СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-97-110

Р.М.Ямалеев*

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

*E-mail: yamal@lcta.jinr.dubna.su

1997

Введение

В [1] был предложен новый способ расширения уравнений движения классической механики, а именно уравнений Ньютона, на n -мерное фазовое пространство. Эти уравнения были названы эллиптически деформированными уравнениями движения (ЭДУ). Ранее Намбу [2] предложил обобщение формализма Гамильтона на n -мерное фазовое пространство. ЭДУ соотносятся с формализмом Намбу так же, как уравнения Ньютона соотносятся с формализмом Гамильтона. Как известно, уравнения Гамильтона еще не являются уравнениями движения как таковыми, а лишь дают некий рецепт для их получения. Такое же призвание имеет и формализм Намбу. Отличие состоит в том, что если для реализации Гамильтонова формализма достаточно задания одной функции Гамильтона, то для реализации формализма Намбу необходимо задать $n-1$ - функции Гамильтона—Намбу, где n—размерность фазового пространства. Среди множества возможных функций одна функция Гамильтона, задаваемая в форме $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$, имеет принципиальное значение, ибо в этом случае уравнения Гамильтона принимают вид уравнений Ньютона. Основная идея работы [1] состоит в том, что именно система функций Гамильтона—Намбу, задаваемая в виде

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad N = \frac{q_k^2}{2\mu_k} + V(x), k = 1, \dots, n-2,$$

позволяет строить механику, аналогичную механике Ньютона. В результате получим систему уравнений движения в n—мерном фазовом пространстве , которая имеет вполне определенное соответствие с классическими уравнениями Ньютона. Эту механику мы называем эллиптической исходя из того, что решение, описывающее стационарное движение в потенциале с монотонно растущими краями, выражается через двоякопериодические функции. В частности, решения ЭДУ в потенциале осциллятора даются эллиптическими функциями Якоби.

Оказывается, эллиптическая механика позволяет по-новому взглянуть на целый ряд физических явлений [3]. В настоящей работе мы даем новую интерпретацию связи между релятивистским и нерелятивистским динамическими уравнениями, реализовывая первое как результат эллиптической деформации последнего. При этом появляется весьма интересная возможность интерпретировать релятивистские уравнения как результат специального объединения двух нерелятивистских частиц

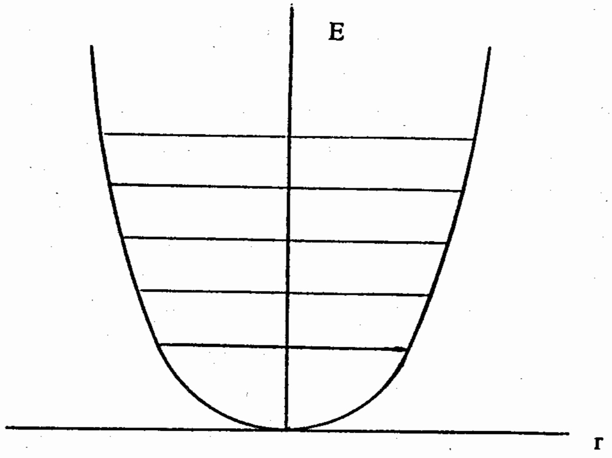

Рис.1

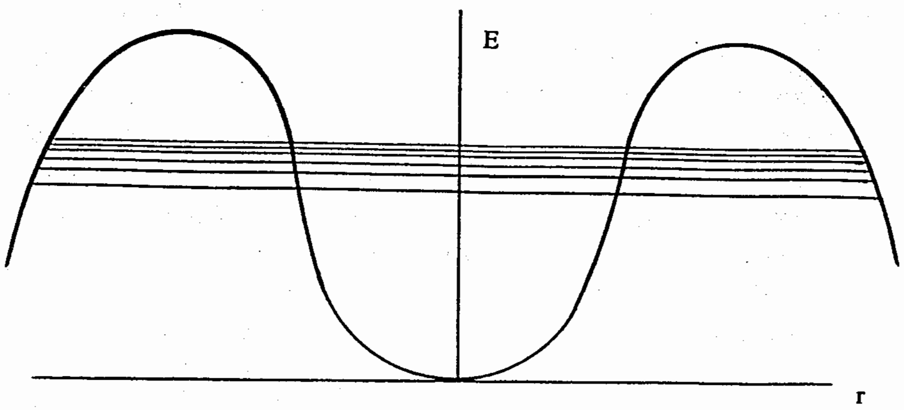

Рис.2

в одно целое. Интерпретация релятивистского соотношения между энергией—импульсом—массой через ЭДУ обнаруживает, в частности, что релятивистское движение описывается двоякопериодическими функциями. Это означает, что периодическое движение в релятивистской механике имеет, кроме реальной части, еще мнимую часть. Появление мнимой части обусловлено тем, что эффективный потенциал открывается (см. рис. 2), при этом мнимая часть периода соответствует периодическому движению под барьером.

