ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 9642

А.Б.Пестов

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ОПЕРАТОРАМИ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ОБОБЩЕННОЙ ДИВЕРГЕНЦИИ

1976

P2 - 9642

А.Б.Пестов

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ОПЕРАТОРАМИ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ОБОБЩЕННОЙ ДИВЕРГЕНЦИИ

Направлено в ТМФ

Введение

В теории электромагнитного поля фигурирует антисимметричное тензорное поле валентности два. Согласно уравнениям Максвелла, внешняя производная и обобщенная дивергенция этого тензорного поля при отсутствии зарядов обращаются в нуль. Эти факты обращают на себя внимание. В самом деле, если наряду с уравнениями Максвелла существуют другие релятивистские уравнения, в которых инвариантные дифференциальные операторы внешнего дифференцирования и обобщенной дивергенции играют определяющую роль, то следует ожидать, что эти уравнения будут представлять интерес и с физической точки зрения. При поиске таких уравнений сталкиваемся со следующей трудностью. Внешняя производная повышает, а обобщенная дивергенция понижает на единицу валентность антисимметричных тензорных полей. Поэтому операторы внешней производной и обобщенной дивергенции не действуют в пространствах антисимметричных тензорных полей заданной валентности. С этим, кстати, можно связать равенство нулю массы покоя частицы электромагнитного поля - фотона. Ситуация коренным образом *изменяется, если мы рассмотрим прямую сумму* антисимметричных тензорных полей всех возможных валентностей. Сюда, в частности, входят скалярное и векторное поля. Так мы приходим к понятию с-поля. Составляя линейные комбинации операторов внешней производной и обобщенной дивергенции, нам удалось факторизовать оператор Клейна-Фока в пространстве c-полей. Полученные при этом дифференциальные уравнения первого порядка обладают многими замечательными свойствами. В настоящей работе мы излагаем только те результаты, которые относятся к классической теории c-поля, и не касаемся вопросов, связанных с его квантованием. По этой причине вопросы физической интерпретации выступают здесь только как средство, позволяющее глубже проникнуть в математическую структуру теории.

1. Уравнения движения

Антисимметричное тензорное поле валентности p /p - вектор/ обозначим $\underset{(p)}{F}$, а его ковариантные компоненты - $f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(x)$, понимая под $\underset{(0)}{F}$ скаляр с единственной компонентой $f(x)$; p - вектор равен нулю тогда и только тогда, когда все его компоненты равны нулю. Четные и нечетные p-векторы различаются законом преобразования своих компонент при переходе от одной системы координат $x^0, x^1, \dots x^n$ к другой системе координат $\bar{x}^0, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$:

$$\bar{f}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(\bar{x}) = f_{\beta_1 \dots \beta_p} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_p}}{\partial \bar{x}^{\alpha_p}}$$

для четных p-векторов,

$$\bar{f}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(\bar{x}) = \frac{J}{|J|} f_{\beta_1 \dots \beta_p} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_p}}{\partial \bar{x}^{\alpha_p}}$$

для нечетных p-векторов. В последней формуле J есть якобиан координат одной системы по координатам другой. Внешняя производная, или внешнее дифференцирование, - это операция d, обобщающая обычную операцию градиента. Она переводит p-вектор $\underset{(p)}{F}$ в $(p+1)$-вектор $d\underset{(p)}{F}$. Компоненты $(p+1)$-вектора $d\underset{(p)}{F}$ представляют собой альтернированные производные компонент p-вектора $\underset{(p)}{F}$:

$$(d\underset{(p)}{F})_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} = (p+1)\partial_{[\alpha_1} f_{\alpha_2 \dots \alpha_{p+1}]} . \qquad /1/$$

Квадратные скобки $[\dots]$ обозначают альтернирование,

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} .$$

Метрика пространства Минковского определяется тензором $\eta^{\alpha\beta}$:

$$\eta^{\alpha\beta} = 0,\ \alpha \neq \beta,\ \eta^{00} = -\eta^{11} = -\eta^{22} = -\eta^{33} = 1 .$$

С помощью метрического тензора можно ввести операцию δ, или обобщенную дивергенцию, переводящую p-вектор $\underset{(p)}{F}$ в $(p-1)$-вектор $\delta\underset{(p)}{F}$. Компоненты $(p-1)$-вектора $\delta\underset{(p)}{F}$ равны

$$(\delta\underset{(p)}{F})_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}} = -\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta f_{\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}} = -\partial^\alpha f_{\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}} . \qquad /2/$$

Для скаляра принимаем, что $\delta\underset{(0)}{F} = 0$. В пространстве-времени p-вектор тождественно равен нулю, если $p > 4$, так что $0 \le p \le 4$, $d\underset{(4)}{F} = 0$.

