СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-97-107

В.А.Мещеряков

РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ НЕКОТОРЫХ СТАТИЧЕСКИХ ДИСПЕРСИОННЫХ МОДЕЛЕЙ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1997

1. Введение

Задача о рассеянии адронов при низких энергиях до настоящего времени привлекает к себе внимание в теории поля [1]. Редукционные формулы матричных элементов рассеяния [2] позволяют учитывать кварковые степени свободы, а их нерелятивистский предел сводится к известным статическим уравнениям [3] с квадратичной нелинейностью. Ниже ограничимся изучением этого типа уравнений, сведя их к нелинейной краевой задаче [4]. Она имеет вид ряда условий на функции S_i – матричные элементы S-матрицы:

$$
\begin{aligned}
&a)\ S_i(z) - \text{мероморфные функции в комплексной плоскости } z \\
&\qquad \text{с разрезами } (-\infty,-1],[+1,+\infty), \\
&b)\ S_i^*(z) = S_i(z^*), \\
&c)\ |S_i(\omega+i0)|^2 = 1 \text{ при } \omega \geq 1 \quad S_i(\omega+i0) = \lim_{\epsilon\to+0} S_i(\omega+i\epsilon), \\
&d)\ S_i(-z) = \textstyle\sum_{j=1}^N A_{ij}S_j(z).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Действительные значения переменной z являются полной энергией ω релятивистской частицы, рассеивающейся на фиксированном центре. Требование мероморфности функций $S_i(z)$ возникает как следствие статического предела задачи рассеяния [5]. Условие упругой унитарности (1c) справедливо лишь на правом разрезе плоскости z. На левом разрезе функции $S_i(z)$ заданы условиями перекрестной симметрии (1d). Матрица перекрестной симметрии A определяется группой, относительно которой инвариантна S-матрица; для ряда групп она известна [4]. Цель последующего изложения состоит в фомулировке способа изучения поверхности Римана ряда статических дисперсионных моделей.

2. Аналитическое продолжение S-матрицы на нефизические листы

Запишем условия (1) в матричной форме. Для этого введем столбец

$$S^{(0)}(z) = [S_1(z), S_2(z), \cdots, S_N(z)]\ ,$$

где верхний индекс обозначает физический лист римановой поверхности S-матрицы. Условия (1a,b,d) относятся к физическому листу, а условие унитарности (1c) может быть продолжено на комплексные значения ω. При этом оно также как условие (1c) имеет покомпонентный вид

$$S_i^{(0)}(z)S_i^{(1)}(z) = 1$$

и осуществляет аналитическое продолжение S-матрицы на первый нефизический

ваний. Дубна, 1997

лист поверхности Римана. Матричная форма записи условия унитарности (1c) получается при введении нелинейной операции инверсии I согласно формуле

$$IS(z) = [1/S_1(z), 1/S_2(z), \cdots, 1/S_N(z)]\ .$$

В результате условия (1a,b,c,d) приобретают вид :

$$
\begin{aligned}
&a)\ S^{(0)}(z) - \text{столбец N мероморфных функций в комплексной} \\
&\text{плоскости } z \text{ с разрезами } (-\infty,-1],[+1,+\infty), \\
&b)\ S^{(0)*}(z) = S^{(0)}(z^*), \\
&c)\ S^{(1)}(z) = IS^{(0)}(z), \\
&d)\ S^{(0)}(-z) = AS^{(0)}(z).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Аналитическое продолжение на нефизические листы определим следующим образом :

$$S^{(p)}(z) = (IA)^p S^{(0)}(z(-1)^p)). \tag{3}$$

С помощью определения (3) условия унитарности (2c) и перекрестной симметрии (2d) легко продолжаются на нефизические листы

$$IS^{(p)}(z) = S^{(1-p)}(z), AS^{(p)}(z) = S^{(-p)}(-z), \tag{4}$$

и имеет место формула

$$(IA)^q S^{(p)}(z) = S^{(q+p)}(z(-1)^q). \tag{5}$$

Мотивировка определения (3) содержится в известном решении [5] условий (1a,b,c,d) для двухрядной матрицы