В данной работе мы развиваем квазиклассическое квантование ЭДУ, используя условия квазиклассического квантования Бора—Зоммерфельда. Как известно, условия Бора—Зоммерфельда предполагают существование двух точек поворота. Однако в рассматриваемом случае мы имеем дело с четырьмя точками поворота. Действительно, если потенциал имеет форму запирающего потенциала (рис. 1), то эффективный потенциал имеет вид, приведенный на рис.2. В этом случае движение описывается двоякопериодическими функциями, а адиабатический инвариант $\oint pdx$ является комплекснозначной функцией. Это положение соответствует тому, что квантованию подлежат две константы движения, соответствующие двум функциям Гамильтона—Намбу. В результате уровни энергии оказываются расщепленными на бесконечное число подуровней, сгущающихся к основному уровню. Это явление естественно интерпретировать как уширение уровней энергии при деформировании края запирающего потенциала с образованием барьера конечного размера.

В релятивистском случае это приводит к важному выводу.

В рамках релятивистской динамики построение потенциального конфайнмента невозможно, ибо любой потенциал с бесконечно растущими краями эффективно оказывается открытым, что дает конечную вероятность туннелирования связанных в данном потенциале частиц.

§1. Эллиптическая деформация уравнений движения классической механики

Метод эллиптической деформации ставит в соответствие уравнениям Ньютона

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dV(x)}{dx}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \tag{1.1}$$

в двумерном фазовом пространстве $\{x,p\}$ с заданным потенциалом $V = V(x)$ систему уравнений в трехмерном фазовом пространстве с тем же потенциалом:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dV(x)}{dx}\frac{q}{\mu}, \tag{1.2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}\frac{q}{\mu}, \tag{1.3}$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{dV(x)}{dx}\frac{p}{m}. \tag{1.4}$$

Эту систему мы будем называть эллиптически деформированными уравнениями. Как видно, ЭДУ содержат универсальный параметр μ размерности энергии. Заметим, что величины p,m и q,μ входят в уравнения движения симметричным образом. Поскольку мы рассматриваем случай стационарного движения, то из уравнений (1.2) – (1.4) получим два интеграла движения

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \qquad N = \frac{q^2}{2\mu} + V(x). \tag{1.5}$$

Можно показать, что для ЭДУ роль Гамильтонова формализма выполняет формализм Намбу. При этом функции $H = H(p,x)$ и $N = N(q,x)$ совпадают с парой гамильтоновых функций в уравнениях Намбу. Напомним, уравнения Намбу в трехмерном фазовом пространстве имеют вид [2]

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dH}{dq}\frac{dN}{dx} - \frac{dH}{dx}\frac{dN}{dq},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dp}\frac{dN}{dq} - \frac{dH}{dq}\frac{dN}{dp},$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dH}{dx}\frac{dN}{dp} - \frac{dH}{dp}\frac{dN}{dx}.$$

В результате деформации в уравнениях движения появились новые динамические переменные—это $\{N,q,\mu\}$. В силу симметрии между $\{H,p,m\}$ и $\{N,q,\mu\}$ мы можем рассматривать (1.2) – (1.4) как систему уравнений для своеобразно взаимодействующих частиц, где $\{N,q,\mu\}$— энергия, импульс и масса одной из частиц.

Имея два интеграла движения H,N, мы можем преобразовать (1.3) к виду

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{\sqrt{m\mu}}\sqrt{(H-V)(N-V)},$$

откуда получим следующий интеграл:

$$t - t_0 = \frac{\sqrt{m\mu}}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{(H-V(x))(N-V(x))}}. \tag{1.6}$$

В потенциале осциллятора

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

интеграл (1.6) сводится к эллиптическому интегралу. После соответствующих переобозначений получим

$$\omega(eff)(t-t_0) = \int_{x_0}^{x}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}. \tag{1.7}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\omega(eff) = \omega\sqrt{\frac{2N}{\mu}}, \quad y = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2H}}x, \quad k^2 = \frac{H}{N}. \tag{1.8}$$

Интеграл (1.7) содержит зависимость $x = x(t)$ в неявном виде. В случае осциллятора зависимость фазовых координат от времени выражается через эллиптические функции Якоби

$$x = \sqrt{\frac{2H}{m\omega^2}}\, sn(\omega(eff)(t-t_0),k),$$
$$p = \sqrt{2Hm}\, cn(\omega(eff)(t-t_0),k), \tag{1.9}$$
$$q = \sqrt{2N\mu}\, dn(\omega(eff)(t-t_0),k).$$

Как известно [4], в пределе $k \to 0$ функции Якоби переходят в тригонометрические функции

$sn(\phi,0) = sin(\phi), cn(\phi,0) = cos(\phi), dn(\phi,0) = 1.$

Следовательно решения (1.8) переходят в решения (1.1) в осцилляторном потенциале при $k = 0$ и $2N = \mu$. Однако, чтобы решения (1.8) переходили в решения (1.1) необходимо , чтобы равенства $k = 0$ и $2N = \mu$ выполнялись одновременно. Ниже мы покажем, что это действительно имеет место при $\mu \to \infty$.