C-поле F определим как прямую сумму скалярного, векторного, бивекторного, 3-векторного, 4-векторного полей

$$F = \sum_{p=0}^{4} \oplus \underset{(p)}{F} .$$

Определяющие c-поле p-векторы $\underset{(p)}{F}$, $p = 0,1,2,3,4$, будем называть составляющими c-поля, а их компоненты

- компонентами c -поля. С-поле характеризуется также следующими свойствами: если $F=0$, то и все составляющие F равны нулю, $\underset{(p)}{F}=0$, $p = 0,1,2,3,4$,

$$dF = \sum_{p=0}^{4} \oplus \, d\underset{(p)}{F}, \qquad \delta F = \sum_{p=0}^{4} \oplus \, \delta \underset{(p)}{F},$$

$$\lambda F = \sum_{p=0}^{4} \oplus \, \lambda \underset{(p)}{F},$$

где λ - скаляр.

Оператор $\Lambda = \alpha\delta + \beta d$, где α и β - произвольные постоянные, действует в пространстве c-полей. Так как $dd = \delta\delta = 0$, а $\delta d + d\delta = \Box$, где

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} - \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} -$$

- оператор Даламбера, то $\Lambda\Lambda = \alpha\beta\Box$. Требование $\Lambda^2 = e\Box$, где $e = \pm 1$, дает $\alpha\beta = e$. Полагая $\alpha = 1$, получаем

$$\Lambda = \delta + ed. \qquad /3/$$

Рассмотрим уравнение первого порядка

$$\Lambda F = \lambda F \qquad /4/$$

для c-поля. Значение постоянной λ определим, требуя, чтобы каждая из компонент c-поля удовлетворяла уравнению Клейна-Фока.

$$\Box f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \left(\frac{mc}{h}\right)^2 f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}, \quad p = 0,1,2,3,4. \qquad /5/$$

Согласно /3/, /4/, получаем

$$\Box F = e\lambda^2 F.$$

Следовательно,

$$e\lambda^2 = \left(\frac{mc}{h}\right)^2$$

и, стало быть, $\lambda = \lambda_1 = \pm\frac{imc}{h}$ для $e = -1$; $\lambda = \lambda_2 =$
$= \pm\frac{mc}{h}$ для $e = 1$.

Итак, мы пришли к следующим дифференциальным уравнениям первого порядка для с-поля:

$$\delta F - dF = \lambda_1 F, \qquad /6/$$

$$\delta R + dR = \lambda_2 R. \qquad /7/$$

Уравнение /6/ не имеет вещественных решений, то есть решений, для которых $\bar{F} = F$, где $\bar{F}$ – с-поле, комплексно-сопряженное полю F. Компоненты $\bar{F}$ равны $\bar{f}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, $p = 0,1,2,3,4$. Уравнение /7/ имеет вещественные решения, и поэтому требование, чтобы компоненты с-поля R были комплексными функциями, выступает здесь как дополнительное предположение. По этой причине всюду в дальнейшем, пока не будет оговорено особо, компоненты $r_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, $p = 0,1,2,3,4$, с-поля R - вещественные функции. Используя /1/, /2/ и свойства с-поля, запишем уравнения /6/ и /7/ как уравнения для компонент с-полей F и R:

$$\partial^\mu f_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_p} + p\,\partial_{[\alpha_1} f_{\alpha_2 \dots \alpha_p]} + \lambda_1 f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = 0, \qquad /8/$$

$$\partial^\mu r_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_p} - p\,\partial_{[\alpha_1} r_{\alpha_2 \dots \alpha_p]} + \lambda_2 r_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = 0, \qquad /9/$$

