СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-97-134

Д.В.Парамонов*, Н.Н.Черникова*, Н.С.Шавохина

ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА — ФОКА — ИВАНЕНКО В МИРЕ ЛОБАЧЕВСКОГО К СПЕЦИАЛЬНОМУ ВИДУ

*Московский государственный университет

1997

Теория спинорного поля в общем случае четырёхмерного риманова мира изложена в обзоре [1]. Если в мире выбраны какие-либо ортогональные координаты ξ, η, ζ, τ и, следовательно, его метрика $d\,s^2$ записана в виде

$$d\,s^2 = h_1^2\, d\,\xi^2 + h_2^2\, d\,\eta^2 + h_3^2\, d\,\zeta^2 - h_0^2\, d\,\tau^2\,, \tag{1}$$

то в базисе Ламе

$$f^0 = h_0\, d\,\tau, \quad f^1 = h_1\, d\,\xi, \quad f^2 = h_2\, d\,\eta, \quad f^3 = h_3\, d\,\zeta \tag{2}$$

уравнение Дирака-Фока-Иваненко для спинорного поля ψ записывается в следующем виде (см. [1, с. 1481]):

$$\sum_{\mu=0}^{3} \frac{H^\mu}{\sqrt{h\, h_\mu}}\, \frac{\partial}{\partial\, \xi^\mu} \left[\sqrt{\frac{h}{h_\mu}}\,\psi\right] = \frac{imc}{\hbar}\, K\,\psi\,, \tag{3}$$

где $h = h_0\, h_1\, h_2\, h_3$; $\xi^0 = \tau$, $\xi^1 = \xi$, $\xi^2 = \eta$, $\xi^3 = \zeta$; H^μ и K – матрицы

$$H^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad H^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad H^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$H^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad K = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Эти матрицы выбраны в соответствии с книгой [2, с. 195] Э.Картана, кто "является творцом общей теории спиноров, основы которой он опубликовал в 1913 г. в своем классическом исследовании по теории представлений простых групп [3]." (Цитировано по предисловию к русскому переводу книги [2], написанному казанским геометром П.Широковым, рекомендовавшим книгу [2] не только начинающим математикам, но и физикам-теоретикам, желающим углубить свои знания в области теории спиноров).

Частным случаем риманова мира является мир Лобачевского с метрикой

$$d\, s^2 = d\, l^2 - c^2\, d\, t^2\,, \tag{5}$$

Здесь $d\, l^2$– метрика Лобачевского, c – скорость света, t – время. Например, в сферических координатах

$$d\, l^2 = d\, \rho^2 + r^2\, d\, \theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\, \varphi^2\,, \tag{6}$$

где

$$r = k\, sh\, \frac{\rho}{k}\,, \tag{7}$$

k – константа Лобачевского. Выбирая базис Ламе

$$f^0 = c\, d\, t,\quad f^1 = d\, \rho,\quad f^2 = r\, d\, \theta,\quad f^3 = r \sin\theta\, d\, \varphi, \tag{8}$$

запишем уравнение Дирака-Фока-Иваненко для спинорного поля ψ в в пространстве Лобачевского в следующем виде:

$$\frac{H^0}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{H^1}{r}\frac{\partial}{\partial\rho}(r\psi) + \frac{H^2}{r\sqrt{\sin\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sqrt{\sin\theta}\,\psi) + \frac{H^3}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{imc}{\hbar}K\psi\,. \tag{9}$$

Приведём это уравнение к специальному виду, подобному тому, который установил Дирак в 1935 году [4]. В работе [5] на примере сферического мира де Ситтера разработана процедура такого приведения. Она сводится к переходу от базиса f к базису dx.

Следуя этой процедуре, положим

$$\begin{aligned} x &= R\, sh\, \frac{\rho}{k} \sin\theta \cos\varphi\,, & z &= R\, sh\, \frac{\rho}{k} \cos\theta\,, \\ y &= R\, sh\, \frac{\rho}{k} \sin\theta \sin\varphi\,, & u &= R\, ch\, \frac{\rho}{k}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Так как

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2 = \left(\frac{R}{k}\right)^2 dl^2 - dR^2\,, \tag{11}$$

то в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве с декартовыми координатами

$$x^1 = x,\quad x^2 = y,\quad x^3 = z,\quad x^4 = u \tag{12}$$

внутренняя геометрия трёхмерной поверхности, задаваемой уравнениями (10) при $R = k$, совпадает с геометрией Лобачевского.