Поскольку мы рассматриваем физическую систему, необходимо определить такие обычные для механики понятия, как сила, работа силы и энергия системы. Эта программа выполнима, если фазовая координата x и в деформированных уравнениях будет иметь смысл пространственной координаты частицы. Тогда $\frac{dx}{dt}$— есть скорость частицы, а $\frac{d^2x}{dt^2}$ —ускорение. Это дает нам возможность определить силу и работу по обычным формулам

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F, \quad A = \int_a^b F dx. \tag{1.10}$$

Имея эти определения из классической механики и применяя их к уравнениям движения (1.2-1.4), можно получить выражения как для кинетической, так и для потенциальной частей энергии для данной системы. Вычислим интеграл $m\int_a^b \frac{d^2x}{dt^2}dx$, применяя сначала (1.3). Получим

$$m\int_a^b \frac{d^2x}{dt^2}dx = \frac{1}{\mu}\int_a^b \frac{d(pq)}{dt}dx = E_{kin}(x=b) - E_{kin}(x=a), \tag{1.11}$$

где под E_{kin} имеется в виду следующее выражение для кинетической энергии:

$$E_{kin} = \frac{p^2q^2}{2m\mu^2}.$$

Чтобы найти потенциальную часть энергии, вычислим тот же интеграл, используя (1.2), (1.4). Получим

$$\frac{1}{\mu}\int_a^b (q\frac{dp}{dt} + p\frac{dq}{dt})dx = -\frac{1}{\mu}\int_a^b \frac{\partial V}{\partial x}(\frac{p^2}{m} + \frac{q^2}{\mu})dx = -\frac{1}{\mu}\int_a^b \frac{\partial V}{\partial x}(2(N+H) - 4V)dx =$$

$$2\frac{1}{\mu}((N+H)(V(b) - V(a)) - (V^2(b) - V^2(a))) = E_{pot}(x=b) - E_{pot}(x=a). \tag{1.12}$$

Отсюда находим выражение для потенциальной части энергии

$$E_{pot} = \frac{2}{\mu}((N+H)V(x) - V^2(x)),$$

где H, N— константы движения. Полная энергия есть сумма

$$E_{total} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{2}{\mu}\{\frac{p^2q^2}{2m2\mu} + ((N+H)V(x) - V^2(x))\} =$$

$$\frac{2}{\mu}\{\frac{p^2q^2}{2m2\mu} + V(\frac{p^2}{2m} + \frac{q^2}{2\mu}) + V^2\} =$$

$$\frac{2}{\mu}(\frac{p^2}{2m} + V)(\frac{q^2}{2\mu} + V) = \frac{2}{\mu}HN. \tag{1.13}$$

Полученные соотношения помогают установить соответствие с уравнениями Ньютона. Действительно, если принять величину $\pi = \frac{1}{\mu}pq$ за импульс, то (1.3) выражает

обычную связь импульса со скоростью движения, а объединение уравнений (1.2) и (1.4) дает

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial x},$$

причем $W = E_{pot}$. Более того, согласно (1.11) – (1.12) изменение полной энергии оказывается связанным с изменением импульса соотношением

$$v d\pi = dE. \tag{1.14}$$

Таким образом из решений ЭДУ с потенциалом $V = V(x)$ мы получим такие же траектории движения, что и из уравнения Ньютона с потенциалом

$$W = \frac{2}{\mu}\{(N+H)V(x) - V^2(x)\}. \tag{1.15}$$

Другими словами, уравнения Ньютона с потенциалом

$$W = \alpha V(x) - \lambda V^2(x) \tag{1.16}$$

на решениях идентичны с ЭДУ с потенциалом $V(x)$. Сравнение (1.15) и (1.16) приводит к следующей системе уравнений для определения N, H через параметр потенциала α и энергию E:

$$\frac{2}{\mu}(N+H) = \alpha, \quad \frac{2}{\mu}NH = E. \tag{1.17}$$

Согласно теореме Безу N и H удовлетворяют уравнению

$$x^2 - \frac{\mu\alpha}{2}x + \frac{E\mu}{2} = 0,$$

которое имеет два решения

$$N = \frac{\mu\alpha}{4}(1 + \sqrt{1 - \frac{8E}{\mu\alpha^2}}), \quad H = \frac{\mu\alpha}{4}(1 - \sqrt{1 - \frac{8E}{\mu\alpha^2}}). \tag{1.18}$$

Используя эти формулы, получим асимптотические поведения N и H при $\mu \to \infty$

$$\lim_{\mu\to\infty} H = E, \quad \lim_{\mu\to\infty} \frac{q}{\mu} = 1.$$

Также нетрудно видеть, что в этом случае $k^2 = \frac{H}{N} = 0$.

Следовательно, в асимптотической области q может быть представлено в виде ряда Лорана

$$q = \mu + Q + \frac{Q_1}{\mu} + \cdots.$$

Если подставить этот ряд в (1.2) – (1.4) и сохранить только члены, не содержащие μ, то уравнения (1.2), (1.3) перейдут в уравнения Ньютона, а уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{dV(x)}{dx}\frac{p}{m},$$

что совпадает с уравнением для кинетической энергии. Таким образом, в результате предельного перехода, уравнение на третью фазовую переменную приобрело вполне конкретный смысл как уравнение, описывающее изменение во времени кинетической энергии движения. Согласно ЭДУ при достаточно больших значениях энергии в масштабе μ форма движения становится более сложной, нежели это предсказывается механикой Ньютона. Новая динамика движения может быть интерпретирована , с одной стороны, как движение в трехмерном фазовом пространстве, с другой — как влияние движения частицы на форму потенциала. Влияние на форму потенциала таково, что любой потенциал с бесконечными краями эффективно оказывается раскрытым, что следует из (1.16). Таким образом, частица, движущаяся по законам ЭДУ в потенциале $V = V(x)$ (см. рис.1), эффективно движется в потенциале вида (см. рис.2)

