СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-97-175

О.С.Космачев*

ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

*E-mail: kos@thsun1.jinr.dubna.su

1997

1. Введение

Широкое приложение конечных групп в физике началось с описания симметрий кристаллических решеток и других структур конденсированных состояний. В более позднее время конечные группы нашли применение в информатике в связи с расчетами пропускной способности линий связи, в задачах кодирования и криптографии.

Помимо такого рода прямого использования конечных групп имеется еще одна сторона их возможных приложений. Будучи частными проявлениями непрерывных групп, они могут нести информацию о них в той или иной мере полную и использоваться для изучения непрерывных.

Примером такой связи конечных и непрерывных групп может служить известная методика классификации неприводимых представлений группы $U(N)$ с помощью симметрических групп S_n [1]. Не исключено также, что при выполнении определенных условий, конечные группы выполняют роль структур, вложенных в непрерывные, которые в полной мере характеризуют и определяют объемлющие их непрерывные группы. Так же как инфинитезимальные операторы определяют соответствующую им группу Ли.

2. Группа кватернионов

Везде ниже мы будем иметь дело с алгебрами, образующие элементы которых являются конечными группами. Они называются групповыми кольцами [2]. Группа кватернионов получается из хорошо известной алгебры кватернионов путем добавки к ее элементам тех же элементов с обратными знаками [3]. Таблица умножения группы может быть задана определяющими соотношениями [4].

$$a_2 a_1 a_2^{-1} = a_1^{-1} = a_1^3, \qquad a_1 a_2 = a_3, \qquad a_1^2 = a_2^2 = a_3^2. \tag{1}$$

Группа имеет порядок 8, ранг 2, содержит три циклические подгруппы четвертого порядка с генераторами a_1, a_2, a_3. Все три подгруппы обладают кроме единицы e одним общим элементом $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2$, который вместе с e образует центр группы.

Построим следующее алгебраическое выражение:

$$C_4[a_1] = [e + a_1 + a_1^2 + a_1^3] \tag{2}$$

Аналогичные выражения можно записать для подгрупп с другими генераторами a_2, a_3.

Если генератор a_1 дополнить множителем $exp(2\pi i k_1/4)$, где $k_1 = 1, 2, 3, 4$, то мы получим 4 выражения

$$C_4[k_1 a_1] = [e + exp(2\pi i k_1/4)a_1 + (exp(2\pi i k_1/4)a_1)^2 + (exp(2\pi i k_1/4)a_1)^3], \tag{3}$$

со свойствами

$$\begin{aligned} (C_4[k_1a_1])^2 &= 4C_4[k_1a_1], & (4)\\ C_4[k_1a_1]C_4[k_1'a_1] &= 4\delta_{k_1k_1'}C_4[k_1a_1], & (5)\\ a_1C_4[k_1a_1] &= exp(2\pi i(4-k_1)/4)C_4[k_1a_1]. & (6) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что выражения $C_4[k_1a_1]$ реализуют неприводимые представления в данном случае циклической группы четвертого порядка. Группа абелева, все представления одномерные.

Будем называть циклической структурой (ЦС) некоторой конечной группы [6] сумму всех ее элементов, записанную в виде произведения ее циклических подгрупп. Это произведение должно включать в себя, как минимум, циклические подгруппы, содержащие генераторы группы. Очевидно, такая алгебраическая конструкция является одномерным единичным представлением, записанным в мультипликативной форме.

Группа кватернионов имеет ранг два, значит все ее элементы выражаются через два генератора. Как отмечалось выше, они порождают циклические подгруппы четвертого порядка. Обозначим

$$Q_2[a_1, a_2] = 1/2C_4[a_1]C_4[a_2]. \tag{7}$$

Учитывая, что $a_1^2 = a_2^2$ и $C_4[a_2] = [e + a_2][e + a_2^2]$, можно записать ЦС группы кватернионов в виде

$$Q_2[a_1, a_2] = C_4[a_1][e + a_2] = [e + a_1 + a_1^2 + a_1^3][e + a_2]. \tag{8}$$

Если раскрыть скобки, то выражение содержит все 8 элементов группы и ничего сверх того.

Далее, как в случае C_4, дополним каждый из генераторов множителями, т.е. значениями примитивных корней четвертой степени из единицы $exp(2\pi i k_{1,2}/4)$, где k_1, k_2 пробегают независимо значения $1, 2, 3, 4$.

