

С322  
С-844

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



2362/2-76

28/II-76

P2 - 9669

В.Н.Стрельцов

ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА  
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАТЕРИИ

**1976**

**P2 - 9669**

**В.Н.Стрельцов**

**ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА  
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАТЕРИИ**

Как известно, энергия взаимодействия системы зарядов и токов с внешним электромагнитным полем, потенциалы которого  $\phi$  и  $A_\alpha$ , определяется выражением

$$E^0 = \int (\rho^0 \phi^0 + j_\alpha^0 A_\alpha^0) dV^0, \quad /1/$$

где  $\rho$  и  $j_\alpha$  ( $\alpha=1,2,3$ ) - плотности зарядов и токов соответственно,  $dV$  - элемент пространственного объема, а индекс "0" указывает на то, что используемая система отсчета совпадает с системой покоя ( $K^0$ ) рассматриваемых проводников с зарядами и токами.

В рамках четырехмерного представления равенство /1/ будет иметь вид

$$P_4^0 = \int (j_4^0 A_4^0 - j_\alpha^0 A_\alpha^0) dV_4^0, \quad /2/$$

где  $P_4 = iE$  - компонента 4-импульса,  $j_i$  ( $j_\alpha, i\rho$ ) - 4-плотность тока,  $A_i$  ( $A_\alpha, i\phi$ ) - 4-потенциал поля,  $dV_4 = idV$  - компонента 4-вектора элемента объема,  $C = 1$ .

Последнее выражение /2/ можно представить в следующем ковариантном виде:

$$P_4^0 = \int (j_4^0 A_4^0 + A_4^0 j_4^0 - \delta_{44} j_i^0 A_i^0) dV_4^0 \quad /3/$$

или

$$P_4^0 = \int S_{44}^0 dV_4^0. \quad /3a/$$

Введенная таким образом величина  $S_{44}$ , очевидно, может быть истолкована как плотность энергии в единице объема. Больше того, ее можно считать компонентой /симметричного/ тензора энергии-импульса электрической материи, имеющего вид

$$S_{ik} = j_i A_k + A_i j_k - \delta_{ik} j_l A_l \quad /4/$$

Тензор  $S_{ik}$  можно выразить только через 4-плотность тока, если воспользоваться решением неоднородного волнового уравнения для потенциала  $A_i$ . В явно ковариантной форме это решение было найдено в свое время Герглотцем /см., напр., /1/ /:

$$A_i = \int \frac{j_i}{4\pi^2 R^2} d\Omega \quad /5/$$

где  $d\Omega$  - элемент 4-объема,  $R^2 = r^2 + x_4^2$ .

На основании /4/ легко получить явный вид других составляющих тензора  $S_{ik}$ . Так, например, для его компонент  $S_{11}$  и  $S_{41}$ , описывающих потоки X-компоненты импульса и энергии, найдем

$$S_{11} = j_1 A_1 - j_2 A_2 - j_3 A_3 - j_4 A_4 \quad /6/$$

$$S_{41} = S_{14} = j_4 A_1 + j_1 A_4$$

Образуем теперь дивергенцию  $S_{ik}$ . При этом получим

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = F_{ik} j_k + A_i \frac{\partial j_k}{\partial x_k} + j_i \frac{\partial A_k}{\partial x_k} + A_k \left( \frac{\partial j_i}{\partial x_k} - \frac{\partial j_k}{\partial x_i} \right) \quad /7/$$

Легко видеть, что на основании уравнения непрерывности и условия Лоренца для потенциалов второй и третий члены в правой части /7/ исчезают. Что касается последнего члена  $A_k \text{rot}_{ki} j$ , то он также должен исчезать на основании условия обращения в нуль частной производной второго порядка по одной той же координате от полного заряда системы.

В результате справа остается только известное выражение для плотности силы Лоренца:

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = F_{ik} j_k. \quad /7a/$$

Таким образом, другое известное выражение

$$- \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = F_{ik} j_k, \quad /8/$$

где  $T_{ik}$  - тензор энергии импульса электромагнитного поля, мы сможем представить в форме

$$\frac{\partial R_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad /9/$$

где  $R_{ik} = T_{ik} + S_{ik}$ .

В заключение отметим, что в общем случае равенство /3а/ должно быть заменено формулой

$$P_i^0 = \int S_{ik}^0 dV_k^0. \quad /10/$$

Поскольку при этом в общем  $S_{ik}^0 \neq 0$ , то, чтобы обеспечить выполнение требуемого равенства /1/, мы с необходимостью должны положить  $dV_k^0 = 0$ . Такой шаг соответствует определению элемента пространственного объема в  $K^0$ -системе с помощью трех инфинитезимальных векторов специального вида  $dx_i^0 (dx^0, 0, 0, 0)$ ,  $\delta x_i^0 (0, dy^0, 0, 0)$  и  $\Delta x_i^0 (0, 0, dz^0, 0)^*$ .

### Литература

1. А.Зоммерфельд. *Электродинамика*, М., ИЛ, §29, 1958.
2. В.Н.Стрельцов. *ОИЯИ, Р2-6710*, Дубна, 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел  
1 апреля 1976 года.

\* В этой связи см., напр. /2/.