$$W = \frac{2}{\mu}\{(N+H)V(x) - V^2(x)\}.$$

Как известно, частица, движущаяся в потенциале с запирающими краями согласно уравнениям Ньютона, совершает периодическое движение. Соответственно решение дается периодической функцией $x(t) = x(t+T)$. Стационарное движение частицы в том же потенциале по законам ЭДУ описывается двоякопериодической функцией $x(t) = x(t + T_0 + iT_1)$, где T_0, T_1 определяются формулами

$$T_0 = \sqrt{m\mu}\int_{x_2}^{x_3}\frac{dx}{\sqrt{(H-V(x))(N-V(x))}}, \tag{1.19}$$

$$T_1 = \sqrt{m\mu}\int_{x_3}^{x_4}\frac{dx}{\sqrt{(H-V(x))(N-V(x))}}, \tag{1.20}$$

где x_2, x_3 являются решениями $H - V(x) = 0$, а x_1, x_4 — решениями уравнения $N - V(x) = 0$. В потенциале осциллятора формулы для периода принимают вид

$$T_0 = \frac{2}{\omega(eff)}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2}} = \frac{4}{\omega(eff)}K(k), \tag{1.21}$$

$$T_1 = \frac{4}{\omega(eff)}\int_{1}^{1/k}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2}} = \frac{4}{\omega(eff)}K'(k). \tag{1.22}$$

§2. Релятивистская динамика как результат эллиптической деформации уравнений движения классической механики

Рассмотрим систему из двух независимых частиц с фазовыми координатами p_1, x_1 p_2, x_2 и массами m_1, m_2, стационарно движущиеся каждая в своей потенциальной яме $U_i = U_i(x_i), i = 1, 2$, подчиняясь уравнениям Ньютона

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial U_i(x_i)}{\partial x_i}, \frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{m_i}. \tag{2.1}$$

Поскольку движение стационарно, то имеем два интеграла движения, соответствующие полной энергии каждой из них:

$$H_i = \frac{p_i^2}{2m_i} + U_i(x_i). \tag{2.2}$$

Эти соотношения выражают нерелятивистскую связь между энергией и импульсом. Наложим связь на координаты x_1, x_2, такую, что отныне они являются функциями одной переменной $x_1 = x_1(x), x_2 = x_2(x)$. Данная связь предполагает существование дифференцируемой функции $x = x(x_1, x_2)$. Далее мы предполагаем, что x зависит от t неявно через функции $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$. При этом главное условие связи состоит в том, чтобы были выполнены следующие соотношения:

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{dx_2}{2cdt}, \frac{\partial x}{\partial x_2} = \frac{dx_1}{2cdt}. \tag{2.3}$$

Тогда производная x по времени, скорость объединенной частицы, дается выражением

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt}. \tag{2.4}$$

С учетом (2.1),(2.3) получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{c}\frac{p_1}{m_1}\frac{p_2}{m_2}. \tag{2.5}$$

Теперь мы имеем достаточно формул для того, чтобы уравнения (2.1) переписать в новых переменных. Запишем (2.1) в виде

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial U(x_i(x))}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_i} \tag{2.6}$$

и, принимая во внимание (2.3), объединим (2.5) и (2.6) в одну систему уравнений вида

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial V_1(x)}{\partial x}\frac{p_2}{m_2c}, \tag{2.7}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{c}\frac{p_1}{m_1}\frac{p_2}{m_2}, \tag{2.8}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial V_2(x)}{\partial x}\frac{p_1}{m_1 c}, \tag{2.9}$$

где $V_i(x) = U(x_i(x)), i = 1,2$. Полученная система совпадает с (1.2)-(1.4), если принять, что $p = p_1, q = p_2 c, \mu = m_2 c^2, m = m_1$.

Константу c размерности скорости мы с самого начала идентифицируем со скоростью света. Как и прежде ограничимся движением в потенциале, явно не зависящем от времени. Как и в случае системы ЭДУ, для (2.7)-(2.9) имеем следующие константы движения :

$$H_1 = \frac{p_1^2}{2m_1} + V_1(x), H_2 = \frac{p_2^2}{2m_2} + V_2(x). \tag{2.10}$$

Простоты ради, далее положим $V_1(x) = V_2(x)$. Пользуясь константами движения H_1, H_2, объединим (2.7) и (2.9) в одно уравнение

$$\frac{d(p_1p_2)}{dt} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}(\frac{p_2^2}{m_2 c} + \frac{p_1^2}{m_1 c}). \tag{2.11}$$

Из (2.10) имеем

$$(\frac{p_2^2}{m_2} + \frac{p_1}{m_1}) = 2(H_1 + H_2) - 4V.$$

Подставив это в (2.11), находим

$$c\frac{d(p_1p_2)}{dt} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}4(E - V) = -\frac{\partial}{\partial x}2(2EV - V^2), \tag{2.12}$$