Тогда с учетом $a_1^2 = a_2^2$ из 16 возможных выражений получаем 8 неравных нулю.

$$\begin{aligned}
&1.\quad Q_2[k_1 = 4, k_2 = 4] = [e + a_1 + a_1^2 + a_1^3][e + a_2], \qquad (9)\\
&2.\quad Q_2[k_1 = 4, k_2 = 2] = [e + a_1 + a_1^2 + a_1^3][e - a_2],\\
&3.\quad Q_2[k_1 = 2, k_2 = 4] = [e - a_1 + a_1^2 - a_1^3][e + a_2],\\
&4.\quad Q_2[k_1 = 2, k_2 = 2] = [e - a_1 + a_1^2 - a_1^3][e + a_2],\\
&5.\quad Q_2[k_1 = 1, k_2 = 1] = [e + ia_1 - a_1^2 - ia_1^3][e + ia_2],\\
&6.\quad Q_2[k_1 = 3, k_2 = 1] = [e - ia_1 - a_1^2 + ia_1^3][e + ia_2],\\
&7.\quad Q_2[k_1 = 1, k_2 = 3] = [e + ia_1 - a_1^2 - ia_1^3][e - ia_2],\\
&8.\quad Q_2[k_1 = 3, k_2 = 3] = [e - ia_1 - a_1^2 + ia_1^3][e - ia_2].
\end{aligned}$$

Видно, что k_1, k_2 для каждого выражения принимают одновременно либо четные, либо нечетные значения. Кроме того, из структуры C_4 для четных k_1, k_2 следует, что при умножении первых четырех равенств на любой из генераторов, они не изменяются, но приобретают множитель ± 1. Т.е. первая четверка равенств доставляет 4 одномерных неэквивалентных представления. Далее, умножая справа выражения 5. и 6. на генераторы a_1, a_2, мы замыкаемся в рамках только этих двух. То же самое можно сказать о равенствах 7. и 8. Другими словами, мы имеем два двумерных представления. В матричной записи они имеют вид

$$\mathbf{R(a_1)} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{R(a_2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R}'(\mathbf{a_1}) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{R}'(\mathbf{a_2}) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, это 2 эквивалентных двумерных представления, т.к. $\mathbf{R(a_1)} = \mathbf{R}'(\mathbf{a_1})$ и $\mathbf{R}'(\mathbf{a_2}) = \mathbf{R(a_1)R(a_2)R^{-1}(a_1)}$.

Утверждение теоремы Бернсайда о том, что сумма квадратов размерностей неэквивалентных неприводимых представлений (НП) равна порядку группы, в данном случае выполняется: $8 = 4 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2$.

Если, кроме того, отметить, что число эквивалентных НП равно их размерности, то можно говорить, что равенства 1. – 8. являются своеобразным операторным аналогом регулярного представления. Также, как в случае регулярного представления число нетождественных представлений равно порядку группы и каждое НП повторяется в нем такое число раз, какова размерность этого представления. Своеобразие заключается в том, что в данном случае все НП фактически разделяются. Выражения, относящиеся к неэквивалентным представлениям ортогональны, а эквивалентные разделяются автоматически при действии генераторов. Поэтому в пространстве представления "таблица умножения" для элементов 1. – 8. имеет квадратно-диагональный вид. При этом эквивалентные представления образуют единый квадрат.

Следует отметить также сходство предлагаемой методики с хорошо разработанной техникой вычисления НП симметрических групп [6]. Аналогичных универсальных и удобных для практических приложений рецептов для произвольных конечных групп не имеется.

Во-первых, обращает на себя внимание тот факт, что такие групповые характеристики, как НП, вычисляются с помощью чисто алгебраических конструкций. Таковыми являются таблицы Юнга в одном случае и циклические структуры в другом.

Во-вторых, все НП формируются из одномерных НП подгрупп, вложенных в группу. Это очевидно как из таблиц Юнга, так и из ЦС. Действительно, каждая симметрическая группа имеет два одномерных представления - это единичное и знакопеременное. Им соответствуют строки и столбцы различных схем. В такой же мере очевидным является факт формирования НП из одномерных НП циклических подгрупп. Это обстоятельство может оказаться заслуживающим внимания по той причине, что с каждым НП можно связать некоторый инвариант. Если все НП группы есть некоторая комбинация одномерных НП подгрупп, то естественно задаться вопросом: нельзя ли с такой структурной позиции подойти к вопросу формирования инвариантов всей группы в целом как конечных, так и непрерывных?

