СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 9673

И.Л. Боголюбский, Е.П.Жидков, Ю.В.Катышев,
В.Г.Маханьков, А.А.Расторгуев

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СОЛИТОНОВ В КЛАССИЧЕСКОЙ φ^4 -ТЕОРИИ ПОЛЯ

1976

P2 - 9673

И.Л. Боголюбский, Е.П.Жидков, Ю.В.Катышев,
В.Г.Маханьков, А.А.Расторгуев

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СОЛИТОНОВ В КЛАССИЧЕСКОЙ φ^4 -ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ I. Введение

Мир сильнонелинейных волновых явлений весьма обширен и разнообразен. Многие интересные свойства проявляют специфические решения нелинейных волновых уравнений, так называемые солитоны (или уединённые волны). К настоящему времени солитонам посвящено изрядное количество публикаций и число это продолжает быстро расти[ж)]. Нужно отметить, что под солитоном всё чаще понимают не только сохраняющие форму и скорость объекты, определение которых дано в обзоре /I /, а вообще локализованные решения нелинейных уравнений, выражающие некоторые экстремальные свойства гамильтонианов или потенциальных энергий полей /2,3/жж). Действительно, как правильно отмечает Т.Д.Ли,"такое узкое определение совершенно *бесполезно в физике частиц, поскольку даже два электрона при* встречном столкновении должны излучать". Интересно, что упругое взаимодействие солитонов существует только в рамках весьма экзотических вполне интегрируемых систем /I/. Незначительная, казалось бы, модификация уравнений (как правило, более последовательно описывающая соответствующие физические явления) приводит к появлению неупругого взаимодействия /4,5/.

При переходе к неодномерной пространственной геометрии, кроме весьма интересного вопроса о характере взаимодействия солитонов (даже для вполне интегрируемых в одномерном случае систем), *естественно встаёт вопрос об их устойчивости*. При этом, если рассматривается устойчивость вдоль "солитонной" координаты (координаты, в направлении которой образовано локализованное решение), естественно назвать такую устойчивость "продольной".

=====================

ж) Литература до 1972 года включительно суммирована в обзоре /I/.

жж) В работе /3/ вместо термина солитон применяется термин экстремон.

Двумерные возмущения приводят к понятию "поперечной" устойчивости.

Отметим, что уже в ранних работах по исследованию существования и количества "частицеподобных" решений (как мы теперь говорим, солитонов) для уравнений /6,7/

$$\varphi'' = \varphi\left(1 - \frac{\varphi^n}{x^n}\right)$$

с краевыми условиями $\varphi(0) = \varphi(\infty) = 0$ и при $n > 1$ было показано отсутствие устойчивости по Ляпунову всех возможных у этой задачи решений. Здесь,естественно,речь идёт о продольной устойчивости.

Более подробно изучен вопрос о продольной устойчивости плоских солитонов уравнений Клейна-Гордона /8/ и синус-Гордона /I/. Проблема поперечной устойчивости для низкочастотных и высокочастотных солитонов в теории плазмы обсуждалась в работах /9/ и /I0/ в рамках уравнений типа Кортевега-де Вриса и Шредингера, соответственно.

Ниже мы рассмотрим вопросы устойчивости (продольной и поперечной) некоторых видов плоских солитонов, при этом ограничимся лишь случаем однополевых теорий.

§ 2. Продольная устойчивость солитонов

В этом разделе мы рассмотрим свойства солитонных решений релятивистски инвариантного уравнения Клейна-Гордона (КГ) с кубической нелинейностью как для действительных, так и для комплексных полей. В частности, уравнения такого типа возникают при описании динамики нелинейных высокочастотных волн в плазме (например, поперечных волн, имеющих линейный спектр $\omega^{t2} = \omega_{pe}^2 + k^2c^2$). Кроме того, нелинейное уравнение КГ

$$\varphi_{tt} - \nabla^2\varphi + m^2\varphi - g^2|\varphi|^2\varphi = 0 \qquad (I)$$

привлекается для построения моделей элементарных частиц конечного размера /II/.

Рассмотрим уравнение (I) в одномерной геометрии и изучим свойства солитонов, существующих в этой модели. Если рассматриваемое поле φ действительное, то имеем уравнение

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + m^2\varphi - g^2\varphi^3 = 0, \qquad (2)$$

которое имеет однопараметрическое семейство солитонных решений (см., например, работу /I2/)

$$\varphi_s(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{g} m \operatorname{sch}\left[\frac{m(x-vt)}{\sqrt{1-v^2}}\right]. \qquad (3)$$

Будем говорить, что солитонное решение уравнения (2) устойчиво, если при представлении решения уравнения (2) в форме $\varphi = \varphi_s + \psi$, где при $t=0$

$$\|\psi\| \ll \|\varphi_s\|$$

в некоторой метрике, $\|\psi\|$ остаётся ограниченной для всех t от нуля до бесконечности.