$p = 0, 1, 2, 3, 4.$

Уравнения /8/ представляют собой нераспадающуюся систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка. То же самое можно сказать и об уравнениях /9/. Если p-векторы $\underset{(0)}{F}$, $\underset{(2)}{F}$, $\underset{(4)}{F}$ - четные /нечетные/, а p-векторы $\underset{(1)}{F}$, $\underset{(3)}{F}$ - нечетные /четные/, то можно показать, что уравнения /8/ инвариантны относительно дискретных преобразований только в том случае, когда масса является псевдоскаляром. Пусть, например, $\underset{(0)}{F}$, $\underset{(2)}{F}$, $\underset{(4)}{F}$ являются P-четными, а $\underset{(1)}{F}$, $\underset{(3)}{F}$ являются P-нечетными. В таком случае для обеспечения инвариантности уравнений /8/ относительно зеркальных отражений необходимо принять, что масса ведет себя как псевдоскаляр при таких преобразованиях. Для уравнений /9/ имеем точно такой же результат. Как уравнения /8/, так и уравнения /9/ могут быть получены с помощью вариационного принципа из следующих лагранжианов:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{i}{2}\sum_{p=0}^{4}\frac{1}{p!}\left(\partial^\mu \bar f_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_p} + p\,\partial_{[\alpha_1}\bar f_{\alpha_2\ldots\alpha_p]} - \lambda_1 \bar f_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\right) f^{\alpha_1\ldots\alpha_p} -$$

$$- \frac{i}{2}\sum_{p=0}^{4}\frac{1}{p!}\left(\partial^\mu f_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_p} + p\,\partial_{[\alpha_1} f_{\alpha_2\ldots\alpha_p]} + \lambda_1 f_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\right) \bar f^{\alpha_1\ldots\alpha_p}, \qquad /11/$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{4}\frac{1}{p!}\left(\partial^\mu r_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_p} - p\,\partial_{[\alpha_1} r_{\alpha_2\ldots\alpha_p]} + \lambda_2 r_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\right) r^{\alpha_1\ldots\alpha_p}. \qquad /12/$$

Величины с поднятыми индексами суть контравариантные компоненты p-вектора:

$$f^{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \eta^{\alpha_1\beta_1}\ldots\eta^{\alpha_p\beta_p} f_{\beta_1\ldots\beta_p}.$$

2. Свойства симметрии

Группе градиентных преобразований первого рода $F \to e^{i\alpha}F$ c-поля соответствует вектор тока

$$J_\mu = \sum_{p=0}^{3} \frac{1}{p!} (\bar{f}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} f_{\mu\alpha_1 \ldots \alpha_p} + \bar{f}_{\mu\alpha_1 \ldots \alpha_p} f^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}). \qquad /13/$$

Расходимость $\partial^\mu J_\mu$ вектора тока исчезает, поскольку

$$\partial^\mu J_\mu = \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} (\partial^\mu \bar{f}_{\mu\alpha_1 \ldots \alpha_p} + p\partial_{[\alpha_1} \bar{f}_{\alpha_2 \ldots \alpha_p]}) f^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} \bar{f}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} (\partial^\mu f_{\mu\alpha_1 \ldots \alpha_p} + p\partial_{[\alpha_1} f_{\alpha_2 \ldots \alpha_p]}).$$

Наряду с группой градиентных преобразований первого рода и группой Пуанкаре $P(3,1)$ уравнения /8/ допускают еще одну группу преобразований e-поля. Преобразования из этой группы, обозначим ее $O(2,1)$, такого же рода, что и градиентные преобразования, то есть они касаются только функций поля и не затрагивают координат. Чтобы найти эту группу, рассмотрим предварительно операцию дуального сопряжения, которая каждому p-вектору $F_{(p)}$ ставит в соответствие $(4-p)$-вектор $*F_{(p)}$ противоположной четности. Эта операция находит применение в некоторых разделах теоретической физики [1,2]. Операция $*$ определяется нечетным 4-вектором ε, существенная ковариантная компонента которого равна $\varepsilon_{0123} = 1$. Можно непосредственно проверить, что

$$\frac{1}{(4-p)!} \varepsilon_{\beta_1 \ldots \beta_p \alpha_1 \ldots \alpha_{4-p}} \varepsilon^{\nu_1 \ldots \nu_p \alpha_1 \ldots \alpha_{4-p}} = -\delta^{\nu_1 \ldots \nu_p}_{\beta_1 \ldots \beta_p}, \qquad /14/$$