Давайте построим алгебру на элементах НП группы, полагая, что правило умножения образующих элементов алгебры вытекает из закона композиции элементов группы. В таком случае можно вычислить коммутаторы

$$\begin{aligned}
[\mathbf{R}(\mathbf{a}_1), \mathbf{R}(\mathbf{a}_2)] &= 2\mathbf{R}(\mathbf{a}_3), \\
[\mathbf{R}(\mathbf{a}_2), \mathbf{R}(\mathbf{a}_3)] &= 2\mathbf{R}(\mathbf{a}_1), \\
[\mathbf{R}(\mathbf{a}_3), \mathbf{R}(\mathbf{a}_1)] &= 2\mathbf{R}(\mathbf{a}_2),
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{a}_3) = \mathbf{R}(\mathbf{a}_1)\mathbf{R}(\mathbf{a}_2)$. С точностью до одного и того же нормировочного множителя полученные коммутаторы совпадают с коммутаторами инфинитезимальных операторов группы трехмерных вращений [7].

Отсюда следует вывод. Если ограничиться действительными значениями трех параметров, то алгебра кватернионов эквивалентна алгебре инфинитезимальных операторов группы трехмерных вращений. Если же перейти в область комплексных значений параметров, то можно получить другую группу. В частности, при определенном выборе комплексных коэффициентов можно получить алгебру, все генераторы которой являются нильпотентами, за исключением единичного элемента.

3. Группа Лоренца

Если к рассмотренной группе кватернионов добавить еще один генератор c, исходя из определяющих соотношений

$$ca_1c^{-1} = a_1, \qquad c^2 = a_1^2, \qquad ca_2c^{-1} = a_2, \tag{11}$$

то такое расширение образует группу со следующей циклической структурой:

$$d_\gamma = Q_2[a_1, a_2][e + c] = C_4[a_1][e + a_2][e + c]. \tag{12}$$

Из определяющих соотношений следует, что группа d_γ имеет центр, состоящий из четырех элементов (e, a_1^2, c, ca_1^2), порядок группы равен 16, число сопряженных классов - 10.

Повторяя процедуру построения одномерных НП для каждого из сомножителей, когда k_1, k_2, k_3 принимают значения $1, 2, 3, 4$ независимо для каждого из них, мы находим, что не равняются 0 только те 16 выражений, где все k одновременно либо четные, либо нечетные:

$$d_\gamma[k_1, a_1; k_2, a_2; k_3, c] = C_4[r_1a_1][e + r_2a_2][e + r_3c], \tag{13}$$

где $r_1 = exp(2\pi ik_1/4)$, $r_2 = exp(2\pi ik_2/4)$, $r_3 = exp(2\pi ik_3/4)$. Как и ранее, при четных k_1, k_2, k_3 мы имеем одномерные представления. В данном случае их будет 8.

Из определяющих соотношений для a_1, a_2, c следует, что при умножении слева любого из равенств с нечетными значениями k_1, k_2, k_3 на каждый из трех генераторов происходит замыкание только на два равенства. Введем для краткости обозначения

$d_\gamma[k_1 = 1, a_1; k_2 = 1, a_2; k_3 = 1, c] \equiv d_\gamma[1, 1, 1]$
и
$d_\gamma[k_1 = 3, a_1; k_2 = 1, a_2; k_3 = 1, c] \equiv d_\gamma[3, 1, 1]$.
Тогда, начиная с первого из них, получаем

$$a_1 d_\gamma[1,1,1] = -id_\gamma[1,1,1], \quad a_1 d_\gamma[3,1,1] = id_\gamma[3,1,1],$$

$$a_2 d_\gamma[1,1,1] = -id_\gamma[3,1,1], \quad a_2 d_\gamma[3,1,1] = -id_\gamma[1,1,1],$$

$$c d_\gamma[1,1,1] = -id_\gamma[1,1,1], \quad c d_\gamma[3,1,1] = -id_\gamma[3,1,1].$$

В матричной форме это соответствует равенствам

$$\mathbf{R}(\mathbf{a}_1) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}(\mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Если начать с выражения $d_\gamma[k_1 = 1, a_1; k_2 = 1, a_2; k_3 = 3, c]$, то получается другой набор матриц

$$\mathbf{R}'(\mathbf{a}_1) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}'(\mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}'(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Очевидно, что эти два представления неэквивалентны. Все остальные случаи эквивалентны одному из этих двух. Таким образом, мы имеем регулярное представление и утверждение теоремы Бернсайда в виде

$$16 = 8 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2. \tag{16}$$

Как и ранее, произведение любых двух выражений из 16 равняется нулю, если они принадлежат различным неэквивалентным представлениям.

