d\,t - V\,d\,x\,/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ , \qquad d\,\hat{x} = \frac{d\,x - V\,d\,t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\ . \tag{7}$$

Отсюда находим

$$\hat{v} = v - V \tag{8}$$

в нерелятивистском случае и

$$\hat{v} = \frac{v - V}{1 - V\,v\,/c^2} \tag{9}$$

в релятивистском. Из равенства (9) получится разность

$$\hat{s} = s - S\ , \tag{10}$$

если подставить в него

$$\frac{\hat{v}}{c} = th\,\frac{\hat{s}}{c}\ , \quad \frac{v}{c} = th\,\frac{s}{c}\ , \quad \frac{V}{c} = th\,\frac{S}{c}\ . \tag{11}$$

Согласно (8) в нерелятивистском случае на прямой линии в пространстве скоростей роль длины играет скорость v. Согласно же (10) в релятивистском случае на прямой линии в пространстве скоростей роль длины играет не скорость v, а быстрота s, связанная со скоростью v подстановкой Бельтрами

$$\frac{v}{c} = th\,\frac{s}{c}\ . \tag{12}$$

В нерелятивистском случае быстрота s совпадает со скоростью v.

5. *Импульс и кинетическая энергия*

Пусть m масса покоя частицы, p – ее импульс и E – кинетическая энергия. Имеем

$$p = \frac{m\,v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ , \qquad E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m\,c^2\ . \tag{13}$$

С другой стороны, пусть L – длина окружности радиуса s на плоскости Лобачевского в пространстве скоростей, а Σ – площадь такого же круга. Имеем

$$L = 2\,\pi\,c\;sh\,\frac{s}{c}\ , \qquad \Sigma = 2\,\pi\,c^2\,(ch\,\frac{s}{c} - 1)\ . \tag{14}$$

Согласно (12), (13) и (14),

$$\frac{p}{m} = \frac{L}{2\,\pi}\ , \qquad \frac{E}{m} = \frac{\Sigma}{2\,\pi}\ . \tag{15}$$

Эти отношения верны и в нерелятивистской механике.

6. *Преобразование компонент скорости*

Рассмотрим в общем случае преобразование компонент скорости при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Дифференцируя (2), в нерелятивистском случае находим

$$\hat{v}_1 = v_1 - V\ , \quad \hat{v}_2 = v_2\ , \quad \hat{v}_3 = v_3\ . \tag{16}$$

Дифференцируя (3), в релятивистском случае находим

$$\hat{v}_1 = \frac{v_1 - V}{1 - V\,v_1/c^2}\ , \quad \hat{v}_2 = v_2\,\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V\,v_1/c^2}\ , \quad \hat{v}_3 = v_3\,\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V\,v_1/c^2}\ . \tag{17}$$

Этот вывод принадлежит Пуанкаре [6, 123]. См. также [7, 192].

7. *Формула Бельтрами*

Обозначая

$$\hat{v}^2 = \hat{v}_1^2 + \hat{v}_2^2 + \hat{v}_3^2\ , \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\ , \quad v_1 = v\cos\gamma\ , \tag{18}$$

из (16) выводим нерелятивистскую формулу

$$\hat{v}^2 = v^2 - 2\,v\,V\cos\gamma + V^2\ , \tag{19}$$

а из (17) выводим релятивистскую формулу

$$\frac{\hat{v}^2}{c^2} = \frac{c^2\,[v^2 - 2\,v\,V\,\cos\gamma + V^2] - (v\,V\,\sin\gamma)^2}{(c^2 - v\,V\,\cos\gamma)^2}\,. \qquad (20)$$

Нетрудно видеть, что формула (19) является первой формулой евклидовой тригонометрии для произвольного треугольника. Что до формулы (20), то она с помощью подстановок (11) приводится к виду

$$ch\,\frac{\hat{S}}{c} = ch\,\frac{s}{c}\;ch\,\frac{S}{c} - ch\,\frac{s}{c}\;ch\,\frac{S}{c}\,\cos\gamma\,, \qquad (21)$$

а это, в свою очередь, является первой формулой тригонометрии Лобачевского для произвольного треугольника (см. рисунок 1 в конце статьи).

