ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 9651

Н.А.Черников

КОВЕКТОР КРУЧЕНИЯ В ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1976

P2 - 9651

Н.А.Черников

КОВЕКТОР КРУЧЕНИЯ В ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в "Communications in Mathematical Physics"

В единой теории поля Эйнштейна аффинная связность $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ задается системой уравнений

$$g_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}, \qquad /1/$$

где $g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \phi_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$ - симметричная, $\phi_{\alpha\beta}$ - антисимметричная части тензора $g_{\alpha\beta}$. Предполагается, что тензор $h_{\alpha\beta}$ имеет сигнатуру /1,-1,-1,-1/, а тензорные индексы принимают значения 0,1,2,3.

Систему линейных уравнений /1/ с 64 неизвестными $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ при произвольно заданных $g_{\alpha\beta}$ и $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}$ мы сведем здесь к системе

$$S^{\gamma}_{\alpha\beta} + \phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\nu}_{\beta}S^{\gamma}_{\mu\nu} - \phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\gamma}_{\sigma}S^{\sigma}_{\mu\beta} - \phi^{\nu}_{\beta}\phi^{\gamma}_{\sigma}S^{\sigma}_{\alpha\nu} = \Psi^{\gamma}_{\alpha\beta} \qquad /2/$$

линейных же уравнений с 24 неизвестными $S^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha})$. Все величины в записи /2/ - тензорные. Искомым считается тензор кручения $S^{\gamma}_{\alpha\beta}$, а тензоры ϕ^{μ}_{α} и $\Psi^{\gamma}_{\alpha\beta}$ выражаются через заданные величины $g_{\alpha\beta}$ и $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}$ указанным ниже образом.

Имеем $h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha})$, $\phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - g_{\beta\alpha})$. Вводим тензор $h^{\alpha\beta}$, взаимный тензору $h_{\alpha\beta}$, так что $h^{\alpha\sigma} h_{\sigma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$, и пишем $\phi^{\mu}_{\alpha} = \phi_{\alpha\sigma} h^{\sigma\mu}$, $\Psi^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Psi_{\alpha\beta\sigma} h^{\sigma\gamma}$, где

$$\Psi_{\alpha\beta\gamma} = \phi_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{3}{2}\phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\nu}_{\beta}\phi_{(\mu\nu\gamma)}, \qquad /3/$$

$$\phi_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \phi_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \left\{ {\sigma \atop \gamma\alpha} \right\} \phi_{\sigma\beta} - \left\{ {\sigma \atop \gamma\beta} \right\} \phi_{\alpha\sigma} = D_{\gamma}\phi_{\alpha\beta}, \qquad /4/$$

$$\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} = \frac{1}{2} h^{\gamma\sigma} \left(\frac{\partial h_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial h_{\sigma\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} \right). \qquad /5/$$

Что касается скобок, заключающих индексы в тензоре $\phi_{\alpha\beta\gamma}$, то для любого тензора $T_{\alpha\beta\gamma}$ пишем

$$T_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\gamma\alpha\beta} + T_{\beta\gamma\alpha}). \qquad /6/$$

Выражение /5/ есть символ Кристоффеля для тензора $h_{\alpha\beta}$, так что /4/ является коварнантной производной $D_{\gamma}\phi_{\alpha\beta}$ от тензора $\phi_{\alpha\beta}$ по связности /5/.

Основываясь на /2/, мы найдем здесь коректор кручения $S_{\alpha} = S^{\gamma}_{\alpha\gamma}$ в виде

$$S_{\alpha} = \frac{(1 + F)\Psi^{\gamma}_{\alpha\gamma} + \phi^{\beta}_{\sigma}\phi^{\sigma}_{\gamma}\Psi^{\gamma}_{\alpha\beta}}{1 + F - G^{2}}, \qquad /7/$$

где

$$F = -\frac{1}{2}\phi^{\alpha}_{\beta}\phi^{\beta}_{\alpha}, \quad G = \frac{\phi_{01}\phi_{23} + \phi_{02}\phi_{31} + \phi_{03}\phi_{12}}{\sqrt{-h}}, \qquad /8/$$

h - определитель матрицы $(h_{\alpha\beta})$. Это важный результат, поскольку в число дифференциальных уравнений единой теории поля входят уравнения $S_{\alpha} = 0$.