Наряду с дифференциальными формами (8) введём форму $f^4 = d\, R$. Согласно (11) на поверхности $R = k$

$$\eta_{ab}\, d\, x^a\, d\, x^b = \eta_{ab}\, f^a\, f^b\,. \tag{13}$$

Здесь по индексам a и b подразумевается суммирование от 1 до 4. Числа η_{ab} равны 0, если $a \neq b$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{44} = -1$. Они составляют метрический тензор четырёхмерного псевдоевклидова пространства в базисе dx. Ввиду равенства (13) переход от базиса f к базису dx достигается преобразованием Лоренца вида

$$f^a = L^a_b\, d\, x^b.$$

Дифференцируя функции (10), мы можем конструктивно получить обратное преобразование

$$d\, x^a = \tilde{L}^a_b\, f^b.$$

Взаимообратные матрицы L и $\tilde{L}$ связаны условием ортогональности

$$\eta_{as}\, \tilde{L}^s_b = \eta_{bs}\, L^s_a\,. \tag{14}$$

Далее удобно ввести матрицы

$$H_1 = H^1,\quad H_2 = H^2,\quad H_3 = H^3,\quad H_4 = -\,i\, K\,,\quad H^4 = i\, K\,. \tag{15}$$

Они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$H_a = \eta_{ab} H^b\,, \tag{16}$$

$$H_a\, H_b + H_b\, H_a = 2\, \eta_{ab}\,. \tag{17}$$

К тому же,

$$H_a\, H^0 + H^0\, H_a = 0,\quad H^0\, H^0 = -\,1. \tag{18}$$

Можно подобрать такую матрицу S, что будут выполняться равенства

$$S\, H^a\, S^{-1} = L^a_b\, H^b , \qquad S^{-1}\, H^a\, S = \tilde{L}^a_b\, H^b ,$$
$$S^{-1}\, H_a\, S = L^b_a\, H_b , \qquad S\, H_a\, S^{-1} = \tilde{L}^b_a\, H_b . \tag{19}$$

Если обозначить

$$dX = H_a\, d\, x^a , \qquad F = H_a\, f^a , \tag{20}$$

то получится, что

$$dX = S\, F\, S^{-1}, \qquad F = S^{-1}\, dX\, S. \tag{21}$$

Спинор ψ при переходе от базиса f к базису dx преобразуется подстановкой

$$\Xi = S\, \psi , \tag{22}$$

так что

$$dX\, \Xi = S\, F\, \psi . \tag{23}$$

Дифференцируя (10), получаем преобразование $d\, x^a = \tilde{L}^a_b\, f^b$:

$$\begin{aligned}
d\, x &= ch\frac{\rho}{k}\ sin\theta\ cos\varphi\ f^1 + cos\theta\ cos\varphi\ f^2 - sin\varphi\ f^3 + \frac{x}{k}\ f^4 ,\\
d\, y &= ch\frac{\rho}{k}\ sin\theta\ sin\varphi\ f^1 + cos\theta\ sin\varphi\ f^2 + cos\varphi\ f^3 + \frac{y}{k}\ f^4 ,\\
d\, z &= ch\frac{\rho}{k}\ cos\theta\ f^1 - sin\theta\ f^2 + \frac{z}{k}\ f^4 ,\\
d\, u &= sh\frac{\rho}{k}\ f^1 + \frac{u}{k}\ f^4 .
\end{aligned} \tag{24}$$