где $\delta^{\nu_1 \ldots \nu_p}_{\beta_1 \ldots \beta_p}$ - тензор Кронекера, обладающий тем свойством, что

$$\frac{1}{p!} \delta^{\nu_1 \ldots \nu_p}_{\beta_1 \ldots \beta_p} f_{\nu_1 \ldots \nu_p} = f_{\beta_1 \ldots \beta_p}. \qquad /15/$$

Нам будет удобно обозначить $(4-p)$-вектор $*\underset{(p)}{F}$ через $*\underset{(4-p)}{F}$, а его компоненты $-{}^*f_{\alpha_1 \dots \alpha_{4-p}}$. Имеем:

$$
{}^*f_{\alpha_1 \dots \alpha_{4-p}} = \frac{1}{p!}\,\varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_p \alpha_1 \dots \alpha_{4-p}}\, f^{\beta_1 \dots \beta_p}. \qquad /16/
$$

С помощью /14/, /15/ нетрудно убедиться в справедливости следующих тождеств:

$$
**\underset{(p)}{F} = (-1)^{p+1}\underset{(p)}{F}, \qquad /17/
$$

$$
d = \delta. \qquad /18/
$$

Операторы $*_1$, $*_2$, ω, τ определим формулами

$$
*_1: F \to *_1 F = \sum_{p=0}^{4} \oplus\, (-1)^{p(p+1)/2} * \underset{(p)}{F}.
$$

$$
*_2: F \to *_2 F = \sum_{p=0}^{4} \oplus\, (-1)^{p(p-1)/2} * \underset{(p)}{F},
$$

$$
\omega: F \to \omega F = \sum_{p=0}^{4} \oplus\, (-1)^{p} \underset{(p)}{F}.
$$

$$
\tau: F \to \tau F = \sum_{p=0}^{4} \oplus\, \underset{(p)}{\bar F}.
$$

Докажем, что операторы $*_1$, $*_2$, удовлетворяют соотношениям

$$
*_1 *_1 = -1, \qquad /19/
$$

$$
\omega d + d\omega = 0, \quad \omega\delta + \delta\omega = 0, \qquad /20/
$$

$$
*_2 = \omega *_1 = *_1 \omega, \qquad /21/
$$

$$
d *_1 - *_1 \delta = 0. \qquad /22/
$$

Так как

$$*_1 F = \sum_{p=0}^{4} \oplus (-1)^{p(p+1)/2} * \underset{(p)}{F} = \sum_{p=0}^{4} \oplus (-1)^{p(p-1)/2} * \underset{(4-p)}{F},$$

то, принимая во внимание /17/, получаем

$$*_1 *_1 F = \sum_{p=0}^{4} \oplus (-1)^{p^2} ** \underset{(4-p)}{F} = -\sum_{p=0}^{4} (-1)^{p(p-1)} \underset{(4-p)}{F} = -F.$$

Тем самым соотношение /19/ доказано.

Для доказательства соотношения /22/ воспользуемся вытекающим из /17/, /18/ равенством

$$*\delta \underset{(p)}{F} = (-1)^p d * \underset{(p)}{F}.$$

имеем:

$$d *_1 F = \sum_{p=0}^{4} \oplus (-1)^{p(p-1)/2} (-1)^p d * \underset{(p)}{F} = \sum_{p=0}^{4} \oplus (-1)^{p(p+1)/2} * \delta \underset{(p+1)}{F}.$$

С другой стороны,

$$*_1 \delta F = \sum_{p=0}^{4} \oplus (-1)^{p(p+1)/2} * \delta \underset{(p+1)}{F}.$$

Сравнивая, получаем /22/. Соотношения /20/ ,/21/ следуют непосредственно из определения входящих в них операторов. Замечая, что

$$*_1 \delta - d *_1 = *_1 (*_1 d - \delta *_1) *_1 ,$$

получаем

$$*_1 d - \delta *_1 = 0. \tag{23}$$

Так как оператор ω антикоммутирует с d и δ, то имеют место соотношения

$$*_2 d + \delta *_2 = 0, \qquad /24/$$

$$d *_2 + *_2 \delta = 0. \qquad /25/$$

Отметим, наконец, соотношения для оператора /3/

$$*_1 \Lambda - e\Lambda *_1 = 0, \qquad /26/$$

$$*_2 \Lambda + e\Lambda *_2 = 0, \qquad /27/$$

которые непосредственно вытекают из /22/-/25/. Операторы

$$L_1 = \frac{1}{2} i *_2, \quad L_2 = \frac{1}{2}\omega\tau, \quad L_3 = \frac{1}{2} *_1 \tau$$