В работе /I3/ отмечалось, что решение (3) неустойчиво. Найдём аналитические решения, описывающие развитие этой неустойчивости в собственной системе координат солитона (3), а также её инкремент $\gamma = \pi$. Перейдя к безразмерным $t = t_d/m$, $x = x_d/m$, $\varphi = m\varphi_d/g$ и линеаризуя[ж)] (2) относительно решения (3) ($\varphi = \varphi_s + \psi$, $|\psi| \ll |\varphi_s|$), получим для малых возмущений ψ уравнения

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + (1 - 3\varphi_s^2)\psi = 0 . \qquad (4)$$

Разделяя переменные ($\psi(x,t) = e^{st}R(x)$), приходим к задаче на собственные значения

$$R_{xx} + (E + 3\varphi_s^2) R = 0, \qquad E = -(1+s^2),$$

$$R \to 0,, \quad |x| \to \infty .$$

ж) О неустойчивости можно судить по линейному приближению.

Нетрудно убедиться, что эта задача имеет решение

$$R_1(x) \sim \frac{d}{dx}\varphi_s \ , \quad R_1(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} \ , \quad E_1 = -1 \ , \quad s = 0 \ .$$

Поскольку это решение имеет узел, должно существовать безузловое решение с $E_0 < E_1$. Методикой, изложенной в работе /I4/, удается найти его ($R_0(x) = 1/\operatorname{ch}^2 x$, $E_0 = -4$, $s = \pm\sqrt{3}$) и показать, что других решений, помимо $R_0(x)$ и $R_1(x)$, задача не имеет.

Таким образом, поправка к решению (3) выражается формулой $\psi(x,t) = c\exp(st)\operatorname{sch}^2 x$, $|c| \ll 1$ с инкрементом неустойчивости $s = \sqrt{3}$. При переходе в лабораторную систему инкремент уменьшается: $s_{лаб} = s\sqrt{1-v^2}$.

Аналогично исследуем устойчивость солитонных решений, имеющих вид

$$\varphi_s = \pm\frac{m}{g}\operatorname{th}\frac{\gamma m}{\sqrt{2}}(x - vt) \qquad (5)$$

для уравнения поля Хиггса $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - m^2\varphi + g^2\varphi^3 = 0$.

Полагая $\varphi = \varphi_s + \psi$, в безразмерных переменных имеем

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} - (1 - 3\varphi_s^2)\psi = 0 \ .$$

Нетрудно проверить, что $\psi = \varepsilon\varphi_s' = \varepsilon/\operatorname{ch}^2(x/\sqrt{2})$ опять является решением с $E_0 = -2$.

Полагая $\psi = \exp(st)\,R(y)$, $y = x/\sqrt{2}$, из уравнения

$$\frac{1}{2}R_{yy} + \frac{3}{\operatorname{ch}^2 y}R = (s^2+2)R = -E_0 R$$

для $R_0 \sim \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} \sim \varphi_s'$ получим $s^2 = 0$, что означает устойчивость рассматриваемого солитона*). Действительно, поскольку решение R_0 не имеет узлов, уровень $E_0 = -2$ является наинизшим, т.е. для других решений $E_0 > -2$, т.е. $s^2 + 2 < 2$, $s^2 < 0$, а s чисто мнимо, и функция ψ является колеблющейся: $\psi \sim e^{\pm i|s|t}$.

Рассмотрим теперь свойства солитонных решений более общего уравнения (I) ($m=1$, $g=1$). Эти решения образуют двухпараметрическое семейство:

$$\varphi = \sqrt{2}A\operatorname{sch}[\gamma A(x - vt)]\exp\left[\pm i\gamma\sqrt{1-A^2}\,(xv - t)\right]. \quad (6)$$

---

*) В рамках линейного приближения.

Амплитуда A решений (6) изменяется в пределах $0 < A < A_{max} = 1$. При $A \to A_{max}$ солитонные решения (6) переходят в решения (3), неустойчивые относительно продольных возмущений. Рассмотрим предел $A \to 0$. В этом случае, вводя медленно меняющуюся во времени функцию $\psi(x,t)$ по формуле $\varphi = e^{-it}\psi$ и пренебрегая ψ_{tt}, из (I) можно получить уравнение Шрёдингера с кубической нелинейностью:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + |\psi|^2\psi = 0 . \tag{7}$$

Солитонные решения ψ_s уравнения (7) устойчивы относительно малых продольных возмущений /4/. Следовательно, при $A \to 0$ устойчивы и солитоны (6), поскольку в этом случае $\varphi_s \to e^{-it}\psi_s$. В работе /8/ было доказано, что установившиеся решения уравнения (I) вида $f(x)\,e^{i\lambda t}$ устойчивы в случае $\lambda^2 > 1/2$. Аналитическое доказательство неустойчивости этих решений при $0 < \lambda^2 < \frac{1}{2}$ приведено в следующем параграфе. Численные эксперименты с неподвижными солитонами (6) в рамках уравнения (I) подтвердили, что в области $\lambda^2 < 1/2$ они неустойчивы. Имея ввиду, что для солитонов (6) $\lambda^2 = \gamma^2(1-A^2)$, $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$, находим окончательно, что солитоны (6) устойчивы в области $A < \sqrt{\frac{1+v^2}{2}}$ и неустойчивы при $A > \sqrt{\frac{1+v^2}{2}}$. Таким образом, выбором достаточно большой скорости $v \to 1$ можно получить устойчивые в направлении движения солитоны с амплитудой, сколь угодно близкой к единице.