Наоборот, с помощью подстановок (11) формула (21) приводится к виду (20). Впервые это показал Бельтрами в 1868 году [8, с. 212].

Формулу Бельтрами (20) можно истолковать иначе. Пусть в лабораторной системе отсчёта движутся две частицы со скоростями v и V, причём угол между скоростями равен γ. Относительная скорость частиц равна $\hat{v}$ и может быть вычислена по формуле (20) .

В частности, при v = V, $\gamma = \pi$ получаем решение задачи для ускорителя на встречных пучках. Пусть две частицы движутся навстречу друг к другу с одинаковыми скоростями, равными v. Чему равна их относительная скорость $\hat{v}$? Ответ:

$$\hat{v} = \frac{2\,v}{1 + v^2/\,c^2}\,. \qquad (22)$$

7. *О пользе тригонометрии Лобачевского*

Поначалу приходится преодолевать психологический барьер: зачем ещё надо изучать геометрию Лобачевского, когда можно и так всё подсчитать по известным формулам теории относительности. Однако изучение геометрии Лобачевского окупается сторицей: оно приводит к более глубокому проникновению в теорию относительности, наделяет теорию относительности сильными и зачастую неизвестными ей самой по себе методами, устанавливает тесную связь теории относительности с многовековой историей теории параллельных линий и т. п.

В результате изучения геометрии Лобачевского выяснилось, что законы сохранения импульса и энергии при столкновениях сверхбыстрых частиц эквиваленты паре архимедовых законов рычага, если рычаг

рассматривать в пространстве скоростей Лобачевского. Выяснилось, что в предельном случае, когда треугольник вырождается в рычаг Архимеда, формула Лобачевского для дефекта углов треугольника дает формулу Эйнштейна для дефекта массы. Выяснилось также, что формулы Лобачевского для длины окружности и площади круга в пространстве скоростей по сути дела являются формулами для импульса и кинетической энергии частицы. Выяснилось, наконец, что наряду с законами Архимеда для рычага достаточно знать тригонометрию Лобачевского, чтобы научиться с наименьшей затратой труда выполнять так называемый кинематический расчет всякой ядерной реакции.

В результате многолетней пропаганды этих знаний геометрия Лобачевского все чаще становится рабочим инструментом в руках физиков, изучающих микромир. См. об этом [9] и [10].

Стараясь дать экспериментаторам простейший способ расчета ядерных реакций, привожу здесь для справок все основные формулы тригонометрии Лобачевского – этого, так сказать, "костяка" геометрии. Характерную для геометрии Лобачевского константу, в данном случае являющуюся скоростью света, полагаю равной единице.

8. *Тригонометрические функции*

Тригонометрические функции можно определить через экспоненту

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Хорошо известно, что

$$e^{(x+y)} = e^x\,e^y\,, \qquad e^{i\pi} = -1\,, \qquad \frac{d\,e^x}{d\,x} = e^x\,.$$

Тригонометрические функции связаны с экспонентой следущим образом:

$e^{ix} = \cos x + i\,\sin x$	$e^a = ch\,a + sh\,a$
$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})\,/\,2\,i$	$sh\,a = (e^a - e^{-a})\,/\,2$
$\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})\,/\,2$	$ch\,a = (e^a + e^{-a})\,/\,2$
$tg\,x = \sin x\,/\,\cos x$	$th\,a = sh\,a\,/\,ch\,a$
$ctg\,x = \cos x\,/\,\sin x$	$cth\,a = ch\,a\,/\,sh\,a$

Отсюда выводим

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 , \qquad ch^2 a - sh^2 a = 1 .$$