действуют в пространстве решений уравнения /6/ и удовлетворяют соотношениям

$$L_1L_2 - L_2L_1 = L_3, \quad L_2L_3 - L_3L_2 = -L_1, \quad L_3L_1 - L_1L_3 = -L_2,$$

$$L_aL_b + L_bL_a = \frac{1}{2}\eta_{ab},$$

где

$$\eta_{ab} = 0, \quad a \neq b, \quad \eta_{11} = \eta_{22} = -\eta_{33} = 1.$$

Таким образом, мы нашли искомую трехпараметрическую группу преобразований c-поля. Она изоморфна группе Лоренца трехмерного пространства Минковского. Замечательно, что при этом c-поле задает двузначное /спинорное/ представление группы $O(2,1)$. Собственные значения оператора $S = hL_1$ равны $\pm\frac{h}{2}$. Поскольку оператор S нечетный, то его собственные значения являются псевдоскалярами.

Триплет частиц, аналогичный триплету π-мезонов, обозначим (M^+, M^-, M^0). Оператор σ, действующий в пространстве комплексных c-полей, определим формулой

$$\sigma : F \to \sigma F = \sum_{p=0}^{4} \oplus\, i^{p} F_{(p)} .$$

Без труда проверяется справедливость следующих соотношений:

$$d\sigma + i\sigma\acute{d} = 0, \qquad /28/$$

$$\delta\sigma - i\sigma\delta = 0, \qquad /29/$$

$$\sigma^{2} = \omega . \qquad /30/$$

Пусть теперь R-вещественное или комплексное решение уравнения /7/, тогда, как это непосредственно следует из /28/, /29/,

$$F = \sigma R$$

будет решением уравнения /6/. Обратное отображение согласно /30/ будет таковым:

$$R = \omega\sigma F .$$

Таким образом, множество решений уравнения /6/ состоит из двух областей. Одна из них определяется вещественными, а другая - комплексными решениями уравнения /7/. Решения первой области обозначим F'. Компоненты c-поля F' равны

$$f'_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = i^{p} r_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} , \quad p = 0, 1, 2, 3, 4. \qquad /31/$$

Для решений второй области сохраним обозначение F. Подставляя /31/ в /13/, обнаруживаем, что c-поле F' не дает вклада в вектор тока. Посмотрим теперь, к каким последствиям приводит включение взаимодействия с электромагнитным полем. В соответствии с принципом "минимального электромагнитного взаимодействия" лагранжиан взаимодействия равен $\mathfrak{L}_{вз.} = \frac{e}{c} J_{\mu} A^{\mu}$, где

A_μ - векторный потенциал электромагнитного поля, J_μ - вектор тока /13/. Такой лагранжиан приводит к удлинению производной в уравнениях /8/, $\partial_a \to \partial_a - \frac{ie}{c} A_a$. Взаимодействия с электромагнитным полем разрушают симметрию, присущую свободному полю. Действительно, уравнение /6/, после включения взаимодействия, не будет иметь решений вида /31/, а оператор

$$C \quad \omega r$$

будет оператором зарядового сопряжения. Действуя оператором C на F, получаем

$$CF = F \, . \qquad /32/$$

Проведенное исследование показывает, что следует отождествить

$$F = M \, ,$$

или, что то же,

$$R = M^c \, ,$$

где R - действительное c-поле. Согласно /32/ зарядовая четность M равна единице. Выше было установлено, что оператор $*_1$ коммутирует с оператором $\delta + d$, а оператор $*_2$ - с оператором $\delta - d$. Покажем, что этим операторам соответствуют сохраняющиеся векторы k, таким образом, они определяют внутренние характеристики (M^+, M^-, M^c). Пусть $\tilde{r}_{a_1 \ldots a_p}$ - компоненты c-поля $*_1 R$, а $\tilde{f}_{a_1 \ldots a_p}$ - компоненты c-поля $*_2 F$. По определению операторов $*_1$, $*_2$ имеем:

$$\tilde{r}_{a_1 \ldots a_p} = (-1)^{p(p-1)/2} \frac{1}{(4-p)!} \varepsilon_{\beta_1 \ldots \beta_{4-p} a_1 \ldots a_p} r^{\beta_1 \ldots \beta_{4-p}} \, , \qquad /33/$$

$$\tilde{f}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = (-1)^{p(p+1)/2} \frac{1}{(4-p)!} \mathcal{E}_{\beta_1 \ldots \beta_{4-p}\, \alpha_1 \ldots \alpha_p} f^{\beta_1 \ldots \beta_{4-p}} .$$

/34/

Искомые сохраняющиеся векторы определяются выражениями

$$S_\mu = \sum_{p=0}^{3} \frac{1}{p!} \left(\tilde{r}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} r_{\mu \alpha_1 \ldots \alpha_p} - \tilde{r}_{\mu \alpha_1 \ldots \alpha_p} r^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \right),$$

$$C_\mu = \sum_{p=0}^{3} \frac{1}{p!} \left(\bar{\tilde{f}}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} f_{\mu \alpha_1 \ldots \alpha_p} + \bar{\tilde{f}}_{\mu \alpha_1 \ldots \alpha_p} f^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \right).$$

То, что вектор S_μ удовлетворяет уравнению непрерывности, следует из равенства

$$\partial^\mu S_\mu = \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} \tilde{r}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \left(\partial^\mu r_{\mu \alpha_1 \ldots \alpha_p} - p \partial_{[\alpha_1} r_{\alpha_2 \ldots \alpha_p]} \right) -$$

$$- \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} \left(\partial^\mu \tilde{r}_{\mu \alpha_1 \ldots \alpha_p} - p \partial_{[\alpha_1} \tilde{r}_{\alpha_2 \ldots \alpha_p]} \right) r^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} .$$

Доказательство для вектора C_μ вполне аналогично случаю вектора J_μ. Однако вещественность компонент вектора C_μ далеко не очевидна и требует специального рассмотрения. Имеем:

$$\bar{C}_\mu = \sum_{p=0}^{3} \frac{1}{p!} \left(\tilde{f}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \bar{f}_{\mu \alpha_1 \ldots \alpha_p} + \tilde{f}_{\mu \alpha_1 \ldots \alpha_p} \bar{f}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \right).$$

Используя формулу /34/, запишем второе слагаемое в скобках в виде

$$\frac{1}{p!} \tilde{f}_{\mu \alpha_1 \ldots \alpha_p} \bar{f}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} =$$

$$= \frac{(-1)^{p^2+1} (-1)^{p(p-1)/2}}{p!(3-p)!} \mathcal{E}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \beta_1 \ldots \beta_{3-p}\, \mu} \bar{f}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} f^{\beta_1 \ldots \beta_{3-p}} .$$

Снова используя формулу /34/, получаем

$$\frac{1}{p!} f_{\mu\alpha_1\dots\alpha_p} \bar f^{\alpha_1\dots\alpha_p} = \frac{(-1)^{p^2+1}}{(3-p)!} \bar f_{\beta_1\dots\beta_{3-p}\mu} f^{\beta_1\dots\beta_{3-p}}$$

Перебрасывая индекс μ справа налево, получаем

$$\sum_{p=0}^{3} \frac{1}{p!} f_{\mu\alpha_1\dots\alpha_p} \bar f^{\alpha_1\dots\alpha_p} = \sum_{p=0}^{3} \bar f_{\mu\alpha_1\dots\alpha_p} f^{\alpha_1\dots\alpha_p} .$$