Отсюда находим

$$k\ \tilde{L}^a_4 = x^a , \tag{25}$$

а значит, в соответствии с последней из формул (19), получаем

$$k\, S\, H_4\, S^{-1} = X , \tag{26}$$

где

$$X = H_a\, x^a , \tag{27}$$

то есть, в развёрнутом виде,

$$S(-iK)S^{-1} = sh\frac{\rho}{k}\,[sin\theta(H^1 cos\,\varphi + H^2 sin\varphi) + H^3 cos\theta] - iKch\frac{\rho}{k} . \tag{28}$$

В данном случае матрица

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{L}^1_1 & \tilde{L}^1_2 & \tilde{L}^1_3 & \tilde{L}^1_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{L}^4_1 & \tilde{L}^4_2 & \tilde{L}^4_3 & \tilde{L}^4_4 \end{bmatrix} \tag{29}$$

разлагается в произведение $\tilde{L} = \tilde{L}_1\, \tilde{L}_2\, \tilde{L}_3\, \tilde{L}_4$ четырёх матриц

$$\tilde{L}_1 = \begin{bmatrix} cos\,\varphi & -sin\,\varphi & 0 & 0 \\ sin\,\varphi & cos\,\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{L}_2 = \begin{bmatrix} cos\,\theta & 0 & sin\,\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\,\theta & 0 & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{L}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ch\,\rho/k & sh\,\rho/k \\ 0 & 0 & sh\,\rho/k & ch\,\rho/k \end{bmatrix}, \quad \tilde{L}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Соответственно и матрицы S и S^{-1} разлагаются в произведения

$$S = S_1\, S_2\, S_3\, S_4 , \qquad S^{-1} = S_4^{-1}\, S_3^{-1}\, S_2^{-1}\, S_1^{-1} , \tag{31}$$

где

$$\begin{aligned}
S_1 &= cos\frac{\varphi}{2} + H_2\, H_1\, sin\frac{\varphi}{2} , & S_1^{-1} &= cos\frac{\varphi}{2} + H_1\, H_2\, sin\frac{\varphi}{2} ,\\
S_2 &= cos\frac{\theta}{2} + H_1\, H_3\, sin\frac{\theta}{2} , & S_2^{-1} &= cos\frac{\theta}{2} + H_3\, H_1\, sin\frac{\theta}{2} ,\\
S_3 &= ch\frac{\rho}{2k} + H_4\, H_3\, sh\frac{\rho}{2k} , & S_3^{-1} &= ch\frac{\rho}{2k} + H_3\, H_4\, sh\frac{\rho}{2k} ,\\
S_4 &= \frac{1}{2}\,(H_1 - H_3)\,(H_2 - H_3) , & S_4^{-1} &= \frac{1}{2}\,(H_2 - H_3)\,(H_1 - H_3) .
\end{aligned} \tag{32}$$

Составляем следующую таблицу:

$$
\begin{array}{l|l}
S_1^{-1}\, H^1\, S_1 = H^1 \cos\varphi - H^2 \sin\varphi\,, & S_2^{-1}\, H^1\, S_2 = H^1 \cos\theta + H^3 \sin\theta\,, \\
S_1^{-1}\, H^2\, S_1 = H^1 \sin\varphi + H^2 \cos\varphi\,, & S_2^{-1}\, H^2\, S_2 = H^2\,, \\
S_1^{-1}\, H^3\, S_1 = H^3\,, & S_2^{-1}\, H^3\, S_2 = - H^1 \sin\theta + H^3 \cos\theta, \\
S_1^{-1}\, H^4\, S_1 = H^4\,. & S_2^{-1}\, H^4\, S_2 = H^4\,. \\
\hline
S_3^{-1}\, H^1\, S_3 = H^1\,, & S_4^{-1}\, H^1\, S_4 = H^2\,, \\
S_3^{-1}\, H^2\, S_3 = H^2\,, & S_4^{-1}\, H^2\, S_4 = H^3\,, \\
S_3^{-1}\, H^3\, S_3 = H^3\, ch\frac{\rho}{k} + H^4\, sh\frac{\rho}{k}\,, & S_4^{-1}\, H^3\, S_4 = H^1\,, \\
S_3^{-1}\, H^4\, S_3 = H^3\, sh\frac{\rho}{k} + H^4\, ch\frac{\rho}{k}\,. & S_4^{-1}\, H^4\, S_4 = H^4\,.
\end{array}
\qquad (33)
$$