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оно имеет вид

$$S(z) = [W(W-2)/(W^2-1),\ W(W+1)/(W^2-1)]D(z), \tag{6}$$

где $W = w + i\sqrt{z^2-1}\beta(z)$, $w = 1/\pi \arcsin z$, $\beta(z) = -\beta(-z)$ – мероморфная функция и $D(z) = D(-z)$ – функция Бляшке переменной $\zeta = \frac{1+i\sqrt{z^2-1}}{z}$. Кроме решения (6) условия (1a,b,c,d) допускают тривиальное решение – столбец одинаковых функций Бляшке. Так что условия (2) не определяют вид римановой поверхности $S(z)$ однозначно. В решении (6) риманова поверхность $S(z)$ бесконечнолистна за счет функции w и справедливы равенства

$$S^{(0)}(z) = S(W)_{|w|\leq 1/2},\ S^{(\pm n)}(z(-1)^{(\pm n)}) = S(W)_{|w\pm n|\leq 1/2},$$

которые позволяют получить такую форму уравнений (5):

$$(IA)^n S(W) = S(W+n), \qquad (7)$$
$$(AI)^n S(W) = S(W-n).$$

Уравнения (7) – система нелинейных автономных разностных уравнений, которые естественно назвать динамической формой статических дисперсионных соотношений. Поэтому и равенствам (5) можно присвоить это же наименование. В отличие от уравнений (7) они образуют систему нелинейных разностных уравнений, в которых аргументом является номер римановой поверхности, а энергетическая переменная z фигурирует как параметр.

3. Формулировка задачи в проективных пространствах

На примере двухрядного решения (6)видно, что решение задачи (1), вообще говоря, определяется $N+1$ целой функцией, N из которых удовлетворяют условию перекрестной симметрии (1d), а последняя симметрична по z и обеспечивает выполнение условий унитарности (1c). Условия (1a,b,d) однородны и могут рассматриваться в проективных пространствах P_{N-1} и P_N. Определим операцию I так, чтобы она была корректной в этих пространствах [6], и обозначим ее через I_p, где

$$I_p = \Pi_{j=1,i\neq j}^{m} S_j,$$
$$m = N-1, N\ .$$

Переформулируем задачу (1) в этих пространствах. В пространстве P_{N-1} матрица перекрестной симметрии имеет определенный в (1) вид, а в пространстве P_N ее порядок увеличивается на единицу, т.е.

$$A_{N-1} = A, A_N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где A_N – блочная матрица. В результате вместо условий (1) получаем набор следующих требований на столбец из m функций:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ S^{(o)}(z) - \text{столбец } m \text{ мероморфных функций в комплексной} \\ \text{плоскости } z \text{ с разрезами } (-\infty,-1],[+1,+\infty), \\ b)\ S^{(0)*}(z) = S^{(0)}(z^*), \\ c)\ S^{(1)}(z) = I_p S^{(0)}(z), \\ d) S^{(0)}(-z) = A_m S^{(0)}(z). \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Проиллюстрируем схему решения двухрядного случая (6) на языке проективных пространств P_1, P_2. Обозначим через $(x_o, x_1) = (S_1, S_2)$ координаты точки

(x) в P_1. Введем на проективной прямой P_1 аффинную координату $X = x_0/x_1$. Полагая в условии (3) $z = 0$, получим закон продолжения координаты $X^{(0)}$ с физического листа на первый нефизический лист

$$X^{(1)} = \frac{2X^{(0)}+1}{-X^{(0)}+4}. \qquad (9)$$

Дробно-линейное преобразование (9) можно возвести в n-ю степень и из условия перекрестной симметрии (8d) найти

$$X^{(0)} = -2 \text{ и } X^{(n)} = \frac{n-2}{n+1}. \qquad (10)$$

Здесь выясняется, что одно из условий перекрестной симметрии (8d) является лишним. Вывод справедлив и для матриц перекрестной симметрии 3×3.