где через E ввели обозначение

$$2E = H_1 + H_2. \tag{2.13}$$

Далее определим эффективный импульс P, как это было сделано в предыдущем параграфе, и массу объединенной частицы M по формулам

$$P = \frac{p_1p_2}{2c\sqrt{m_1m_2}}, M = \frac{1}{2}\sqrt{m_1m_2}. \tag{2.14}$$

В этих переменных уравнения (2.5) и (2.12) принимают вид уравнений Ньютона

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial x},$$

где

$$W = \frac{1}{2Mc^2}((H_1 + H_2)V - V^2).$$

Отсюда находим следующее выражение для энергии объединенной частицы:

$$I\!H\frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2Mc^2}W.$$

Пользуясь определениями (2.10),(2.13), выполним следующие преобразования:

$$c^2P^2 + W = c^2P^2 + 2EV - V^2 = \frac{p_1^2p_2^2}{4m_1m_2} + 2EV - V^2 =$$

$$= (\frac{p_1^2}{2m_1} + V)(\frac{p_2^2}{2m_2} + V) = H_1H_2 = E^2 - (mc^2)^2,$$

где мы обозначили

$$2mc^2 = H_2 - H_1. \tag{2.15}$$

Из приведенных равенств для нас представляет интерес соотношение

$$c^2P^2 + 2EV - V^2 = E^2 - mc^2. \tag{2.16}$$

Здесь следует указать на существенную разницу в интерпретации величин E и mc^2 в нашем случае и в общепринятой интерпретации. В общепринятой интерпретации E-полная энергия , m- масса покоя частицы. В нашем случае E, mc^2 являются постоянными интегрирования . Эта точка зрения, как мы увидим ниже, имеет существенное значение в квантовом случае, когда речь пойдет о квантовании в потенциале с монотонно растущими краями.

Таким образом, мы получили релятивистское соотношение между энергией, массой и импульсом. Теперь определим зависимость величины E от скорости. Рассмотрим свободное движение. В этом случае

$$\frac{p_1p_2}{2c\sqrt{m_1m_2}} = \frac{P}{M} = \frac{dx}{dt} = u, \tag{2.17}$$

$$H_1 = \frac{p_1^2}{2m_1}, H_2 = \frac{p_1^2}{2m_1}.$$

Исходя из этих равенств, а также имея в виду определение (2.17), запишем следующую систему уравнений для H_1, H_2:

$$\frac{1}{c^2}H_1H_2 = u^2M^2, H_2 - H_1 = 2mc^2. \tag{2.18}$$

Отсюда, исключая H_2, получим

$$(H_1 + mc^2)^2 = M^2c^2u^2 + (mc^2)^2 = E^2. \tag{2.19}$$

Для того чтобы получить формулу Лоренца (зависимость энергии от скорости), необходимо сделать два предположения. Первое, необходимо связать разность интегралов движения с массой частиц, полагая

$$\frac{1}{2c^2}(H_2 - H_1) = m = M = \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{2}. \tag{2.20}$$

Второе, принять, что параметр времени, который используется в наших уравнениях, есть собственное время частицы. Тогда

$$dt = d\tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad u = \frac{dx}{dt} = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad v = \frac{dx}{d\tau}. \tag{2.21}$$

Подставив эти определения в (2.19), получим

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.22}$$

— известную формулу Лоренца зависимости энергии от скорости.

§3. Квазиклассическое квантование уровней энергии в ЭДУ

Рассмотрим проблему квазиклассического квантования уровней энергии в потенциале, форма которого приведена на рис. 2. Как видно, условия квантования Бора — Зоммерфельда применимы только в области $-V_0 \le E \le 0$.

В этом случае энергия определяется из условия

$$\oint pdx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{E - V(x)}dx = (n + 1/2)h, \tag{3.1}$$

здесь x_2, x_1 - точки поворота классического периодического движения. Классическая траектория движения в этом случае описывается периодической функцией $x(E) = x(E+T)$.

Как известно, условие (3.1) становится бессмысленным для положительных значений энергии, что соответствует в данном случае значениям энергии $E > V_{max}$.

В этой связи промежуточное положение занимает область $0 < E < V_{max}$. В области значений энергии $0 < E < V_{max}$ классическое движение описывается двоякопериодической функцией $x(E,t) = x(E, t + T_1 + iT_2)$. Соответственно, мы имеем четыре точки поворота x_1, x_2, x_3, x_4, причем классическое движение совершается как бы в двух областях: в промежутке $[x_2, x_3]$ мы имеем периодическое движение с импульсом $p_1 = \sqrt{E-V}$ и периодом T_1, в промежутке $[x_3, x_4]$ — периодическое движение с мнимым с импульсом $ip_2 = i\sqrt{V-E}$ и с мнимым периодом iT_2, т.е. в этой области под интегралом $\oint pdx$ следует понимать комплексную величину

$$\oint pdx = \int_{x_2}^{x_3} p_1dx + 2i\int_{x_3}^{x_4} p_2dx = \int_{x_2}^{x_3} \sqrt{E-V}dx + 2i\int_{x_3}^{x_4} \sqrt{V-E}dx.$$

Очевидно, квантование вещественной и мнимой частей должно вестись независимо, что дает вместо (3.1) два условия квантования

$$\int_{x_2}^{x_3} \sqrt{E-V}dx = (n + \frac{1}{2})h, \quad 2\int_{x_3}^{x_4} \sqrt{V-E}dx = (m + \frac{1}{2})h.$$

Поскольку из этих условий предстоит определить только одну величину, энергию, то система оказывается переопределенной и, в силу произвольности n и m, несовместной. Совсем иное дело, если речь идет о квантовании движения в рамках ЭДУ. В этом случае эффективный импульс определяется выражением

$$\pi = \frac{1}{\mu}pq = 2\sqrt{m\mu(H-V)(N-V)}.$$

В этом случае адиабатический инвариант

$$\frac{1}{\mu}\oint pq = 2\sqrt{\frac{m}{\mu}}\oint \sqrt{(H-V)(N-V)}dx \tag{3.2}$$