§ 3. Об устойчивости некоторых типов одномерных солитонов в направлении, перпендикулярном их движению (двумерная устойчивость)

Здесь мы рассмотрим вопрос о "поперечной" устойчивости солитонов для нелинейных уравнений Кортевега-де Вриса (КдВ) и Клейна-Гордона с помощью варьирования действия с лагранжианом, проинтегрированным по продольной координате x. При этом класс пробных функций ограничен солитоноподобными функциями*).

---

*) Для случая уравнения типа Шрёдингера с самосогласованным потенциалом такая процедура использовалась в работе /10/.

Проиллюстрируем упомянутый метод на примере уравнения КдВ.

I. Как известно, уравнение

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x + u_{xxx} = 0 \tag{8}$$

может быть получено варьированием действия /I/

$$S = \int \mathcal{L}\, dx\, dt,,$$
$$\mathcal{L}(\psi,\theta) = \frac{1}{2}\theta_x\theta_t + \frac{1}{6}\theta_x^3 + \theta_x\psi_x + \frac{1}{2}\psi^2, \tag{9}$$

где

$$u = \theta_x,\quad \psi = \theta_{xx}.$$

Члены, появляющиеся при движении солитонов под малым углом к оси x, могут быть получены из линейного дисперсионного уравнения, записанного в лабораторной системе координат:

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{k_x^2+k_y^2}}{\sqrt{1+k^2}} = k_x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{k_y^2}{k_x^2} - \frac{3}{2}k_y^2\right).$$

В системе, движущейся с единичной скоростью в направлении оси x, имеем

$$\omega' = k - k_x \simeq \frac{1}{2}\frac{k_y^2}{k_x}\left(1 - 3k_x^2\right). \tag{10}$$

Величина $\alpha = -1$ соответствует положительной, а $\alpha = +1$ — отрицательной дисперсии /9/. При выводе (10), как и в /9/, предполагалось, что $k_y \ll k_x$. Это означает, что могут рассматриваться возмущения в направлении оси y с длиной волны, значительно превышающей ширину солитона.

Используя (10), получим:

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x + u_{xxx} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int^x u\,dx' = -\frac{3}{2}\alpha u_{yyx} \qquad (11)$$

или

$$u_{tx} + \frac{1}{2}(u^2)_{xx} + u_{xxxx} + \frac{\alpha}{2}u_{yy} = -\frac{3}{2}\alpha u_{yyxx} .$$

Это уравнение получается варьированием действия с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\int dx\,dy\Big\{\theta_x\theta_t + \frac{1}{3}\theta_x^3 + 2\theta_x\psi_x + \psi^2 + \frac{3\alpha}{2}\theta_y\psi_y + \frac{\alpha}{2}\big[\theta_y^2 - \theta_y^2(x=\pm\infty)\big]\Big\}, \qquad (11a)$$

если учитывать лишь старшие члены разложения по параметру k_y^2/k_x^2. Для дальнейшего $\mathcal{L}$ удобно переписать в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\int dx\,dy\Big\{u\theta_t + \frac{u^3}{3} + 2uu_{xx} + u_x^2 + \frac{3\alpha}{2}uu_{yy} + \frac{3\alpha}{2}u_x\theta_{yy} + \frac{3\alpha}{2}\theta_y u_{xy} + \frac{\alpha}{2}\big[\theta_y^2 - \theta_y^2(x=\pm\infty)\big]\Big\},\quad \theta = \int u\,dx , \qquad (12)$$

имея в виду, что $\psi_x = \theta_{xxx} + \frac{3}{4}\theta_{yyx}$, $\psi^2 = \theta_{xx}^2 + \frac{3}{2}\theta_{xx}\theta_{yy}$, $\psi_y = \theta_{xxy}$ соответственно в третьем, четвёртом и пятом членах в правой части формулы (11a).

Солитонное решение уравнения (10) есть

$$u = 12 A_0^2\,\mathrm{sech}^2\big[A_0(x - M_0)\big] , \qquad (13)$$

причем

$$M_0 = 4A_0^2 t . \qquad (14)$$

Функция (13) является решением и уравнения (11). Исследование поперечной устойчивости солитона (13) означает, что мы накладываем некоторые возмущения на функцию (13) и изучаем поведение этого возмущения при $t \to \infty$. В случае, если это возмущение остаётся ограниченным при $t \to \infty$, солитонное решение (13) является поперечно устойчивым, если же со временем возмущение неограниченно растёт, то (13) считается поперечно неустойчивым. Мы ограничимся малыми возмущениями амплитуды солитона A_0 и его фазы M_0, когда варьируется не вся функция (13), а лишь A_0 и M_0, причём $A = A_0 + \delta A$, $M = M_0 + \delta M$.