Затем, пользуясь конкретным выражением для $\Psi^{\gamma}_{\alpha\beta}$, формулу /7/ представим в виде:

$$S_{\alpha} = \frac{\delta^{\mu}_{\alpha} - \phi^{\mu}_{\nu}\phi^{\nu}_{\alpha}}{\sqrt{1 + F - G^2}} D_{\gamma} \frac{\phi^{\gamma}_{\mu} + F\phi^{\gamma}_{\mu} + \phi^{\gamma}_{\beta}\phi^{\beta}_{\sigma}\phi^{\sigma}_{\mu}}{\sqrt{1 + F - G^2}}, \qquad /9/$$

где, как и выше, символ D_{γ} означает ковариантную производную по связности /5/. Из формулы же /9/ следует, что уравнения $S_{\alpha} = 0$ эквивалентны уравнениям

$$D_{\gamma} \frac{\phi^{\gamma}_{\mu} + F\phi^{\gamma}_{\mu} + \phi^{\gamma}_{\beta}\phi^{\beta}_{\sigma}\phi^{\sigma}_{\mu}}{\sqrt{1 + F - G^2}} = 0 \qquad /10/$$

нелинейной электродинамики Борна-Инфельда в римановом мире с метрическим тензором $h_{\alpha\beta}$.

Переходя к решению задачи, приведем сначала необходимые здесь сведения об алгебре аффиноров. Аффинор ϕ,т.е. двухвалентный смешанный тензор, имеет компоненты ϕ^{β}_{α}. Если компоненты вектора ξ^{α} располагаем в столбец, а ковектора ξ_{α} - в строку, то из компонент ϕ^{β}_{α} составляем матрицу (ϕ) так, чтобы элемент ϕ^{β}_{α} оказался на пересечении столбца с номером α и строки с номером β. Произведение $\phi\psi$ двух аффиноров имеет компоненты $\phi^{\beta}_{\sigma}\psi^{\sigma}_{\alpha}$. Складываются аффиноры покомпонентно. Символом 1 обозначаем как число, так и единичный аффинор. Компоненты аффинора 1 представляются символом Кронекера δ^{β}_{α}. Равным образом, символом F обозначаем как число, так и аффинор с компонентами $F\delta^{\beta}_{\alpha}$. Символом $\bar{\phi}^{\beta}_{\alpha}$ обозначаем алгебраическое дополнение элемента ϕ^{α}_{β} в матрице (ϕ). Величины $\bar{\phi}^{\beta}_{\alpha}$ составляют аффинор - адъюнкт $\bar{\phi}$ аффинора ϕ. Он равняется

$$\bar{\phi} = F_3 - F_2\phi + F_1\phi^2 - \phi^3, \qquad /11/$$

где

$$F_1 = \phi^{\alpha}_{\alpha}, \quad F_2 = \frac{1}{2}(\phi^{\alpha}_{\alpha}\phi^{\beta}_{\beta} - \phi^{\alpha}_{\beta}\phi^{\beta}_{\alpha}), \quad F_3 = \bar{\phi}^{\alpha}_{\alpha}.$$

По правилу Крамера имеем $\phi\bar{\phi} = |\phi|$, где $|\phi|$ - определитель матрицы (ϕ), так что, умножая /11/ на ϕ, получаем характеристическое уравнение

$$\phi^4 - F_1\phi^3 + F_2\phi^2 - F_3\phi + |\phi| = 0.$$

В заключение условимся о следующем соответствии $h_{\alpha\sigma}\phi^{\sigma\beta} = \phi^{\beta}_{\alpha} = \phi_{\alpha\sigma}h^{\sigma\beta}$ между тензорами $\phi^{\alpha\beta}$ и $\phi_{\alpha\beta}$ и аффинором ϕ^{β}_{α}.

В нужном нам случае тензор $\phi_{\alpha\beta}$ антисимметричен. Поэтому $F_1 = 0, F_3 = 0, F_2 = F$, $|\phi| = -G^2$, где F и G есть /8/, так что характеристическое уравнение принимает вид:

$$\phi^4 + F\phi^2 = G^2. \qquad /12/$$

Интересен дуальный к $\phi_{\alpha\beta}$ тензор $\phi^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\phi_{\mu\nu}$, составленный с помощью антисимметричного по всем значкам тензора $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$, где $\epsilon^{0123} = \frac{1}{\sqrt{-h}}$. Аффинор $\phi^{\beta}_{\alpha} = \phi_{\alpha\sigma}h^{\sigma\beta}$ и аффинор $\phi^{*\beta}_{\alpha} = h_{\alpha\sigma}\phi^{*\sigma\beta}$ связаны друг с другом двумя равенствами

$$\phi\phi^* = -G, \quad \phi^2 + F = \phi^{*2}. \qquad /13/$$

Умножая второе из этих равенств на ϕ и пользуясь первым, получаем

$$\phi^3 + F\phi = -G\phi^*. \qquad /14/$$

Сравнивая это с /11/, видим, что в данном случае $\phi = G\phi^*$. Умножая /14/ на ϕ, снова приходим к /12/.