Изучение двухрядной задачи на прямой P_1 определяет лишь отношение функций S_1 и S_2. Сами функции можно найти из решения ее на проективной плоскости P_2. Проективные координаты точки $(x) = (x_0, x_1, x_2)$ на P_2 запишем в базисе, явно учитывающем перекрестную симметрию

$$\begin{aligned} x_0 &= s-2a \\ x_1 &= s+a \\ x_2 &= c, \end{aligned} \qquad (11)$$

где s, c – симметричные, a – антисимметричная функции z.

Рассматривая оператор $(I_p A_2)^n$ в базисе s, a, c, легко убедиться в том, что между s, a, c существует соотношение

$$s^2 - a^2 - sc = 0, \qquad (12)$$

инвариантное относительно операторов I_p и A_2 в отдельности. (Регулярный способ получения уравнения (12) приведен в приложении.)

Другими словами, уравнение (12) на P_2 определяет инвариантную кривую C, любая точка которой не покидает ее под действием преобразований I_p и A_2. В базисе (x_0, x_1, x_2) уравнение кривой C имеет вид

$${x^2}_1 + 2x_0x_1 - 2x_1x_2 - x_0x_2 = 0. \qquad (13)$$

С помощью уравнений (10) и (13) легко найти

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{n}{n-1} \qquad (14)$$

и тем самым определить полностью функции S_1, S_2. В процессе решения не было использовано одно из условий унитарности (1c), учет которого позволяет полностью воспроизвести формулы (6).

Обсудим вопрос о соотношении описаний двухрядной задачи (1) в пространствах P_1 и P_2. На проективной плоскости P_2 решение представлено инвариантной кривой (13). Она неприводима и как всякая алгебраическая кривая второго порядка рациональна, а в аффинных координатах имеет вид

$$x = \frac{x_0}{x_2},\ y = \frac{x_1}{x_2},\ x^2 + 2xy - 2x - y = 0.$$

Если построить пучок прямых $\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1$ с базисной точкой (x_0, y_0) на кривой (13), то координаты второй точки пересечения прямых пучка с кривой (13) будут рациональными функциями $k = \lambda_1/\lambda_0$:

$$x = \frac{-(x_0 + 2y_0) + 2 + k}{1 + 2k},\ y = y_0 + k(x - x_0).$$

За счет специально подобранной параметризации k, зависящей от базисной точки пучка

$$k = \frac{(-x_0 - 2y_0 + 1)n + x_0 + 2y_0 - 2}{n + 1},$$

функции x и y приводятся к формулам (10), (14). При коллинеациях в пространстве P_2 (линейных преобразованиях с ненулевым детерминантом) пучок прямых ведет себя как проективное пространство P_1. Таким образом, проективное пространство P_1 представлено любым пучком прямых с базисной точкой на инвариантной кривой (13) пространства P_2.

Исследование и построение инвариантных многообразий для задачи (1) с размерностью $N \geq 3$ проводилось [4] с помощью рядов в окрестности точек покоя динамических систем (7). Проективные пространства позволяют по-новому подойти к этой задаче.

Рассмотрим задачу (1) с трехрядной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 5/3 \\ -1/3 & 1/2 & 5/6 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