Предполагаем, что A и M являются функциями поперечной координаты y и времени t. Подставляя пробную функцию $u_s = 12A^2\,\mathrm{sch}^2[A(x-M)]$ в (I2) и интегрируя по x от $-\infty$ до $+\infty$, имеем

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{4}{3}M_t A^3 + \frac{16}{5}A^5 - \alpha\left(\frac{2\pi^2}{15}+4\right)AA_y^2 - \alpha\frac{8}{5}A^5M_y^2 + \frac{\alpha}{6}\left(\frac{\pi^2}{3}-2\right)A^{-1}A_y^2 + \frac{2\alpha}{3}A^3M_y^2 .$$

Варьируя действие $\tilde{S} = \int \tilde{\mathcal{L}}\,dy\,dt$ независимо по A и M, получим уравнения движения

$$\alpha A^2M_y^2 - \frac{\alpha}{9}\frac{A_y^2}{A^2} - \frac{2\alpha}{9}\frac{\partial}{\partial y}\frac{A_y}{A} - 2M_tA^2 + 8A^4 - \frac{8\alpha}{3}A_y^2 - 4\alpha A^4M_y^2 + \frac{16\alpha}{3}\frac{\partial}{\partial y}AA_y = 0 , \qquad \text{(I5)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}A^3 - \alpha\frac{\partial}{\partial y}A^3M_y + \frac{12\alpha}{5}\frac{\partial}{\partial y}A^5M_y = 0 .$$

Для исследования дисперсионных свойств этой системы линеаризуем ее вблизи солитонного решения (I3), полагая

$$A = A_0 + \delta A , \quad M = M_0 + \delta M .$$

В нулевом приближении по δA и δM естественно возникает между A_0 и M_0 связь в виде (I4).

В первом приближении по δA и δM получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \alpha k_y^2\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5}A_0^2\right)\left[8A_0^2 + \frac{\alpha k_y^2}{9A_0^2}\left(1-24A_0^2\right)\right] . \qquad \text{(I6)}$$

Это уравнение описывает поперечные неустойчивости, изученные как в работе Кадомцева и Петвиашвили /9/ (КП), так и в работе Шпачека, Шукла и Ю /15/ (ШШЮ). Последняя посвящена исследованию двумерной неустойчивости ионно-звуковых солитонов в замагниченной плазме с $T_e \gg T_i$. Инкременты, которые могут быть найдены из (I6), совпадают с полученными в работах /9,I5/. (Для инкремента ШШЮ-неустойчивости нами найден также численный коэффициент).

Более того, из (I6) следует, что КП - неустойчивость носит пороговый характер и стабилизируется при достаточно больших поперечных волновых числах

$$k_y^2 > (k_y^2)_{thr} = 72\, A_0^4 \approx 72\, k_x^4 , \tag{I7}$$

что непосредственно следует из формулы

$$\omega^2 = \frac{8}{3}\,\alpha\, k_y^2 A_0^2 \left(1 + \frac{\alpha\, k_y^2}{72 A_0^4}\right). \tag{I8}$$

Из (I8) также видно, что, как и в /9/, неустойчивы солитоны с положительной $(\alpha < 0)$ дисперсией, именно для них второй член в скобке становится отрицательным и определяет порог неустойчивости. Для волн с отрицательной дисперсией $(\alpha > 0)$ этот член положителен и приводит лишь к изменению частоты.

Отметим, что (I6) содержит также стабилизацию ШШЮ-неустойчивости; однако порог её лежит на пределе области применимости уравнения (II), так как $\omega^2 = -\frac{32}{3}\alpha A_0^4 k_y^2 \left(1 - \frac{1}{3}\frac{k_y^2}{A_0^2}\right)$, откуда $(k_y^2)_{thr} > 3A_0^2 \sim 3\, k_x^2$, в то время как формула (I7) выполняется при $A_0 < \frac{1}{9}$ ($A_0 \ll 1$, условие применимости (8)). Подчеркнем также тот важный, как будет видно из дальнейшего, факт, что инкремент неустойчивости γ_k пропорционален k_y и обращается вместе с k_y в нуль. Примерный вид инкремента представлен на рис.I.

Перейдём к исследованию поперечной устойчивости солитонов нелинейных уравнений типа Клейна-Гордона.

2. Уравнение Клейна-Гордона с кубической нелинейностью

$$\varphi_{tt} - \nabla^2\varphi + m^2\varphi - g^2\varphi^3 = 0 , \tag{I9}$$

где m и g - параметры, определяющие скалярное поле, получается варьированием действия

$$S_+ = \frac{1}{2}\int\left[(\varphi_t)^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2 + \frac{g^2}{2}\varphi^4\right] dx\, dt .$$

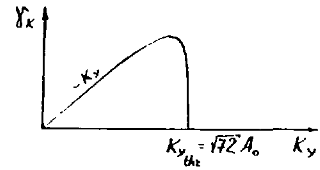
γ_K
$\sim K_y$
$K_{y_{thr}} = \sqrt{1/2}\, A_0$
K_y