Приступим теперь к выводу системы /2/. Будем искать решение системы /1/ в виде суммы

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} + T^{\gamma}_{\alpha\beta}, \qquad /15/$$

в которой первое слагаемое является заданной связностью /5/, а второе - искомым тензором. Для любого тензора вида $T^{\gamma}_{\alpha\beta}$ условимся дальше писать $T^{\gamma}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta\sigma} h^{\sigma\gamma}$, $T_{\alpha\beta\gamma} = T^{\sigma}_{\alpha\beta} h_{\sigma\gamma}$. Подставляя /15/ в /1/, получаем уравнение для тензора T:

$$T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} + \phi^{\sigma}_{\beta} T_{\gamma\alpha\sigma} - \phi^{\sigma}_{\alpha} T_{\beta\gamma\sigma} + \phi_{\alpha\beta\gamma} = 0, \qquad /16/$$

где $\phi_{\alpha\beta\gamma}$ - ковариантная производная /4/. Над всеми слагаемыми, входящими в равенство /16/, выполним операцию, превращающую любой тензор вида $T_{\alpha\beta\gamma}$ в тензор $T_{(\alpha\beta\gamma)}$ по правилу /6/. Такая операция над тензором $\phi^{\sigma}_{\beta} T_{\gamma\alpha\sigma} - \phi^{\sigma}_{\alpha} T_{\beta\gamma\sigma}$ дает нуль. Поэтому из /16/ получаем следствие

$$2T_{(\alpha\beta\gamma)} + \phi_{(\alpha\beta\gamma)} = 0, \qquad /17/$$

так что $T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)}$.

Подставляя это в /16/, приходим к системе уравнений

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \phi^{\sigma}_{\beta} T_{\gamma\alpha\sigma} - \phi^{\sigma}_{\alpha} T_{\beta\gamma\sigma} + \phi_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)}. \qquad /18/$$

Разобьем теперь тензор $T_{\alpha\beta\gamma}$ на части $P_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\alpha\gamma})$ и $S_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\alpha\gamma})$ и в результате из /18/ получим следующую систему уравнений:

$$P_{\alpha\beta\gamma}=\phi^{\sigma}_{\beta}S_{\gamma\alpha\sigma}-\phi^{\sigma}_{\alpha}S_{\beta\gamma\sigma}\,, \qquad /19/$$

$$S_{\alpha\beta\gamma}=\phi^{\sigma}_{\beta}P_{\gamma\alpha\sigma}-\phi^{\sigma}_{\alpha}P_{\beta\gamma\sigma}+\phi_{\alpha\beta\gamma}-\frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)}\,. \qquad /20/$$

Сразу же заметим, что тензор $S_{\alpha\beta\sigma}\,h^{\sigma\gamma}=S^{\ \gamma}_{\alpha\beta}$ **есть тензор кручения, поскольку** $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}=T^{\ \gamma}_{\alpha\beta}-T^{\ \gamma}_{\beta\alpha}$. **Подставляя /19/ в /20/, получаем систему уравнений для тензора** S

$$S_{\alpha\beta\gamma}+\phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\sigma}_{\gamma}S_{\mu\beta\sigma}+\phi^{\nu}_{\beta}\phi^{\sigma}_{\gamma}S_{\alpha\nu\sigma}=$$

$$=\phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\nu}_{\beta}(S_{\nu\gamma\mu}+S_{\gamma\mu\nu})+\phi_{\alpha\beta\gamma}-\frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)}\,. \qquad /21/$$

Из /17/, равно как из /19/ и /20/, следует, что

$$P_{(\alpha\beta\gamma)}=0, \qquad 2S_{(\alpha\beta\gamma)}+\phi_{(\alpha\beta\gamma)}=0. \qquad /22/$$