Вычисление остальных элементов неприводимого представления дает

$$\mathbf{R}(\mathbf{a}_3) = \mathbf{R}(\mathbf{a}_1)\mathbf{R}(\mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{R}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{R}(\mathbf{a}_1)\mathbf{R}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{b}_2) = \mathbf{R}(\mathbf{a}_2)\mathbf{R}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{R}(\mathbf{b}_3) = \mathbf{R}(\mathbf{a}_3)\mathbf{R}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, считая эти выражения образующими элементами алгебры, находим такие коммутаторы

$$\begin{array}{lll} [a_1, a_2] = 2a_3, & [a_2, a_3] = 2a_1, & [a_3, a_1] = 2a_2, \\ [b_1, b_2] = -2a_3, & [b_2, b_3] = -2a_1, & [b_3, b_1] = -2a_2, \\ [a_1 b_1] = 0, & [a_2, b_2] = 0, & [a_3, b_3] = 0, \\ [a_1, b_2] = 2b_3 & [a_1, b_3] = -2b_2, & \\ [a_2, b_3] = 2b_1, & [a_2, b_1] = -2b_3, & \\ [a_3, b_1] = 2b_2, & [a_3, b_2] = -2b_1. & \end{array} \tag{17}$$

Если отвлечься от общего для всех соотношений нормировочного множителя 2, то полученные коммутационные соотношения полностью совпадают с коммутаторами инфинитезимальных матриц собственного преобразования Лоренца [7]. Такие преобразования имеют 6 операторов. Здесь их имеется 7. Седьмой оператор c в данной схеме переводит операторы трехмерных вращений (a_1, a_2, a_3) в операторы преобразований Лоренца вдоль осей координат (b_1, b_2, b_3) и сводится, фактически, к умножению на мнимую единицу.

4. Группа γ-матриц Дирака

Известно, что 16 γ-матриц Дирака, дополненные теми же матрицами с противоположными знаками, образуют группу D_γ порядка 32 [8]. Можно заметить также, что те из них, которые удовлетворяют условию $\gamma_\mu^2 = -I$, разбиваются на ассоциации по 6 элементов, которые если дополнить их $\pm I$, образуют подгруппы, изоморфные группе кватернионов.

В случае выбора γ-матриц, удовлетворяющих одному из возможных определений

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = -2g_{\mu\nu} I, \qquad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \tag{18}$$

где $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, мы получаем 12 γ-матриц, квадрат которых равен минус единице.

Можно убедиться [9], что при таком определении $\gamma_1\gamma_2 \sim a_1$ и $\gamma_1\gamma_3 \sim a_2$ порождают группу кватернионов, и ЦС ее имеет вид

$$Q_2[a_1, a_2] = C_4[a_1][e + a_2] \tag{19}$$

с определяющими соотношениями

$$a_2 a_1 a_2^{-1} = a_1^{-1}; \qquad a_1 a_2 a_1^{-1} = a_2^{-1}. \tag{20}$$

Точно так же образуют подгруппу кватернионов с аналогичными определяющими соотношениями $\gamma_0 \sim a_3$, $\gamma_5 \sim a_4$, и можно записать

$$Q_2[a_3, a_4] = C_4[a_3][e + a_4]. \tag{21}$$

При этом помимо отмеченных определяющих соотношений, выполняются такие

$$a_3 a_1 a_3^{-1} = a_1, \qquad a_4 a_1 a_4^{-1} = a_1, \tag{22}$$

$$a_3 a_2 a_3^{-1} = a_2, \qquad a_4 a_2 a_4^{-1} = a_2. \tag{23}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что произведение ЦС двух упомянутых групп образуют ЦС группы γ-матриц Дирака

$$\begin{aligned} D_\gamma[a_1, a_2, a_3, a_4] &= 1/2 Q_2[a_1, a_2] Q_2[a_3, a_4] = \\ &= C_4[a_1][e + a_2][e + a_3][e + a_4]. \end{aligned} \tag{24}$$

Согласно определению d_γ и определяющим соотношениям между a_1, a_2 и a_3, a_4 очевидно, что первые три сомножителя в левой части последнего равенства изоморфны d_γ, а сама она является максимальной и инвариантной подгруппой.