Рис.I

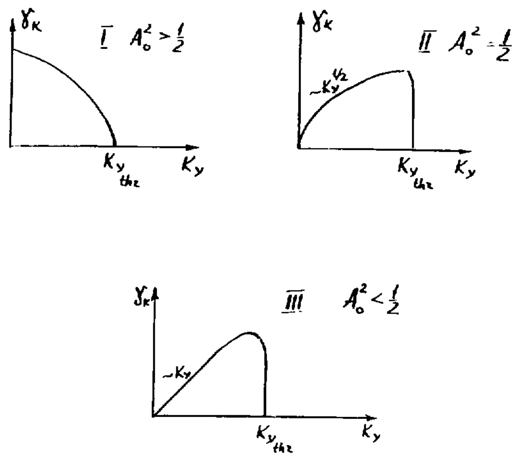
γ_K
I $A_0^2 > \frac{1}{2}$
$K_{y_{thr}}$
K_y
γ_K
II $A_0^2 = \frac{1}{2}$
$\sim K_y^{1/2}$
$K_{y_{thr}}$
K_y
γ_K
III $A_0^2 < \frac{1}{2}$
$\sim K_y$
$K_{y_{thr}}$
K_y

Рис.2

Солитонное решение уравнения (19) определяется формулой (3). В силу релятивистской инвариантности уравнения (19) достаточно исследовать устойчивость стоячих солитонов типа (3)

$$\varphi = \sqrt{2}\,\frac{m}{g}\,\mathrm{sch}(mx) .$$

Будем варьировать действие с лагранжианом

$$L_{KG} = \frac{1}{2}\int dx\,dy\left[(\varphi_t)^2 - (\varphi_x)^2 - (\varphi_y)^2 - m^2\varphi^2 + \frac{g^2}{2}\varphi^4\right].$$

Возьмём пробную функцию в виде

$$\varphi_s = A\sqrt{2}\ \mathrm{sch}\,Bx . \tag{20}$$

Тогда

$$\bar{L}_{KG} = \int\Big[\frac{A_t^2 - A_y^2}{B} - \frac{A}{B^2}(A_tB_t - A_yB_y) + \frac{11}{18}\frac{A^2}{B^3}(B_t^2 - B_y^2) -$$

$$-\frac{1}{3}A^2B - m^2\frac{A^2}{B} + \frac{2}{3}g^2\frac{A^4}{B}\Big]dy .$$

Уравнения движения приобретают вид:

$$\frac{A_yB_y - A_tB_t}{B^2} + \frac{11}{9}\frac{B_t^2 - B_y^2}{B^3}A - \frac{2}{3}AB - 2m^2\frac{A}{B} + \frac{8}{3}g^2\frac{A^3}{B} -$$

$$-2\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{A_t}{B} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{A_y}{B}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{AB_t}{B^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{AB_y}{B^2} = 0,$$

$$\frac{A_y^2 - A_t^2}{B^2} + 2\frac{A}{B^3}(A_tB_t - A_yB_y) - \frac{11}{6}\frac{A^2}{B^4}(B_t^2 - B_y^2) - \frac{1}{3}A^2 + m^2\frac{A^2}{B^2} -$$

$$-\frac{2}{3}g^2\frac{A^4}{B^2} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{AA_t}{B^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{AA_y}{B^2} - \frac{11}{9}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{A^2B_t}{B^3} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{A^2B_y}{B^3}\right) = 0 .$$

Полагая $A = A_0 + \delta A$ и $B = B_0 + \delta B$, получим в линейном по δA и δB приближении:

$$\omega^2 - k_y^2 \simeq -2{,}93 . \tag{21}$$

Отсюда следует, что при $k_y = 0$ солитон (20), а значит, и (3), неустойчив, т.е. вариация амплитуды и ширины одномерного солитона приводит к его неустойчивости*). Неустойчивость стабилизируется при длинах волн возмущений $\lambda_y = 1/k_y$ порядка продольного

===================

*) Этот результат естественно согласуется с полученным в предыдущем параграфе, так как при $k_y = 0$ уравнение (21) фактически описывает "продольную устойчивость".

размера солитона $\lambda_y \simeq m \simeq \Delta\lambda$. Поперечная устойчивость солитона огибающей (6) для уравнения (I) выясняется с помощью пробной функции

$$\varphi_s = \frac{\sqrt{2}}{g} A \, \mathrm{sch}(Ax) \exp(-i\Phi). \qquad (22)$$

При этом $\mathcal{L} \sim \int dy \left[(\Phi_t^2 - \Phi_y^2) A + \frac{11}{18} \frac{A_t^2 - A_y^2}{A} + \frac{1}{3} A^3 - m^2 A \right]$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t A - \frac{\partial}{\partial y} \Phi_y A = 0,$$

$$\Phi_t^2 - \Phi_y^2 - \frac{11}{18} \frac{A_t^2 - A_y^2}{A^2} - \frac{11}{9} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{A_t}{A} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{A_y}{A} \right) - m^2 + A^2 = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = k_y^2 + \frac{9}{11} \left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + (1 - A_0^2) k_y^2 \frac{22}{9}} \right), \qquad (23)$$

где $\Delta = 1 - 2A_0^2$, причём $\lambda_0^2 = 1 - A_0^2$.