Значит, $S_{\nu\gamma\mu}+S_{\gamma\mu\nu}=-S_{\mu\nu\gamma}-\frac{3}{2}\phi_{(\mu\nu\gamma)}$. **Подставляя это в /21/, получаем**

$$S_{\alpha\beta\gamma}+\phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\nu}_{\beta}S_{\mu\nu\gamma}+\phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\sigma}_{\gamma}S_{\mu\beta\sigma}+\phi^{\nu}_{\beta}\phi^{\sigma}_{\gamma}S_{\alpha\nu\sigma}=\Psi_{\alpha\beta\gamma}\,, \qquad /23/$$

где $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$ **есть /3/. Поднимая в /23/ индекс** γ, **с помощью тензора** $h^{\alpha\beta}$ **приходим к /2/.**

Умножим теперь равенство /2/ на $(\phi^{n})^{\beta}_{\gamma}$, **где** $n=0,1,2,\dots$, **и свернем произведение по индексам** β **и** γ. **В результате получим**

$$(\phi^{n})^{\beta}_{\gamma}S^{\ \gamma}_{\alpha\beta}=(\phi^{n})^{\beta}_{\gamma}\Psi^{\ \gamma}_{\alpha\beta}+(\phi^{n+2})^{\beta}_{\gamma}S^{\ \gamma}_{\alpha\beta}\,. \qquad /24/$$

Два экземпляра формулы /24/ /n =0 и n =2/ вместе с /12/ дают

$$S_{\alpha} = \left(\frac{1 + F + \phi^2}{1 + F - G^2}\right)^{\beta}_{\gamma} \Psi^{\gamma}_{\alpha\beta}\,, \qquad /25/$$

т.е. формулу /7/. Два других экземпляра формулы /24/ /n =1 и n =3/ вместе со следствием $\phi^5 + F\phi^3 = G^2\phi$ из /12/ дают

$$\phi^{\beta}_{\gamma} S^{\gamma}_{\alpha\beta} = \left(\frac{\phi + F\phi + \phi^3}{1 + F - G^2}\right)^{\beta}_{\gamma} \Psi^{\gamma}_{\alpha\beta} = \left(\frac{\phi - G\phi^*}{1 + F - G^2}\right)^{\beta}_{\gamma} \Psi^{\gamma}_{\alpha\beta}\,. \qquad /26/$$

Второй знак равенства в /26/ поставлен на основании /14/.

Дальше воспользуемся конкретным выражением /3/ для тензора Ψ. Имеем

$$\phi^{\beta}_{\gamma} \Psi^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\phi^{\beta\gamma}\phi_{\beta\gamma\alpha}\,, \quad \phi^{*\beta}_{\gamma} \Psi^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\phi^{*\beta\gamma}\phi_{\beta\gamma\alpha}\,. \qquad /27/$$

В согласии с /8/ формулу для G запишем в виде:

$$G = \frac{1}{4}\phi^{*\beta\gamma}\phi_{\beta\gamma} = \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\beta\gamma}\phi_{\mu\nu}\phi_{\beta\gamma}\,. \qquad /28/$$

Так как ковариантная производная D_{α} как от метрического тензора $h^{\beta\gamma}$, так и от объемного тензора $\epsilon^{\mu\nu\beta\gamma}$ равняется нулю, то из выражения /8/ для F и выражения /28/ для G следует

$$\phi^{\beta\gamma}\phi_{\beta\gamma\alpha} = \frac{\partial F}{\partial x^{\alpha}}\,, \qquad \phi^{*\beta\gamma}\phi_{\beta\gamma\alpha} = 2\frac{\partial G}{\partial x^{\alpha}}\,. \qquad /29/$$

Из /26/, /27/ и /29/ получаем

$$\phi^{\beta}_{\gamma} S^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \ln \sqrt{1 + F - G^2}. \qquad /30/$$

Наряду с этим результатом, из /12/ получаем следствие

$$(1 + F + \phi^2)(1 - \phi^2) = 1 + F - G^2. \qquad /31/$$

Поэтому, чтобы получить формулу /9/, нам остается доказать равенство

$$S_{\alpha} - \phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\beta}_{\gamma} S^{\gamma}_{\mu\beta} = (1 - \phi^2)^{\mu}_{\alpha} D_{\gamma}\left(\frac{\phi + F\phi + \phi^3}{1 + F - G^2}\right)^{\gamma}_{\mu}. \qquad /32/$$

В соответствии с /25/ и /26/, обозначая

$$T^{(k)}_{\alpha} = (\phi^{2k})^{\beta}_{\gamma} \Psi^{\gamma}_{\alpha\beta} - \phi^{\mu}_{\alpha} (\phi^{2k+1})^{\beta}_{\gamma} \Psi^{\gamma}_{\alpha\beta},$$