определяется двумя константами движения H, N. В результате для потенциала запирания получим два условия квантования

$$2\sqrt{\frac{m}{\mu}}\int_{x_2}^{x_3} \sqrt{(H-V)(N-V)}dx = (n + \frac{1}{2})h. \tag{3.3}$$

$$4\sqrt{\frac{m}{\mu}}\int_{x_3}^{x_4} \sqrt{(V-H)(N-V)}dx = (m + \frac{1}{2})h, \tag{3.4}$$

что дает возможность найти функции $H = H(n,m), N = N(n,m)$.

В качестве примера приведем квантование в потенциале

$$V = \frac{m\omega^2x^2}{2}. \tag{3.5}$$

Найдем точки поворота (пределы интегрирования) x_1, x_2, x_3, x_4 из решений уравнений

$$H - \frac{m\omega^2 x^2}{2} = 0, \quad N - \frac{m\omega^2 x^2}{2} = 0. \tag{3.6}$$

Эти уравнения имеют следующие решения:

$x_1 = \sqrt{\frac{2H}{m\omega^2}} = a$, $x_2 = -a$, $x_3 = \sqrt{\frac{2N}{m\omega^2}} = b$, $x_4 = -b$. График подынтегральной функции приведен на рис. 2. Линия E пересекает потенциал $V(x)$ в 4-х точках точках поворота. Здесь $[-a, a]$ — интервал реального, а $[-b, -a]$ и $[a, b]$ — интервалы мнимого движений.

В этих обозначениях интеграл (3.2) примет вид

$$\oint \pi dx = \gamma \int_{-a}^{a} + i\gamma \int_{a}^{b} + i\gamma \int_{-b}^{-a}, \tag{3.7}$$

где $\gamma = m\omega^2 \sqrt{\frac{m}{\mu}}$, а под символами интегралов мы имеем в виду следующие определения:

$$\int_{-a}^{a} = 2\int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}dx, \quad \int_a^b + \int_{-b}^{-a} = 2\int_a^b \sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}dx, \tag{3.8}$$

Итак, задача вычисления интеграла (3.2) сводится к табличным интегралам, которые выражаются через известные эллиптические интегралы $E(k)$ и $K(k)$:

$$\int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}dx = \frac{b^3}{3}((1 + k^2)E(k) - (1 - k^2)K(k)), \tag{3.9}$$

$$\int_a^b \sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}dx = \frac{b^3}{3}((1 + k^2)E'(k) - 2k^2)K'(k)). \tag{3.10}$$

Однако более удобными для анализа полученных формул, а также для численных расчетов представляются интегралы, записанные в следующем виде:

$$2\gamma \int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}dx = 2\gamma a^2 b \int_0^1 \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}dy, \tag{3.11}$$

где $2\gamma a^2 b$ с учетом определений (2.6) принимает вид

$$2\gamma a^2 b = 4\frac{H}{\omega}\sqrt{\frac{2N}{\mu}}.$$

Далее вспомним определение эффективной частоты $\omega(eff) = \omega\sqrt{\frac{2N}{\mu}}$ и определение энергии $E = \frac{2}{\mu}HN$. Тогда (3.12) примет вид

$$2\gamma a^2 b = \frac{4E}{\omega(eff)}. \tag{3.13}$$

С учетом последнего соотношения условия квантования (3.4) сводятся к следующим простым условиям:

$$\frac{4E}{\omega(eff)} \int_0^1 \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}dy = (n + \frac{1}{2})h, \tag{3.14}$$

$$\frac{4E}{\omega(eff)} \int_1^{1/k} \sqrt{(y^2 - 1)(1 - k^2 y^2)}dy = (m + \frac{1}{2})h. \tag{3.15}$$

Из этих условий предстоит определить E, k. Поделив (3.14) на (3.15), находим уравнение для функции $k = k(n, m)$

$$\frac{(n + \frac{1}{2})}{(m + \frac{1}{2})} = \frac{\int_0^1 \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}dy}{\int_1^{1/k} \sqrt{(y^2 - 1)(1 - k^2 y^2)}dy}. \tag{3.16}$$

Подставив в эти выражения решения ЭДУ в осцилляторном потенциале, интегралы (3.16) можно представить так:

$$D(K) = \int_{-K}^{K} cn^2(\phi)dn^2(\phi)d\phi = 2\int_0^1 \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}dy,$$

$$D(k + iK') = \int_{-K-iK'}^{K+iK'} cn^2(\phi)dn^2(\phi)d\phi = 2\int_1^{1/k} \sqrt{(y^2 - 1)(1 - k^2 y^2)}dy. \tag{3.17}$$

Тогда (3.16) принимает вид

$$\frac{(n + \frac{1}{2})}{(m + \frac{1}{2})} = \frac{D(K)}{D(K + iK')}.$$

Отсюда получим функцию $k = k(n, m)$ и подставим в (3.14). Получим

$$E = \frac{2}{\mu}HN = (n + \frac{1}{2})\omega(eff)\frac{h}{2D(K)}. \tag{3.18}$$