Поскольку условие существования солитона (6) есть $0 < A_0^2 < 1$, целесообразно рассмотреть три возможности:

(I) $A_0^2 > \frac{1}{2}$, (II) $A_0^2 = \frac{1}{2}$, (III) $A_0^2 < \frac{1}{2}$.

В первом случае ($A_0^2 > \frac{1}{2}$) имеем неустойчивость при

$$k_y^2 < (k_y^2)_{th} = \left(A_0^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{2}{\beta} \qquad (24)$$

(здесь и далее коэффициент $\beta = 11/18$). При $A_0 \to 1$ переходим к неустойчивости типа (21). Если $A_0^2 = 1/2$, имеем $\lambda_0^2 = A_0^2$ и

$$\omega^2 = k_y^2 \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}} k_y A_0 \qquad (25)$$

При $k_y^2 < A_0^2/\beta$ уравнение (25) имеет "неустойчивый" корень $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, пропорциональный $k_y^{1/2}$ для малых k_y.

Наконец, в случае $A_0^2 < 1/2$ из уравнения (23) находим, что "неустойчивый" корень появляется также, если

$$k_y^2 < A_0^2/\beta, \tag{26}$$

однако теперь $\mathrm{Im}\,\omega \sim k_y$ при малых $k_y^2 \ll \frac{1}{\beta}\frac{1-2A_0^2}{1-A_0^2}$,

$$\gamma_k = k_y \frac{A_0}{\sqrt{1-2A_0^2}}. \tag{27}$$

Выражение (27) для $A_0 \ll 1$ совпадает с инкрементом неустойчивости солитонов уравнения типа Шрёдингера /10/, что, как отмечалось выше, вполне естественно (см. получение (7)). Примерный вид инкрементов γ_k как функция k_y в областях I, II и III представлен на рис. 2.

Из этих рисунков видно, что, если кривая $\gamma_k(k_y)$ начинается из начала координат, то имеет место "продольная" устойчивость солитона[ж)], в случае, представленном на рис. 2.I функция $\gamma_k(k_y)\neq 0$ при $k_y = 0$, что означает продольную неустойчивость солитона[жж)].

3. Перейдём к исследованию "поперечной" устойчивости солитонов (типа ступенек) для уравнения Хиггса. Для действительного поля это уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi - \varphi + \varphi^3 = 0 \quad (m = g = 1),$$

лагранжиан которого есть

$$L = \frac{1}{2}\int dx\,dy\left(\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 + \varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi^4\right). \tag{28}$$

=====================

ж) Во всяком случае, по отношению к рассматриваемым видам возмущений.

жж) Следует подчеркнуть, что наши результаты по определению области устойчивости солитона подтверждают результаты Л.Г. Заставенко, полученные с помощью минимизации функционала /8/, где приведена формула для области устойчивости $1 > \lambda_0 > \frac{n}{2}$, ($n$ – размерность пространства). Отсюда при $n=2$, область устойчивости исчезает, т.е. двумерный солитон неустойчив.

Исследуем вначале наиболее простой случай, когда возмущается лишь форма солитона и сохраняются вакуумные значения поля $\varphi_\pm = \pm 1$. При этом пробная функция имеет вид

$$\varphi_s = \pm \, th[B(y,t)x].$$

Подставляя её в (28) и вычитая вакуумное значение $\mathcal{L} = \frac{1}{4}\int dx$, получим после варьирования по B

$$\frac{1}{B_0^3}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)B = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{2}B^{-2}\right),$$

т.е. $B_0^2 = 1/2$, а для $\delta B = B - B_0$ уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\delta B + \frac{3}{2}\,\delta B = 0 .$$

Нетрудно проверить, что функция

$$\varphi_s = \pm A \, th(x/\sqrt{2})$$

также приводит к устойчивости

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\delta A + \frac{8}{3}\,\delta A = 0, \quad \text{где} \quad \delta A = A - 1 .$$

Здесь следует отметить, что вариация амплитуды солитона приводит к одновременной вариации вакуумных значений поля и, следовательно, требует в принципе бесконечной энергии, однако, в силу того, что возмущения вакуума устойчивы (дисперсионное соотношение $\omega^2 = k^2 + 2$), мы можем соответствующую часть лагранжиана, относящуюся к возмущению вакуума, вычесть из (28) и варьировать оставшуюся конечную величину, т.е. $\mathcal{L}_s = \mathcal{L} - \mathcal{L}_{vac}$, где

$$\mathcal{L}_{vac} = \frac{1}{2}\int dx\,dy\left\{\varphi_t^2 - \varphi_y^2 + \varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi^4\right\}_{x=\infty} .$$

Здесь интересно отметить также, что использование для солитонного решения пробной функции в виде

$$\varphi_s = A \, th(Ax/\sqrt{2}) \qquad (29)$$

приводит к неустойчивости

$$\omega^2 = -\frac{9}{2}k_y^2 \qquad (A_0 = 1) .$$

Эта, по-видимому, нефизическая неустойчивость появляется из-за искусственной жесткой связи (резонанс!) между колебаниями солитона и вакуума, вносимой в систему выбором φ_s в форме (29).