Из свойств γ-матриц следует, что все они распределяются по 17 сопряженным классам. Два элемента образуют отдельные классы - это e и $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = a_4^2$. Остальные 30 распределены по 15 классам, каждый из которых содержит по 2 взаимно обратных элемента. Поэтому группа имеет 17 неприводимых представлений.

Далее, повторяя сказанное в двух предыдущих случаях, мы получим 32 равенства

$$D_\gamma[r_1 a_1, r_2 a_2, r_3 a_3, r_4 a_4] = C_4[r_1 a_1][e + r_2 a_2][e + r_3 a_3][e + r_4 a_4], \tag{25}$$

где $r_1, r_2, r_3, r_4 = exp(2\pi i k/4)$. Если $k = 1, 2, 3, 4$ изменяется независимо для каждого из четырех сомножителей, то неравными нулю получаются только те выражения, где все k либо только четные, либо только нечетные.

В случае четных k получается 16 одномерных НП. Для нечетных - получается 4 эквивалентных четырехмерных НП, что согласуется с теоремой Бернсайда: $32 = 16 \cdot 1^2 + 1 \cdot 4^2$.

Все возможные коммутационные соотношения для подгруппы первых трех генераторов совпадают с теми, которые приведены выше для d_γ. Те коммутационные соотношения, которые возникают сверх них за счет генератора a_4, характеризуют 15-параметрическую группу симметрий уравнения Дирака. Что касается 16 одномерных представлений, то все они являются инвариантами подгрупп, вложенных в D_γ, и связаны с 16 компонентами хорошо известных элементов алгебры γ-матриц (S, V, T, A, P - скаляр, вектор и т.д.). Таким образом, предлагаемый подход дает возможность находить инварианты подгрупп и формировать из них инварианты расширенных подгрупп или всей группы. Изложенное делает очевидным также, что уравнение Дирака является не только алгебраическим, но и инфинитезимальным в свей основе. Кроме того, как следует из раздела 3, вопрос о так называемой кватернионной аналитичности [10], [11] может быть связан только с переходом от группы трехмерных вращений к группе Лоренца.

В заключение мне приятно выразить признательность директору ЛТФ им. Н.Н.Боголюбова Д.В.Ширкову за большую поддержку и инициирование данной работы, а также сотрудникам ЛТФ В.Б.Приезжеву и А.А.Владимирову за весьма полезные предварительные обсуждения излагаемых вопросов.

Литература

[1] Эллиот Д., Добер П.- Симметрии в физике. М. Мир, 1983, т.2, с.246.

[2] Чеботарев Н.Г.- Введение в теорию алгебр. М.Л. ГТТИЛ, 1947, с.15.

[3] Березин А.В., Курочкин Ю.А., Толкачев Е.А.- Кватернионы в релятивистской физике. Минск. Наука и техника, 1989, с.32.

[4] Кэртис Ч., Райнер И.- Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М. Наука, 1969, с.35.

[5] Kosmachev O.S.-In: Proc. of Int. Workshop on "Quantum Systems: New Trends and Methods", Minsk, May 23-29, 1994 (World Scientific), p.333.

[6] Джад Б., Вайборн Б.- Теория сложных атомных спектров. М. Мир, 1973, с.89.

[7] Наймарк М.А.- Линейные представления группы Лоренца. М. ФМ, 1958, с.37, там же с.88.

[8] Lomont J.S.-Applications of finite groups. New York, London. Academic Press, 1959, p.41.

[9] Космачев О.С.- Препринт ИФВЭ, 95-07, Алматы, 1995.

[10] Evans M., Gürsey F., Ogievetsky V.- Phys. Rev. D, v.47, (1993), p.3497.

[11] De Leo S., Rotelli P.-Int.J.Mod.Phys. A, v.10, (1995), p.4359.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 июня 1997 года.