С помощью этой таблицы находим следующее представление преобразования (24):

$$
\begin{aligned}
S^{-1} H^1 S &= ch\frac{\rho}{k}\, \sin\theta \cos\varphi\, H^1 + \cos\theta \cos\varphi\, H^2 - \sin\varphi\, H^3 + \frac{x}{k} H^4, \\
S^{-1} H^2 S &= ch\frac{\rho}{k}\, \sin\theta \sin\varphi\, H^1 + \cos\theta \sin\varphi\, H^2 + \cos\varphi\, H^3 + \frac{y}{k} H^4, \\
S^{-1} H^3 S &= ch\frac{\rho}{k}\, \cos\theta\, H^1 - \sin\theta\, H^2 + \frac{z}{k} H^4, \\
S^{-1} H^4 S &= sh\frac{\rho}{k}\, H^1 + \frac{u}{k} H^4.
\end{aligned}
\qquad (34)
$$

Умножив последние равенства слева на S и справа на S^{-1}, из получающейся в результате этого системы линейных уравнений найдём

$$
\begin{aligned}
S H^1 S^{-1} &= [(H^1 \cos\varphi + H^2 \sin\varphi) \sin\theta + H^3 \cos\theta]\, ch\frac{\rho}{k} - H^4\, sh\frac{\rho}{k}\,, \\
S H^2 S^{-1} &= (H^1 \cos\varphi + H^2 \sin\varphi) \cos\theta - H^3 \sin\theta, \\
S H^3 S^{-1} &= - H^1 \sin\varphi + H^2 \cos\varphi, \\
S H^4 S^{-1} &= - \frac{X}{k}\,.
\end{aligned}
\qquad (35)
$$

Теперь введём следующие три оператора – три векторных поля в пространстве Лобачевского:

$$
e_1 = \frac{\partial}{\partial\rho}\,, \qquad e_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\,, \qquad e_3 = \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,. \qquad (36)
$$

С помощью таблицы (33) нетрудно доказать, что

$$
\begin{aligned}
S^{-1} e_1 S &= e_1 + \frac{1}{2k} H_1 H^4\,, \\
S^{-1} e_2 S &= e_2 + \frac{1}{2k} H_2 H^4 + \frac{1}{2k} H_2 H^1\, cth\frac{\rho}{k}\,, \\
S^{-1} e_3 S &= e_3 + \frac{1}{2k} H_3 H^4 + \frac{1}{2k} H_3 H^1\, cth\frac{\rho}{k} + \frac{ctg\theta}{2r} H_3 H^2\,,
\end{aligned}
\qquad (37)
$$

а значит,

$$
\sum_{\nu=1}^{3} H^\nu S^{-1} e_\nu S = \sum_{\nu=1}^{3} H^\nu e_\nu + \frac{H^1}{r}\frac{dr}{d\rho} + \frac{H^2}{r\sqrt{\sin\theta}}\frac{d\sqrt{\sin\theta}}{d\theta} + \frac{3H^4}{2k}\,. \qquad (38)
$$

Умножая это равенство справа на ψ и учитывая подстановку (22), получаем

$$
\frac{H^1}{r}\frac{\partial(r\psi)}{\partial\rho} + \frac{H^2}{r\sqrt{\sin\theta}}\frac{\partial(\sqrt{\sin\theta}\,\psi)}{\partial\theta} + \frac{H^3}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \sum_{\nu=1}^{3} H^\nu S^{-1} e_\nu \Xi + \frac{3}{2k} H_4 S^{-1} \Xi\,. \qquad (39)
$$

Подставляя это равенство в уравнение ДФИ (9), полученный результат умножая слева на $k\,S$, и затем учитывая (26), преобразуем (9) к виду

$$
H^0 \frac{k}{c}\frac{\partial\Xi}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{3} k\, S H^\nu S^{-1} e_\nu \Xi + \left(\mathfrak{M} + \frac{3}{2}\right) \frac{X}{k}\, \Xi = 0\,, \qquad (40)
$$