Действительно, разрыв этой связи, т.е. переход к пробной функции

$$\varphi_s = A\,\mathrm{th}\,Bx$$

приводит к дисперсионному уравнению

$$\omega_\pm^2 = (1{,}69 \pm 0{,}141) + k_y^2 , \tag{30}$$

не имеющему неустойчивых решений.

Рассмотрим теперь общий случай комплексного поля Хиггса. Уравнение, Лагранжиан и солитонное решение $(c \cdot v_s = 0)$ суть

$$\varphi_{tt} - \nabla^2\varphi - \varphi + |\varphi|^2\varphi = 0,,$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\int dx\,dy \left\{ |\varphi_t|^2 - |\varphi_x|^2 - |\varphi_y|^2 + |\varphi|^2 - \frac{1}{2}|\varphi|^4 \right\} ,$$

$$\varphi_s = \pm e^{\pm i\lambda_0 t}\sqrt{1+\lambda_0^2}\;\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{1+\lambda_0^2}{2}}\,x\right). \tag{31}$$

Выбор пробной функции диктуется видом решения (31) и отмеченной выше особенностью (возможность резонанса). Поэтому

$$\varphi_s = \exp(i\Phi)\,A\,\mathrm{th}\,Bx \tag{32}$$

и варьирование должно проводиться по Φ , A и B независимо. Проинтегрированный по x лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{2}\int dy \Big\{ -\frac{A^2}{B}(\Phi_t^2 - \Phi_y^2) - \frac{1}{B}(A_t^2 - A_y^2) + \frac{A}{B^2}(A_t B_t - A_y B_y) +$$
$$+ \frac{2}{9}\frac{A^2}{B^2}(B_t^2 - B_y^2) - \frac{2}{3}A^2 B - \frac{A^2}{B} + \frac{2}{3}\frac{A^4}{B} \Big\} . \tag{33}$$

Положим вначале все производные по y равными нулю, тогда, варьируя по A, B и Φ, получим, соответственно

$$-2\frac{A}{B}\Phi_t^2 - \frac{4}{3}AB - 2\frac{A}{B} + \frac{8}{3}\frac{A^3}{B} + 2\frac{A_{tt}}{B_0} - \frac{B_{tt}}{B_0^2}A_0 = 0,$$

$$\frac{A^2}{B^2}\Phi_t^2 - \frac{2}{3}A^2 + \frac{A^2}{B^2} - \frac{2}{3}\frac{A^4}{B^2} - A_0\frac{A_{tt}}{B_0^2} - \frac{4}{9}A_0^2\frac{B_{tt}}{B_0^3} = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{A^2\Phi_t}{B} = 0 .$$

В нулевом порядке теории возмущений имеем

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = \lambda_0 ,$$

$$-\lambda_0^2 - \frac{2}{3} B_0^2 - 1 + \frac{4}{3} A_0^2 = 0 ,$$

$$\lambda_0^2 - \frac{2}{3} B_0^2 + 1 - \frac{2}{3} A_0^2 = 0 ,$$

откуда $A_0^2 = \lambda_0^2 + 1$, $B_0^2 = \frac{1}{2} A_0^2$.

В первом приближении по $\delta A = A - A_0$, $\delta B = B - B_0$ и $\delta\Phi = \Phi - \Phi_0$ получаем однородную систему уравнений, из которой находим

$$\omega^2 = 3{,}69 A_0^2 - 2 \pm \sqrt{7{,}97 A_0^4 - 11{,}95 A_0^2 + 4} . \quad (34)$$

Правая часть этого выражения всегда больше нуля, так как $A_0^2 = 1 + \lambda_0^2$, а для $\lambda_0 \to 0$, $A_0 \to 1$ совпадает с (30) при $k_y = 0$.

И, наконец, если $k_y \neq 0$, дисперсионное уравнение имеет вид

$$\frac{13}{12} \omega_-^6 - \frac{1}{9}(43 + 94\lambda_0^2)\omega_-^4 + (4 + 12\lambda_0^2 + 8\lambda_0^4 - \frac{13}{3}\lambda_0^2 k_y^2)\omega_-^2 + \quad (35)$$
$$+ 4\lambda_0^2 A_0^2 k_y^2 = 0 ,$$

где $\omega_-^2 = \omega^2 - k_y^2$.