которая описывает рассеяние двух частиц с равными угловыми моментами 1. В пространстве P_3 матрица A_3 имеет три собственных значения +1 и одно -1. Координаты точки (x) в P_3 могут быть выражены через три симметричные s_1, s_2, s_3 и одну антисимметричную a функции z с помощью обычной коллинеации (автоморфизма проективного пространства P_3)

$$x_i = b_{ij}s_j + b_{i4}a.$$

Построим в P_3 плоскость, инвариантную относительно линейного преобразования координат x с матрицей A_3. Она имеет вид

$$c_0x_0 + c_1x_1 + (2c_0 + c_1)x_2 + c_2x_3 = 0\ . \qquad (16)$$

Легко видеть, что частным случаем плоскости (16) будет плоскость $x_1 + x_2 = 0$, которая инвариантна относительно преобразования I_p. Эта плоскость является пространством P_2, на которой задача (1) с матрицей (15) сводится к решаемой двухрядной задаче [7]. Плоскость $x_1 + x_2 = 0$ не проходит через точку покоя $\bar{x} = (1, 1, 1, 1)$ динамической системы (5) — неподвижную точку преобразования (5). Если потребовать, чтобы точка $\bar{x}$ лежала на плоскости (16), то получим уравнение

$$c_0x_0 + c_1x_1 + (2c_0 + c_1)x_2 - (3c_0 - 2c_1)x_3 = 0\ . \qquad (17)$$

Плоскость (17) под действием преобразования I_p перейдет в поверхность 3 -го порядка в P_3, которая не инвариантна относительно преобразования A_3,

$$c_0x_1x_2x_3 + c_1x_0x_2x_3 + (2c_0 - c_1)x_0x_1x_3 - (3c_0 + 2x_1)x_0x_1x_2 = 0\,. \qquad (18)$$

Пересечение плоскости (17) и поверхности (18) определит плоскую пространственную кривую C, которая, вообще говоря, не инвариантна относительно преобразования A_3. Действительно, исключая x_3 из уравнений (17), (18), получим однородное уравнение третьей степени $G(x_0, x_1, x_2) = 0$. Функция G в пространстве P_2 в базисе s_1, s_2, a при произвольных c_0, c_1 будет содержать нечетные степени антисимметричной функции a. Коэффициент при a — квадратичная форма по s_1, s_2, a. Инвариантность плоской пространственной кривой C относительно преобразования A_3 требует обращения этой квадратичной формы в нуль. Как всякое уравнение второй степени оно определяет рациональные функции s_1, s_2, a некоторого параметра t. Подставляя их в четную по a часть функции $G(x_0, x_1, x_2)$, получим уравнение третьей степени относительно t, которое имеет три решения, вообще говоря. Только тождественное обращение его в нуль, т.е. приводимость G гарантирует наличие инвариантной кривой. Приведем уравнение, определяющее коэффициенты c_0, c_1,

$$R_{x_0}(G, G'_{x_1}) \equiv 0, \qquad (19)$$

где R_{x_0} — результант G и G'_{x_1} по x_0. Из уравнений (19) находим $c_0 = -1, c_1 = 3$ и функцию G

$$G(x_0, x_1, x_2) = (-3x_1^2 + x_0x_1 + 3x_0x_2 - x_1x_2)(-x_0 + x_2) = 0\ , \qquad (20)$$

определяющую приводимую кривую C. Первый сомножитель в уравнении (20) инвариантен относительно преобразований I_p и A_2 и совместно с уравнением (17) определяет известное решение [8] с конечным числом полюсов по w. Оно представлено в P_3 как пересечение плоскости и поверхности

$$-x_0 + 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\ ; \qquad (21)$$

$$-3x^2_1 + x_0x_1 + 3x_0x_2 - x_1x_2 = 0\ . \tag{22}$$

Уравнению (22) с помощью равенства (21) можно придать форму

$$x_1x_3 = x_0x_2,$$

с помощью которой легко проверяется инвариантность равенства (21) относительно преобразования I_p. Второй сомножитель в уравнении (20) под действием преобразования A_3 переходит в $(-x_1+x_2)$ и вместе с ним составляет вырожденную квадратичную форму

$$(-x_0 + x_2)(-x_1 + x_2) = 0\ ,$$

инвариантную относительно преобразований I_p и A. Она определяет два пучка прямых, инвариантных относительно преобразования I_p и переходящих друг в друга под действием преобразования A,

$$x_0 = x_2,\ \frac{x_0}{x_1} = \frac{n+1/6}{n-7/6};\ \ x_1 = x_2,\ \frac{x_0}{x_1} = \frac{n-3/2}{n+1/2}.$$