где

$$
\mathfrak{M} = \frac{mck}{\hbar}\,. \qquad (41)
$$

Чтобы подсчитать входящую в (40) сумму $\sum$, наряду с векторными полями (36) введём векторные поля $\partial/\partial x^a$, взятые при $R = k$, и поле

$$
e_4 = \partial/\partial R = k^{-1} x^b\, \partial/\partial x^b\,. \qquad (42)
$$

Так как $L^a_b\, e_a = \partial/\partial x^b$ и $k\, S H^4 S^{-1} = - x_a H^a$ (см.(35)), то

$$\sum_{\nu=1}^{3} k\, S\, H^{\nu}\, S^{-1}\, e_{\nu} = k\, S\, H^{a}\, S^{-1}\, e_{a} - k\, S\, H^{4}\, S^{-1}\, e_{4} = H^{a}\, m_{a}\ , \tag{43}$$

где

$$m_1 = k\ \partial/\partial x + x\ \partial/\partial R, \quad m_2 = k\ \partial/\partial y + y\ \partial/\partial R, \quad m_3 = k\ \partial/\partial z + z\ \partial/\partial R,$$

$$m_4 = k\ \partial/\partial u - u\ \partial/\partial R \tag{44}$$

суть генераторы конформных преобразований (иначе - конформные поля Киллинга) пространства Лобачевского. В результате преобразуем уравнение (40) к следующему специальному виду:

$$H^{0}\, \frac{k}{c}\, \frac{\partial \Xi}{\partial t} + H^{a}\, m_{a}\, \Xi + \left(\mathfrak{M} + \frac{3}{2}\right) \frac{X}{k}\ \Xi = 0\ . \tag{45}$$

К этому добавим, что согласно (35) в сферических координатах

$$m_1 = ch\ \frac{\rho}{k}\ \sin\theta\ \cos\varphi\ k\ e_1 + \cos\theta\ \cos\varphi\ k\ e_2 - \sin\varphi\ k\ e_3\ ,$$

$$m_2 = ch\ \frac{\rho}{k}\ \sin\theta\ \sin\varphi\ k\ e_1 + \cos\theta\ \sin\varphi\ k\ e_2 + \cos\varphi\ k\ e_3\ , \tag{46}$$

$$m_3 = ch\ \frac{\rho}{k}\ \cos\theta\ k\ e_1 - \sin\theta\ k\ e_2\ , \qquad m_4 = -\ sh\ \frac{\rho}{k}\ k\ e_1\ .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шавохина Н.С. - ЭЧАЯ, 1996, т. 27, вып. 5 , с. 1472.
2. Картан Э. - Теория спиноров. (Перевод с французского под редакцией профессора П.А.Широкова). М.: ИЛ, 1947.
3. Cartan E. - Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. Bull. Soc. Math. de France, 41, 1913, c. 53-96.
4. Dirac P.A.M. - Ann. of Mathematics, 1935, vol. 36, No. 3, p. 657.
5. Шавохина Н.С. - ТМФ, 1972, т. 10, № 3, с. 412.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 апреля 1997 года.

Парамонов Д.В., Черникова Н.Н., Шавохина Н.С.

Р2-97-134

Приведение уравнения Дирака — Фока — Иваненко в мире Лобачевского к специальному виду

Пространство Лобачевского рассматривается как полость гиперболоида в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. Приведение уравнения Дирака — Фока — Иваненко к специальному виду сводится к переходу от базиса Ламе в пространстве Лобачевского к декартову базису объемлющего псевдоевклидова пространства.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Перевод авторов

Paramonov D.V., Chernikova N.N., Shavokhina N.S.

P2-97-134

The Reduction of the Dirac — Fock — Ivanenko Equation to a Special Form in the Lobachevsky Space-Time

The Lobachevsky space is considered as a hyperboloid's sheet in the four-dimensional pseudo-Euclidean space. The Dirac — Fock — Ivanenko equation is reduced to a special form by passing from Lamé basis in the Lobachevsky space to the Cartesian basis of the enveloping pseudo-Euclidean space.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1997