Выразим $\omega(eff)$ через k^2. Для этого вспомним формулу (1.18)

$$\frac{2N}{\mu} = \frac{\alpha}{2}(1 + \sqrt{1 - \frac{8E}{\mu\alpha^2}}).$$

Введем обозначение

$$\beta = \frac{8E}{\mu\alpha^2}.$$

Из определения k^2 (см.(1.8)) имеем

$$k^2 = \frac{H}{N} = \frac{(1 - \sqrt{1 - \beta})}{(1 + \sqrt{1 - \beta})}$$

или

$$\beta = \frac{4k^2}{(k^2+1)^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\frac{2N}{\mu}} = \sqrt{\frac{\alpha}{(k^2+1)}}.$$

Подставив в определение $\omega(eff)$, получим спектр энергии в масштабе $\alpha = 1$:

$$E = (n+\frac{1}{2})\frac{\omega}{\sqrt{k^2+1}}\frac{h}{2D(K)}. \tag{3.19}$$

Таким образом, мы получили аналитическую формулу для спектра энергии в потенциале осциллятора в рамках квазиклассического квантования для частицы, движущейся по законам эллиптической механики. Как и должно быть, при $k = 0$ формула (3.19) принимает вид

$$E = (n+\frac{1}{2})\omega\frac{h}{2\pi},$$

т.е. формулу для спектра энергии гармонического осциллятора.

Как показывают численные расчеты, спектр (3.19) имеет вид, изображенный на рис.3. Спектр имеет вид эквидистантно расположенных полос, определяемых главным квантовым числом n. Для заданного n квантовое число m меняется в пределах от 1 до ∞. При увеличении m величина $\Delta E(n,m) = E(n,m+1) - E(n,m)$ стремится к нулю. Таким образом, подуровни в каждой полосе имеют точки сгущения, определяемые главным квантовым числом.

§4. Квазиклассическое квантование релятивистской частицы, движущейся в осцилляторном потенциале

Рассмотрим стационарное движение релятивистской частицы в потенциале гармонического осциллятора. Релятивистское соотношение в этом случае имеет вид

$$(E - \frac{M\omega^2x^2}{2})^2 = c^2P^2 + (mc^2)^2, \tag{4.1}$$

величина M размерности массы в данном случае является параметром потенциала. В качестве параметра времени будем использовать собственное время частицы. В этом случае связь скорости с импульсом выражается формулой

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{P}{M}. \tag{4.2}$$

Подставив сюда выражение для P из (4.1), получим

$$x = \sqrt{\frac{2(E-mc^2)}{M\omega^2}}sn(\omega(eff)t,k). \tag{4.3}$$

где

$$\omega(eff) = \omega\sqrt{\frac{(E+mc^2)}{2Mc^2}}, k^2 = \frac{E-mc^2}{E+mc^2}. \tag{4.4}$$

Таким образом, решение дается двоякопериодической функцией Якоби. Это означает, что период движения дается комплекснозначной величиной $T = T_0 + iT_1$. Зная периоды функции $sn(\phi)$, находим следующие выражения для реальной и мнимой частей периодов движения:

$$T_0 = \frac{4}{\omega}\sqrt{\frac{2Mc^2}{E+mc^2}}K, \quad T_1 = \frac{4}{\omega}\sqrt{\frac{2Mc^2}{E+mc^2}}K'. \tag{4.5}$$

Фазовый интеграл запишется в следующем виде:

$$\oint Pdx = \oint\sqrt{(E - mc^2 - \frac{M\omega^2x^2}{2})(E + mc^2 - \frac{M\omega^2x^2}{2})}dx. \tag{4.6}$$

Нетрудно увидеть полное сходство этого интеграла с фазовым интегралом, определенным в §3 (см.(3.2)). Следуя заданному в §3 рецепту квазиклассического квантования, выделим два интервала движения. Соответственно получим два условия квантования

$$\int_{x_2}^{x_3}\sqrt{(E - mc^2 - \frac{M\omega^2x^2}{2})(E + mc^2 - \frac{M\omega^2x^2}{2})}dx = (n+\frac{1}{2})h, \tag{4.7}$$

$$2\int_{x_3}^{x_4}\sqrt{(E - mc^2 - \frac{M\omega^2x^2}{2})(E + mc^2 - \frac{M\omega^2x^2}{2})}dx = (m+\frac{1}{2})h. \tag{4.8}$$

Из первого условия находим

$$(E - mc^2)\sqrt{\frac{2(E+mc^2)}{Mc^2}} = (n+\frac{1}{2})\omega\frac{h}{2D(k)}. \tag{4.9}$$

Поделив (4.7) на (4.8), находим уравнение для определения функции $k = k(n,m)$

$$\frac{(n+\frac{1}{2})}{(m+\frac{1}{2})} = \frac{\int_0^1\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}dy}{\int_1^{1/k}\sqrt{(y^2-1)(1-k^2y^2)}dy}. \tag{4.10}$$

Как только функция $k = k(n, m)$ определена, величины E и mc^2 (напомним, в нашем случае они являются константами движения) определяются из (4.4), (4.9). Из (4.4) имеем

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{1+k^2}{1-k^2}. \tag{4.11}$$