$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x ,$$

$$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y .$$

$$sh (a + b) = sh\, a\, ch\, b + sh\, b\, ch\, a ,$$

$$ch (a + b) = ch\, a\, ch\, b + sh\, a\, sh\, b .$$

$$tg (x + y) = \frac{tg\, x + tg\, y}{1 - tg\, x\, tg\, y} , \qquad th (a + b) = \frac{th\, a + th\, b}{1 + th\, a\, th\, b} .$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} , \qquad sh^2 \frac{a}{2} = \frac{ch\, a - 1}{2} ,$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} , \qquad ch^2 \frac{a}{2} = \frac{ch\, a + 1}{2} .$$

$$tg \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} ,$$

$$th \frac{a}{2} = \frac{ch\, a - 1}{sh\, a} = \frac{sh\, a}{ch\, a + 1} .$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} ,$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} ,$$

$$\cos x - \cos y = - 2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2} ,$$

$$sh\, a + sh\, b = 2\, sh \frac{a + b}{2}\, ch \frac{a - b}{2} ,$$

$$ch\, a + ch\, b = 2\, ch \frac{a + b}{2}\, ch \frac{a - b}{2} ,$$

$$ch\, a - ch\, b = 2\, sh \frac{a + b}{2}\, sh \frac{a - b}{2} .$$

9. *Тригонометрия Лобачевского*

В произвольном треугольнике имеется шесть элементов: три угла X, Y, Z и три стороны x, y, z . Противоположные элементы составляют пары (x,X), (y,Y) и (z,Z) (см. рисунок 2 в конце статьи). В планиметрии Лобачевского (в отличие от планиметрии Евклида) любые три элемента треугольника можно выбрать в качестве независимых. Остальные три выражаются через них по тригонометрическим формулам.

Приведу без вывода следующие четыре уравнения для произвольного треугольника:

A) $ch\, z = ch\, x\, ch\, y - sh\, x\, sh\, y \cos Z$,
B) $sh\, y \sin X = sh\, x \sin Y$,
C) $ctg\, X \sin Z + ch\, y \cos Z = cth\, x\, sh\, y$,
D) $\cos Z + \cos X \cos Y = \sin X \sin Y\, ch\, z$.

Прямоугольный треугольник получаем, положив $Z = \frac{\pi}{2}$. Он имеет пять элементов X, Y, x, y, z.

Приведу без вывода следующие шесть уравнений для прямоугольного треугольника:

1) $ch\, z = ch\, x\, ch\, y$;
2) $sh\, x = sh\, z \sin X$;
3) $th\, x = sh\, y\, tg\, X$;
4) $th\, y = th\, z \cos X$;
5) $\cos X = ch\, x \sin Y$;
6) $ch\, z\, tg\, X\, th\, Y = 1$.

10. *Рассуждение о числе тригонометрических уравнений*

Хотя имеется, только три независимых уравнения, связывающих шесть элементов произвольного треугольника, удобно написать $c_6^4 = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$ уравнений вида $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, где x_1, x_2, x_3, x_4 – произвольно выбранная четверка элементов треугольника, чтобы по любым трем заданным элементам можно было сразу находить любой четвертый. Эти пятнадцать уравнений распадаются на следующие четыре группы:

А) $F_A (x, y, z, Z) = 0$, $F_A (y, z, x, X) = 0$, $F_A (z, x, y, Y) = 0$,

Б) $F_B (x, y, X, Y) = 0$, $F_B (x, z, X, Z) = 0$, $F_B (y, z, Y, Z) = 0$,

C) $F_C(x, y, X, Z) = 0$, $F_C(y, z, Y, X) = 0$, $F_C(z, x, Z, Y) = 0$,

$F_C(y, x, Y, Z) = 0$, $F_C(z, y, Z, X) = 0$, $F_C(x, z, X, Y) = 0$,

D) $F_D(X, Y, Z, z) = 0$, $F_D(Y, Z, X, x) = 0$, $F_D(Z, X, Y, y) = 0$.

В каждой группе функции, связывающие четыре элемента треугольника, одинаковы, что и отмечено должным образом. В группе A связываются три стороны и один угол. В группе B связываются две стороны и два противолежащих им угла. В группе C связываются две стороны и два угла, прилежащих к одной из этих сторон. Наконец, в группе D связываются три угла и одна сторона. Очевидно, из каждой группы достаточно выписать по одному уравнению, что и было сделано выше.