Слагаемое $f^{\alpha_1\dots\alpha_p} \bar f_{\mu\alpha_1\dots\alpha_p}$ преобразуется с помощью /14/, /15/ следующим образом:

$$\frac{1}{p!} f^{\alpha_1\dots\alpha_p} \bar f_{\mu\alpha_1\dots\alpha_p} =$$

$$= \frac{1}{p!(p+1)!} f^{\alpha_1\dots\alpha_p} \delta^{\beta_1\dots\beta_{p+1}}_{\mu\alpha_1\dots\alpha_p} \bar f_{\beta_1\dots\beta_{p+1}} =$$

$$= \frac{(-1)}{p!(p+1)!(3-p)!} \varepsilon_{\mu\alpha_1\dots\alpha_p\nu_1\dots\nu_{3-p}} \varepsilon^{\beta_1\dots\beta_{p+1}\nu_1\dots\nu_{3-p}} \times$$

$$\times f^{\alpha_1\dots\alpha_p} \bar f_{\beta_1\dots\beta_{p+1}} =$$

$$= \frac{(-1)}{(3-p)!} \eta_{\mu\sigma} \left(\frac{1}{p!} \varepsilon^{\sigma\alpha_1\dots\alpha_p\nu_1\dots\nu_{3-p}} f_{\alpha_1\dots\alpha_p} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{(p+1)!} \varepsilon_{\beta_1\dots\beta_{p+1}\nu_1\dots\nu_{3-p}} \bar f^{\beta_1\dots\beta_{p+1}} \right).$$

Далее, воспользовавшись формулами /34/, /14/, /15/, получаем

$$\frac{1}{p!} \varepsilon^{\sigma\alpha_1\dots\alpha_p\nu_1\dots\nu_{3-p}} \bar f_{\alpha_1\dots\alpha_p} = (-1)^{p(p+1)/2} \bar f^{\sigma\nu_1\dots\nu_{3-p}} ,$$

$$\frac{1}{(p+1)!}\,\varepsilon_{\beta_1\ldots\beta_{p+1}\nu_1\ldots\nu_{3-p}}\,\bar{f}^{\,\beta_1\ldots\beta_{p+1}} =$$

$$= (-1)^{p(p+1)/2}\ \bar{\tilde{f}}_{\nu_1\ldots\nu_{3-p}} .$$

Таким образом,

$$\sum_{p=0}^{3}\frac{1}{p!}\,f^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\,\bar{f}_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_p} = \sum_{p=0}^{3}\frac{1}{p!}\,\bar{\tilde{f}}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\,f_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_p} .$$

В итоге мы доказали, что

$$\bar{C}_\mu = C_\mu ,$$

то есть вектор C_μ - вещественный.

3. Переход к общей теории относительности

Покажем, что для перехода от специальной теории относительности к общей теории относительности достаточно заменить в уравнениях /8/, /9/ частные производные по декартовым координатам на ковариантные производные. Производя такую замену, получаем

$$(dF)_{\substack{\\(p)}\ \alpha_1\ldots\alpha_{p+1}} = (p+1)\nabla_{[\alpha_1}f_{\alpha_2\ldots\alpha_{p+1}]} ,$$

$$(\delta F)_{\substack{\\(p)}\ \alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} = -g^{\alpha\beta}\nabla_\beta f_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} = -\nabla^\alpha f_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} ,$$

$$\nabla^\mu f_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_p} + p\nabla_{[\alpha_1}f_{\alpha_2\ldots\alpha_p]} + \lambda_1 f_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = 0, \qquad /35/$$

$$\nabla^\mu r_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_p} - p\nabla_{[\alpha_1}r_{\alpha_2\ldots\alpha_p]} + \lambda_2 r_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = 0, \qquad /36/$$

где ∇_α - ковариантная производная, которая строится с помощью коэффициентов римановой связности

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (\partial_\alpha g_{\rho\beta} + \partial_\beta g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\beta});$$

$g^{\alpha\beta}$ - тензор, обратный метрическому тензору $g_{\alpha\beta}$, $g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = \delta^\nu_\mu$. Если $f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ - ковариантные компоненты p-вектора, то

$$\nabla_\alpha f_{\beta_1 \dots \beta_p} = \partial_\alpha f_{\beta_1 \dots \beta_p} + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \Gamma^\nu_{\alpha\beta_k} f_{\nu\beta_1 \dots \hat{\beta}_k \dots \beta_p},$$

где $\beta_1 \dots \hat{\beta}_k \dots \beta_p$ есть система индексов, получающаяся из $\beta_1 \dots \beta_p$ изъятием индекса β_k. Метрический тензор обладает тем свойством, что квадратичная дифференциальная форма