Эта формула дает возможность написать еще две полезные формулы

$$E - mc^2 = E\frac{2k^2}{1+k^2}, \tag{4.12}$$

$$E - mc^2 = mc^2\frac{2k^2}{1-k^2}. \tag{4.13}$$

Пользуясь (4.11), (4.12), мы можем преобразовать левую часть (4.9) к следующему выражению:

$$E^{3/2}\frac{\sqrt{8}k^2}{1+k^2}\sqrt{\frac{2}{Mc^2}}. \tag{4.14}$$

Если исходить из (4.13), то левая часть (4.15) примет вид

$$(mc^2)^{3/2}\frac{\sqrt{8}k^2}{1-k^2}\sqrt{\frac{2}{Mc^2}}. \tag{4.15}$$

Подставляя (4.14) и (4.15) последовательно в левую часть (4.9), получим формулы, определяющие спектры величин E и mc^2,

$$E = \{(n+\frac{1}{2})\frac{h\omega}{8D(k)}\frac{(1+k^2)\sqrt{Mc^2}}{k^2}\}^{2/3},$$

$$mc^2 = \{(n+\frac{1}{2})\frac{h\omega}{8D(k)}\frac{(1-k^2)\sqrt{Mc^2}}{k^2}\}^{2/3}.$$

Заключение

Необходимо особо выделить некоторые весьма важные выводы , которые следуют из изложенного выше подхода.

1. Метод эллиптической деформации дает новую интерпретацию релятивистского соотношения между энергией, импульсом и массой. В этом подходе уравнения движения формулируются в трехмерном фазовом пространстве, что приводит к равноправному определению энергии и массы как постоянных интегрирования.

2. Наличие двух констант движения приводит к совместной формулировке задачи на собственное значение в потенциале с бесконечно растущими краями.

3. Численный анализ формулы (3.19), выполненный Н.В.Хуторным, показал, что спектр уровней энергии имеет вид четко выделенных полос. Каждая полоса характеризуется главным квантовым числом n, при этом значение $m = 1$ дает крайнюю линию полосы, а при возрастании m уровни сгущаются, стремясь к некоторому предельному уровню $E(n, \infty)$. Данную картину можно интерпретировать как уширение уровней энергии гармонического осциллятора при эллиптической деформации уравнений движения.

Автор выражает благодарность Н.В.Хуторному за проведение численных расчетов, на основе которых был установлен характер распределения уровней энергии гармонического осциллятора при эллиптической деформации уравнений движения.

Литература

1. Р.М.Ямалеев,Сообщения ОИЯИ, Р2-94-109, Е2-94-249, Дубна, 1994; R.M.Yamaleev, Proceedings of the conference on Dynamical Systems and Chaos, Tokyo 1994, May 23-24, 1994.

2. Y.Nambu, Phys.Rev.D7,No.8 (1973) 2405.

3.Р.М.Ямалеев, Сообщение ОИЯИ, Р2-95-192, Дубна, 1995.

4. Н.И.Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций. М., Наука, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 апреля 1997 года.

Ямалеев Р.М. Р2-97-110
Квазиклассическое квантование эллиптических уравнений движения

Проводится квазиклассическое квантование эллиптических уравнений движения. Условия Бора — Зоммерфельда, выполнение которых предполагает существование двух точек поворота, обобщаются на случай потенциалов с четырьмя точками поворота. В этом случае движение описывается двоякопериодическими функциями, а фазовый интеграл $\oint pdx$ является комплекснозначной функцией. Это положение соответствует тому, что квантованию подлежат две константы движения, соответствующие двум функциям Гамильтона — Намбу. В результате уровни энергии оказываются расщепленными на бесконечное число подуровней, сгущающихся к основному уровню. Показано, что релятивистские динамические уравнения можно сформулировать как результат эллиптической деформации нерелятивистских уравнений. Релятивистское движение в потенциале с бесконечно растущими краями описывается двоякопериодическими функциями. Это означает, что периодическое движение в релятивистской механике имеет, кроме реальной части, еще мнимую часть, появление которой обусловлено тем, что эффективный потенциал открывается, при этом мнимая часть периода соответствует периодическому движению под барьером. Таким образом, в рамках релятивистской динамики построение потенциального конфайнмента невозможно, ибо любой потенциал с бесконечно растущими краями эффективно оказывается открытым, что дает конечную вероятность туннелирования связанных в данном потенциале частиц.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Перевод автора

Yamaleev R.M. P2-97-110
Semiclassical Quantization of Elliptic Equations of Motion

The semiclassical method of quantization for elliptic equations of motion is developed. We generalized Bohr — Sommerfeld's rule of quantization (which can be realized for the potentials with double walls only) to the case of motion with four turning points. This motion is described by double periodic (elliptic) functions, and the phase integral $\oint pdx$ becomes a complex value. It gives instead one two conditions of quantization for two constants of motion corresponding to two Hamilton — Nambu functions. As a result the spectrum of energy is splitted forming the strip of infinitely number of levels thickened arround principal energy level. It is shown, the relativistic equations of motion can be formulated by using the procedure of elliptic deformation. Relativistic motion in the potential with monotonic increasing walls is described by doubly periodic functions. It means, within the relativistic mechanics such kind of periodic motion is characterized with the period consisting of real and imaginary parts. The imaginary part of the period is related to the periodic motion under the potential barrier. Thus we conclude, it is impossible to construct a confinement by using the potential with monotonic increasing walls as far as within the relativistic dynamics this potential is effectively discovered. As a result the value of penetrating probability through the barrier becomes finite.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1997