Рассмотрим прямоугольный треугольник, положив $Z = \frac{\pi}{2}$. Он имеет пять элементов X, Y, x, y, z. Как и в общем случае, три независимых уравнения связывают его элементы. Теперь нам надо написать $C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$ уравнений вида $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, где x_1, x_2, x_3 – произвольно выбранная тройка элементов рассматриваемого треугольника, чтобы по любым двум заданным элементам можно было сразу находить любой третий. Угол Z входит как раз в 10 из 15 написанных выше уравнений для произвольного треугольника. Положив в них $Z = \frac{\pi}{2}$, находим

1) $f_1(x, y, z) = F_A(x, y, z, \frac{\pi}{2}) = 0$;

2) $f_2(x, z, X) = F_B(x, z, X, \frac{\pi}{2}) = 0$, $f_2(y, z, Y) = 0$;

3) $f_3(x, y, X) = F_C(x, Y, X, \frac{\pi}{2}) = 0$, $f_3(y, x, Y) = 0$;

4) $f_4(x, z, Y) = F_C(z, x, \frac{\pi}{2}, Y) = 0$, $f_4(y, z, X) = 0$;

5) $f_5(X, Y, y) = F_D(\frac{\pi}{2}, X, Y, y) = 0$, $f_5(Y, X, x) = 0$;

6) $f_6(X, Y, z) = F_D(X, Y, \frac{\pi}{2}, z) = 0$.

В каждой паре 2), 3), 4), 5) функции, связывающие элементы прямоугольного треугольника, одинаковы. Очевидно, достаточно выписать по одному уравнению из каждой из шести групп, что и было сделано выше.

11. *Полный список тригонометрических уравнений*

И всё же нужен полный список тригонометрических уравнений. Приведу его в явном виде.

I. Формулы для произвольного треугольника

Формулы вида A.

$$ch\, z = ch\, x\, ch\, y - sh\, x\, sh\, y \cos Z$$
$$ch\, x = ch\, y\, ch\, z - sh\, y\, sh\, z \cos X$$
$$ch\, y = ch\, z\, ch\, x - sh\, z\, sh\, x \cos Y$$

Формулы вида B.

$$sh\, y \sin X = sh\, x \sin Y$$
$$sh\, z \sin X = sh\, x \sin Z$$
$$sh\, z \sin Y = sh\, y \sin Z$$

Формулы вида C.

$$ctg\, X \sin Z + ch\, y \cos Z = cth\, x\, sh\, y$$
$$ctg\, Y \sin X + ch\, z \cos X = cth\, y\, sh\, z$$
$$ctg\, Z \sin Y + ch\, x \cos Y = cth\, z\, sh\, x$$
$$ctg\, Y \sin Z + ch\, x \cos Z = cth\, y\, sh\, x$$
$$ctg\, Z \sin X + ch\, y \cos X = cth\, z\, sh\, y$$
$$ctg\, X \sin Y + ch\, z \cos Y = cth\, x\, sh\, z$$

Формулы вида D.

$$\cos Z + \cos X \cos Y = \sin X \sin Y\, ch\, z$$
$$\cos Z + \cos X \cos Y = \sin X \sin Y\, ch\, z$$
$$\cos Z + \cos X \cos Y = \sin X \sin Y\, ch\, z$$

II. Формулы для прямоугольного треугольника

а) $ch\, z = ch\, x\, ch\, y$

б) $sh\, x = sh\, z \sin X$

в) $th\, x = sh\, y\, tg\, X$

г) $th\, y = th\, z \cos X$

д) $\cos X = ch\, x \sin Y$

к) $sh\, y = sh\, z \sin Y$

и) $th\, y = sh\, x\, tg\, Y$

з) $th\, x = th\, z \cos Y$

ж) $\cos Y = ch\, y \sin X$

е) $ch\, z\, tg\, X\, th\, Y = 1$

Заметим, что Я. Бойяи записал формулы вида B следующим образом:

$$\frac{O(x)}{\sin X} = \frac{O(y)}{\sin Y} = \frac{O(z)}{\sin Z}, \qquad (23)$$

где O (x) – длина окружности радиуса x.

12. *Площадь треугольника*

В планиметрии Лобачевского площадь треугольника равна

$$F = (\pi - X - Y - Z)\ c^2, \qquad (24)$$

где c снова есть константа Лобачевского, равная скорости света.