Для наиболее простого случая $k_y \ll 1$ легко получить 3 корня для ω_-^2 . Первые два больших корня совпадают с (34), последующий (малый) есть

$$\omega_-^2 = - \frac{\lambda_0^2(\lambda_0^2 + 1)}{1 + 3\lambda_0^2 + 2\lambda_0^4} k_y^2$$

или

$$\omega^2 = k_y^2 \frac{(1 + \lambda_0^2)^2}{1 + 3\lambda_0^2 + 2\lambda_0^4} = k_y^2 \frac{A_0^2}{1 + 2\lambda_0^2} ,$$

т.е. мы опять получили устойчивое решение. В общем случае для исследования уравнения (35) необходимо вычислить его дискриминант, который оказывается всегда отрицательным (например, для $\lambda_0 = 1$ $D = -124 + 124k_y^2 - 19{,}2k_y^4 - 2{,}35k_y^6$), а (35) не имеет комплексных корней для ω_-^2. Кроме того, исследование (35) показывает, что для его корней

$$\omega^2 \geqslant 0$$

(равенство возможно при $k_y = 0$) это означает, что солитон комплексного поля Хиггса также оказывается устойчивым (как в продольном, так и в поперечном направлениях) во всяком случае по отношению к рассмотренным довольно общим видам возмущений*) (см. также /16/)

§ 4. Заключение

Полученные результаты позволяют сделать некоторые заключения о свойствах рассмотренных объектов.

Так,оказывается, что область устойчивости солитонов колоколообразной формы исчезает для двумерных возмущений, масштаба, во всяком случае,большего размера солитона. Это означает, что двухмасштабные солитоны уравнения Клейна-Гордона (один из которых определяет размер солитона, другой-область локализации его энергии) типа пузыря,по-видимому,будут неустойчивы и начнут разбиваться на более мелкие образования (аналогично случаю с солитонами нелинейного уравнения типа Шрёдингера /17/). Вопрос об устойчивости одномасштабных солитонов в трёхмерном пространстве пока остаётся открытым (стабилизация при больших k_y ?). По-видимому, именно рассмотренная выше неустойчивость ответственна за срыв самоканализации лазерного луча, при распространении его в плазме (в которой дисперсионное уравнение $\omega^2 = k^2 + \omega_{pe}^2$). Солитоны типа ступеньки (kinks) проявляют удивительную склонность оставаться устойчивыми даже в случае комплексного поля,когда они фактически представляют собой вращающуюся смесь солитонного и антисолитонного состояний. Поэтому именно такие образования, как нам кажется,наиболее интересны с точки зрения построения моделей протяженных частиц /3/, если удаётся найти продольно устойчивые солитоны в трёхмерном пространстве.

========================

*) Отметим, что этот наш результат противоречит утверждению, высказанному в работе /3/.

ЛИТЕРАТУРА:

I. A.C.Scott, F.Y.F.Chu, D.W.McLaughlin, Proc. IEEE, 61, 1443(1973).

2. T.D.Lee, Examples of four-dimensional soliton solutions and abnormal nuclear states, Columbia University preprint CO-2271-60 (1975), an invited talk given at the Conf."Extended Systems in Field Theory", June 1975, Paris (to be published in the Proc. of the Conf. in Physics Reports).

3. А.М.Поляков. ЖЭТФ, 68, I975, I975.

4. Kh.O.Abdulloev, I.L.Bogolyubsky, V.G.Makhankov, Phys. Lett.,48A, 161(1974); Nuclear Fusion, 15, 21(1975); Л.М.Дегтярев, В.Г.Маханьков, Л.И.Рудаков. ЖЭТФ, 67, 533, I974.

5. И.Л.Боголюбский. ОИЯИ, Р9-8698, Дубна, I975.

6. Е.П.Жидков, В.П.Шириков. ЖВМ и МФ, 4, 804, 1964; Е.П.Жидков, В.П.Шириков, И.В.Пузынин. В сб. "Материалы совещания по математическим методам решения задач ядерной физики, Дубна, I7-20 ноября I964 г." ОИЯИ, 2005, Дубна, I965, стр.I3; Е.П.Жидков, И.В.Пузынин, ЖВМ и МФ, 7, I086, I967.

7. Z.Nehari, Proc.Royal Irish Acad., A62, 118, 1963.

8. Л.Г.Заставенко. ПММ, 29, 430, I965.

9. Б.Б.Кадомцев, В.И.Петвиашвили. ДАН СССР, I92, 753, I970; Soviet Phys.-Doklady,I5, 539 (I970).

I0. Л.М.Дегтярев, В.Е.Захаров, Л.И.Рудаков. ЖЭТФ, 68, II5, I975.

II. В.Б.Гласко, Ф.Лерюст, Я.П.Терлецкий, С.Ф.Шушурин. ЖЭТФ, 35, 452, I958.

I2. A.S.Davydov, N.I.Kislukha, An example of a self-localized nonlinear relativistic field, Preprint ITP-72-127E, Kiev, 1972.

I3. R.H.Hobart, Proc. Phys. Soc., 82, 201, 1963.

14. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика, Физматгиз, М.-Л., 1963, стр. 97.

15. K.H.Spatschek, P.K.Shukla, M.Y.Yu, Phys. Lett., 54A, 419 (1975); M.Y.Yu, P.K.Shukla, K.H.Spatschek, Bull. Amer. Phys. Soc., 20, 1292 (1975).

16. Ю.В.Катышев, В.Г.Маханьков. ОИЯИ, Р4-9507, Дубна, 1976.

17. J.Denavit, N.R.Pereira, R.N.Sudan, Phys. Rev. Lett., 33, 1435 (1974).

Рукопись поступила в издательский отдел
2 апреля 1976 года.