4. Заключение

Нелинейная краевая задача (1) о построении N–мерной (1a), упруго–унитарной (1c) и кроссинг–симметричной (1d) S–матрицы сформулирована в проективных пространствах P_{N-1} и P_N. В пространстве P_{N-1} ее можно рассматривать как результат проектирования исходной задачи (1) из аффинного пространства A_n в проективное пространство P_{N-1}, при котором игнорируется одно из условий унитарности (1c). В пространстве P_N задача (1) суть вложение в P_N за счет введения дополнительного измерения. Условие аналитического продолжения S–матрицы на нефизические листы представлено в виде нелинейной автономной системы разностных уравнений — динамической форме. Оно также может рассматриваться как нелинейное преобразование в пространствах A_N, P_{N-1}, P_N. Неподвижные точки этого преобразования включают, в частности, S–матрицу без взаимодействия. В окрестности этой точки S–матрица изучалась с помощью степенных рядов по 1/w, которые иногда удается просуммировать [4]. Использование техники проективных пространств дает возможность глобального исследования решений – построения инвариантных подпространств, содержащих искомые решения. Инвариантные подпространства определяются однородными функциями в проективных пространствах P_{N-1} и P_N, но не в аффинном пространстве A_N. Это утверждение расходится с выводом работы [9], согласно которому и в аффинном пространстве A_N инвариантные подпространства определяются однородными функциями. Предложенная выше геометрическая интерпретация краевой задачи(1) в проективных пространствах P_{N-1} и P_N и примеры, рассмотренные в работах[5],[8], указывают на необходимость отказаться от требования однородности функций, определяющих инвариантные подпространства в A_N.

5. Приложение

Двухрядная матрица перекрёстной симметрии в группе SU(2) имеет вид

$$A_2 = \frac{1}{2l+1}\begin{pmatrix} -1 & 2l+2 \\ 2l & 1 \end{pmatrix},\ \ l \in N.$$

Рассмотренная в статье матрица есть её частный случай при l=1. Приведём схему вычисления общего случая. На проективной прямой P_1 аффинная координата $X = x_0/x_1$ продолжается на первый нефизический лист по правилу

$$X^{(1)} = \frac{2lX^{(0)}+1}{-X^{(0)}+(2l+2)}$$

и вместе с условием перекрёстной симметрии приводит к следующему значению $X^{(n)}$:

$$X^{(n)} = \frac{n-(l+1)}{n+l},\ \ X^{(0)} = -(1+1/l)\ . \tag{23}$$

Тем самым на любом нефизическом листе определено отношение x_0/x_1 при $z=0$ и для построения S_1, S_2 необходимо найти лишь x_1/x_2. Обозначим это отношение через $\varphi = x_1/x_2$. Оно определяется из системы функциональных уравнений

$$\varphi^{(n)}\varphi^{(1-n)} = 1\ , \tag{24}$$

$$\frac{\varphi^{(n)}}{\varphi^{(-n)}} = \frac{n+l}{n-l}\ , \tag{25}$$

которые следуют из условий унитарности и перекрёстной симметрии (4) на нефизических листах. Здесь использованы те из равенств (4), которые не применялись при получении формул (23). Уравнение (24) имеет очевидное решение в кольце мероморфных функций

$$\varphi^{(n)} = \frac{G(n)}{G(1-n)}\ , \tag{26}$$

где $G(n)$—любая целая функция. Решение (26) может быть представлено в другой форме: $\ln\varphi^{(n)} = g(n-1/2)$, где $g(n-1/2)$— нечётная функция своего аргумента. Последний вид функции $ln\varphi^{(n)}$ удобен для решения уравнения (25), которое легко приводится к виду

$$g(n+1) + g(n) = ln\frac{n+1/2+l}{n+1/2-l}\ . \tag{27}$$

Частное решение неоднородного разностного уравнения (27) может быть найдено с помощью последовательного применения замен неизвестной функции согласно формуле