запишем

$$S_{\alpha} - \phi^{\mu}_{\alpha} \phi^{\beta}_{\gamma} S^{\gamma}_{\mu\beta} = \frac{(1 + F)T^{(0)}_{\alpha} + T^{(1)}_{\alpha}}{1 + F - G^2}.$$

Тензор $(\phi^{n})^{\alpha\beta}$ симметричен при четных $n = 2k$ и антисимметричен при нечетных $n = 2k + 1$. Поэтому

$$(\phi^{2k})^{\beta}_{\gamma} \Psi^{\gamma}_{\alpha\beta} = (\phi^{2k})^{\beta\gamma} \phi_{\alpha\beta\gamma} + \frac{3}{2} \phi^{\mu}_{\alpha} (\phi^{2k+1})^{\beta\gamma} \phi_{(\mu\beta\gamma)},$$

$$(\phi^{2k+1})^{\beta}_{\gamma} \Psi^{\gamma}_{\alpha\beta} = (\phi^{2k+1})^{\beta\gamma} \left[\frac{3}{2} \phi_{(\alpha\beta\gamma)} - \phi_{\alpha\beta\gamma}\right],$$

а следовательно,

$$T^{(k)}_{\alpha} = (\phi^{2k})^{\beta\gamma} \phi_{\alpha\beta\gamma} + \phi^{\mu}_{\alpha} (\phi^{2k+1})^{\beta\gamma} \phi_{\mu\beta\gamma}.$$

Продифференцировав тождество $(\phi^{n+1})^{\gamma}_{\alpha} = (\phi^{n})^{\gamma}_{\mu} \phi^{\mu}_{\alpha}$, получим

$$(\phi^n)^{\beta\gamma}\phi_{\alpha\beta\gamma} = D_\gamma(\phi^{n+1})^\gamma_\alpha - \phi^\mu_\alpha D_\gamma(\phi^n)^\gamma_\mu .$$

Значит,

$$T^{(k)}_\alpha = (1-\phi^2)^\mu_\alpha D_\gamma(\phi^{2k+1})^\gamma_\mu + \phi^\mu_\alpha D_\gamma(\phi^{2k+2} - \phi^{2k})^\gamma_\mu .$$

Отсюда находим

$$(1+F)T^{(0)}_\alpha + T^{(1)}_\alpha = (1-\phi^2)^\mu_\alpha D_\gamma(\phi + F\phi + \phi^3)^\gamma_\mu -$$

$$- \phi^\mu_\alpha \frac{\partial F}{\partial x^\mu} + \phi^\mu_\alpha D_\gamma(\phi^4 + F\phi^2)^\gamma_\mu .$$

Учитывая теперь /12/ и /31/, получаем /32/. Таким образом, формула /9/ доказана. На основании /14/ формулу /9/ можно записать еще и в виде

$$S_\alpha = \frac{\delta^\mu_\alpha - \phi^\mu_\nu \phi^\nu_\alpha}{\sqrt{1+F-G^2}} D_\gamma \frac{\phi^\gamma_\mu - G\phi^{*\gamma}_\mu}{\sqrt{1+F-G^2}} . \qquad /33/$$

Нам приходится предполагать, что $1+F-G^2 \neq 0$, но это же условие принимается и в электродинамике Борна-Инфельда. Согласно /33/ и /31/

$$D_\gamma \frac{\phi^\gamma_\alpha - G\phi^{*\gamma}_\alpha}{\sqrt{1+F-G^2}} = \frac{\delta^\mu_\alpha + F\delta^\mu_\alpha + \phi^\mu_\nu \phi^\nu_\alpha}{\sqrt{1+F-G^2}} S_\mu . \qquad /34/$$

Следовательно, уравнения $S_\alpha = 0$ единой теории поля действительно эквивалентны нелинейным уравнениям Борна-Инфельда /10/, или

$$D_\gamma \frac{\phi_a^{\ \gamma} - G\phi^{*\ \gamma}_{\ a}}{\sqrt{1 + F - G^2}} = 0. \qquad /35/$$

Ввиду антисимметрии тензоров $\phi^{a\gamma}$ и $\phi^{*a\gamma}$ уравнения /35/ можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-h}} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(\frac{\phi^{a\gamma} - G\phi^{*a\gamma}}{\sqrt{1 + F - G^2}} \sqrt{-h} \right) = 0.$$

*Рукопись поступила в издательский отдел
29 марта 1976 года.*