Через его стороны она выражается следующим образом:

$$\sin \frac{F}{2\,c^2} = \frac{\sqrt{sh\,\frac{s}{c}\ sh\,\frac{s-x}{c}\ sh\,\frac{s-y}{c}\ sh\,\frac{s-z}{c}}}{ch\,\frac{x}{2\,c}\ ch\,\frac{y}{2\,c}\ ch\,\frac{z}{2\,c}}, \qquad (25)$$

где $2\,s = x + y + z$ – периметр треугольника.

13. *Площадь сферы*

В геометрии Лобачевского площадь сферы радиуса s равна площади круга радиуса 2 s. Действительно, площадь сферы равна

$$4\,\pi\,(\ c\ sh\,\frac{s}{c}\ )^2 = 2\,\pi\,c^2\,(ch\,\frac{2\,s}{c} - 1)\ . \qquad (26)$$

14. *Пара законов рычага Архимеда*

Так называемую кинематику ядерных реакций правильней называть механикой контактных столкновений частиц. В этой части механики координатами частиц в процессе столкновения не интересуются, и потому из пространственно-временных отношений , кроме пространства скоростей, остаётся лишь пара понятий "до" и "после" столкновения. Основной закон механики контактных столкновений – это закон сохранения 4-импульса. Он эквивалентен архимедовой паре законов рычага в пространстве скоростей Лобачевского.

Простейший вид контактного столкновения – это вполне неупругое столкновение двух частиц, или, иначе, самостоятельное соединение двух частиц в одну. В первую очередь возникает следующая задача.

Пусть две частицы, обозначим их через γ_1 и γ_2 , с заданными массами m_1 и m_2 и с мировыми скоростями, изображаемыми в пространстве скоростей Лобачевского точками a_1 и a_2 , соединились в одну частицу γ . Требуется определить массу m и мировую скорость a частицы γ .

Поменяв местами понятия "до" и "после", эту же задачу можно сформулировать иначе. Пусть частица γ распалась на две частицы γ_1 и γ_2 с массами m_1 и m_2 и с мировыми скоростями a_1 и a_2 . Требуется определить массу m и мировую скорость a частицы γ .

Решение этой задачи выражается парой законов рычага Архимеда.

Действительно. Во-первых, в системе отсчёта a , где покоится частица γ , импульсы частиц γ_1 и γ_2 равны по модулю и противоположны по направлению. Следовательно, искомая точка a лежит на отрезке $a_1\ a_2$ и делит его так, что длины L_1 и L_2 окружностей, проведённых выходящими из точки a радиусами $a\ a_1$ и $a\ a_2$, относятся друг к другу, как m_2 к m_1 . Это первый закон рычага Архимеда.

Во-вторых, в системе отсчёта a_1 , где покоится частица γ_1 , импульсы частиц γ и γ_2 одинаковы. Следовательно, длины L и L_1 окружностей, проведённых выходящими из точки a_1 радиусами $a_1\ a_2$ и $a_1\ a$, относятся друг к другу, как m к m_2. Это второй закон рычага Архимеда.

Первый закон Архимеда позволяет найти мировую скорость a . Второй закон Архимеда позволяет затем найти массу m .

Бесхитростный способ расчёта даёт [9, с. 799]:

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\ m_1\ m_2\ ch\,\frac{s}{c}\ , \qquad (27)$$

где s – расстояние между точками a_1 и a_2 , равное относительной быстроте частиц γ_1 и γ_2 .

15. *Дефект массы и дефект углов треугольника*

Законы рычага Архимеда можно записать в виде следующей цепочки равенств:

$$\frac{O\ (x)}{m_1} = \frac{O\ (y)}{m_2} = \frac{O\ (z)}{m}\ , \qquad (28)$$

где x , y и z равны радиусам $a\ a_2$, $a\ a_1$ и $a_1\ a_2$. Слегка надломив рычаг $a_1\ a_2$ в точке a , получим почти вырожденный треугольник $a_1\ a\ a_2$, для которого, как и для всякого треугольника, верна формула (23). Но в треугольнике $a_1\ a\ a_2$ углы X и Y малы, а угол Z близок π. Следовательно, имеем приблизительно $\sin X = X$, $\sin Y = Y$, $\sin Z = \pi - Z$. Отсюда и из (23) и (28) получаем $X = \lambda\,m_1$, $Y = \lambda\,m_2$, $\pi - Z = \lambda\,m$, где λ – малый параметр. Из (24) получаем, что площадь треугольника, образованного слегка надломленным рычагом Архимеда, равна $F = \lambda\,(m - m_1 - m_2)\,c^2$, то есть пропорциональна энергии $\Delta E = (m - m_1 - m_2)\,c^2$, выделяющейся при распаде частицы γ на две частицы γ_1 и γ_2. Применяя к этому треугольнику формулу $\cos Z + \cos X \quad \cos Y = \sin X \sin Y \operatorname{ch} z$ и учитывая, что приближенно $\cos X = 1 - \frac{1}{2} X^2$, $\cos X = 1 - \frac{1}{2} X^2$, $\cos Z = -1 + \frac{1}{2}(\pi - Z)^2$, отсюда получаем выражение (27) для m^2. В евклидовом треугольнике нет дефекта углов, так как $X + Y + Z = \pi$, соответственно, нет и дефекта масс в нерелятивистской механике.

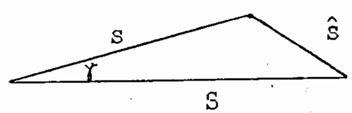

Рисунок 1

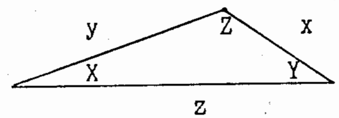

Рисунок 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Анри Пуанкаре. Теория фуксовых групп. В кн: Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М.: Гостехиздат, 1956, с. 305.

2. А. Эйнштейн. Неевклидова геометрия и физика. В кн. Эйнштейн и развитие физико-математической мысли. Сборник статей. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1962, с. 5.

3. А.Эйнштейн, М.Гроссман. Проект обобщенной теории относительности и теории гравитации. В кн: Собрание научных трудов Эйнштейна, т. 1, М.: Наука, 1965, с.227.

4. Marcel Grossmann. Die fundamentalen Konstruktionen der nichteukludischen Geometrie. Beilage zum Programm der Thurgauischen Kantonsschule für das Schuljahr 1903/04. Druck von Huber & Co. in Frauenfeld. 1904.

5. Ф.М. Достоевский. Братья Карамазовы. Собрание сочинений. М.: ГИХЛ. 1958, т. 9.

6. А.Пуанкаре. О динамике электрона. В кн.: Принцип относительности. Сборник работ по специальной теории теории относительности. М. : Атомиздат. 1973, с. 118.

7. Г.А. Лоренц. Две статьи Анри Пуанкаре о математической физике. В кн.: [6], с. 189.

8. Э. Бельтрами. Опыт интерпретации неевклидовой геометрии. В кн.: [1], с 180.

9. Н.А.Черников - ЭЧАЯ, 1973, т. 4, вып.3, с. 773.

10. Н.А.Черников - ЭЧАЯ, 1992, т.23, вып.5, с.1155.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 января 1997 года.

Черников Н.А. Р2-97-27

Геометрия Лобачевского
и релятивистская ядерная физика

На основе геометрии Лобачевского развиваются необходимые для релятивистской ядерной физики представления о пространстве, времени и быстроте частиц. В связи с проблемой истинности или ложности пятого постулата Евклида раскрывается истинный смысл пары противоположных терминов «нерелятивистский» — «релятивистский». Закон сохранения 4-импульса частиц представляется в виде архимедовых законов рычага в пространстве скоростей. Излагается тригонометрия Лобачевского. Показано, как известный из тригонометрии Лобачевского дефект углов треугольника приводит к релятивистскому дефекту масс.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Перевод автора

Chernikov N.A. P2-97-27

Lobachevsky Geometry
and Relativistic Nuclear Physics

In this paper with the help of Lobachevsky geometry the necessary for relativistic nuclear physics notions of space, time and rapidity of particles are developed. In connection with the problem about truthfulness or falseness of the Euclidean fifth postulate the sense of the pair of opposite terms «nonrelativistic» — «relativistic» is revealed. The conservation law of particles 4-momentum law is represented in the form of Archimedean lever laws in velocity space. An account is given of the Lobachevsky trigonometry. It is shown how the well-known angle defect of a triangle leads to the relativistic mass defect.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1997