$$g_m(n) = g_{m+1}(n) + ln\frac{n+(-1)^m\alpha_{m+1}}{n-(-1)^m\alpha_{m+1}}\ ,$$

где $\alpha_k = 1/2 + l - k$ и $g_0(n) = g(n)$. Функция $g_k(n)$ удовлетворяет уравнению

$$g_k(n+1) + g_k(n) = ln\frac{n + 1/2 + (-1)^k(l-k)}{n + 1/2 - (-1)^k(l-k)}$$

и очевидно, что $g_l(n+1) + g_l(n) = 0$. Общее решение этого однородного уравнения определяет функцию $D(z)$ в формуле (6), которая не влияет на вид инвариантных связей между x_0, x_1, x_2. Поэтому положим $g_l = 0$ и получим для $\varphi^{(n)}$ выражение

$$\varphi^{(n)} = \prod_{m=1}^{l} \frac{n - 1/2 - (-1)^m(1/2 + l - m)}{n - 1/2 + (-1)^m(1/2 + l - m)}\,. \tag{28}$$

Исключая из уравнений (23) и (28) параметр n , получим уравнение, определяемое однородным полиномом степени (l+1) от x_0, x_1, x_2. При $l = 1$ оно даёт уравнение (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. A.L.Machovariani,A.G.Rysetsky. Nuclear Phys. A515 (1990) 621.
2. F.E.Low.Phys.Rev. 97 (1955) 1392.
3. G.F.Chew. F.E.Low. Phys.Rev. 101(1956) 1570.
4. В.А.Мещеряков. ОИЯИ Р-2369, Дубна, 1965;
   В.И.Журавлев, В.А.Мещеряков. ЭЧАЯ 5 (1974) 173.
5. G.Wanders. Nuovo Cim. 23 (1962) 816;
   В.А.Мещеряков. ЖЭТФ 51 (1966) 648.
6. V.A.Meshcheryakov in Proceedings Symposium Ahrenshoop, preprint Institut fur Hoohenenergiephysik Akademie der Wisserschaften der DDR, Zeuthen 1981, PHE81-7, 44.
7. В.И.Журавлев, В.А.Мещеряков, К.В.Рерих, ЯФ, 10 (1969) 168.
8. В.А.Мещеряков. ДАН СССР, 174 (1967) 1054.
9. M.Froissart and R.Omnes, Comptes Rendus Acad.Sci. 245 (1957) 2203.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 марта 1997 года.

Мещеряков В.А. Р2-97-107

Римановы поверхности некоторых статических дисперсионных моделей и проективные пространства

В статическом пределе дисперсионных соотношений S-матрица имеет конечный порядок N и состоит из мероморфных функций энергии ω в комплексной плоскости с разрезами $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$. Условие упругой унитарности сводит ее к N функциям $S_i(\omega)$, связанным матрицей перекрестной симметрии A. Аналитическое продолжение $S_i(\omega)$ с физического листа на нефизические приводит к системе нелинейных разностных уравнений. Глобальный анализ ее может быть выполнен в проективных пространствах P_N и P_{N+1}. Обсуждается связь между пространствами P_N и P_{N+1}.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Meshcheryakov V.A. P2-97-107

The Riemann Surfaces of Some Static Dispersion Models and Projective Spaces

The S-matrix in the static limit of a dispersion relation has a finite order N and is a matrix of meromorphic functions of energy ω in the plane with cuts $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$. In the elastic case it reduces to N functions $S_i(\omega)$ connected by the crossing symmetry matrix A. The problem of analytical continuation of $S_i(\omega)$ from the physical sheet to unphysical ones can be treated as a nonlinear system of difference equations. It is shown that a global analisis of this system can be carried out effectively in projective spaces P_N and P_{N+1}. The connection between spaces P_N and P_{N+1} is discussed.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1997