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

локальным аффинным преобразованием

$$h^\alpha = h^\alpha_\beta dx^\beta$$

приводится к виду

$$ds^2 = (h^0)^2 - (h^1)^2 - (h^2)^2 - (h^3)^2.$$

Свойства операции дуального сопряжения при переходе от СТО к ОТО сохраняются, если для существенной ковариантной компоненты нечетного 4-вектора принять, что $\varepsilon_{0123} = \sqrt{-g}$, где g - определитель метрического тензора. В таком случае сохраняются также соотношения /19/-/22/ и, следовательно, наряду с группой градиентных преобразований сохраняется и группа $O(2.1)$. Прежде чем приступить к нахождению метрического тензора энергии-импульса, заметим, что лагранжианы /11/, /12/ эквивалентны лагранжианам

$$\tilde{\mathfrak{L}}_1 = i \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} \{ f^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} (p \nabla_{[\alpha_1} \bar{f}_{\alpha_2 \ldots \alpha_p]} -$$

$$- \bar{f}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} (p \nabla_{[\alpha_1} f_{\alpha_2 \ldots \alpha_p]}) \} -$$

$$- i \lambda_1 \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} \bar{f}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} f^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} ,$$

$$\tilde{\mathfrak{L}}_2 = - \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} r^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} (p \nabla_{[\alpha_1} r_{\alpha_2 \ldots \alpha_p]}) +$$

$$+ \frac{\lambda_2}{2} \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} r^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} r_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} .$$

Действительно,

$$\mathfrak{L}_1 = \tilde{\mathfrak{L}}_1 + \nabla^{\mu} A_{\mu}, \quad \mathfrak{L}_2 = \tilde{\mathfrak{L}}_2 + \nabla^{\mu} B_{\mu},$$

где

$$A_{\mu} = \frac{i}{2} \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} (f^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \bar{f}_{\mu \alpha_1 \ldots \alpha_p} - \bar{f}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} f_{\mu \alpha_1 \ldots \alpha_p}),$$

$$B_{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} r^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} r_{\mu \alpha_1 \ldots \alpha_p} .$$

Лагранжианы $\tilde{\mathfrak{L}}_1$ и $\tilde{\mathfrak{L}}_2$ не содержат производных метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, поскольку

$$\nabla_{[\alpha_1} f_{\alpha_2 \ldots \alpha_p]} = \partial_{[\alpha_1} f_{\alpha_2 \ldots \alpha_p]} .$$

Это обстоятельство является немаловажным фактором при нахождении тензора энергии-импульса. Вариация

$$\delta A = \delta \int \mathfrak{L} \, dV = \frac{1}{2} \int T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \, dV$$

дает метрический тензор энергии-импульса [3]. Варьируя

$$\Lambda_1 = \int \tilde{\mathcal{L}}_1 \, dV, \qquad \Lambda_2 = \int \tilde{\mathcal{L}}_2 \, dV,$$

получаем соответственно

$$T_{\mu\nu} = i \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} \{ (p+1)\lambda_{[\mu} \bar{f}_{\alpha_1 \dots \alpha_p]} f_{\nu}^{\;\alpha_1 \dots \alpha_p} +$$

$$+ (p+1)\lambda_{[\nu} \bar{f}_{\alpha_1 \dots \alpha_p]} f_{\mu}^{\;\alpha_1 \dots \alpha_p} \} -$$

$$- i \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} \{ (p+1)\lambda_{[\mu} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p]} \bar{f}_{\nu}^{\;\alpha_1 \dots \alpha_p} +$$

$$+ (p+1)\lambda_{[\nu} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p]} \bar{f}_{\mu}^{\;\alpha_1 \dots \alpha_p} \} -$$

$$- i\lambda_1 \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} (\bar{f}_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_p} f_{\nu}^{\;\alpha_1 \dots \alpha_p} +$$

$$+ f_{\nu\alpha_1 \dots \alpha_p} f_{\mu}^{\;\alpha_1 \dots \alpha_p}) - g_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{L}}_1 , \qquad /37/$$

$$T_{\mu\nu} = - \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} \{ (p+1)\lambda_{[\mu} r_{\alpha_1 \dots \alpha_p]} r_{\nu}^{\;\alpha_1 \dots \alpha_p} +$$

$$+ (p+1)\lambda_{[\nu} r_{\alpha_1 \dots \alpha_p]} r_{\mu}^{\;\alpha_1 \dots \alpha_p} \} +$$

$$+ \lambda_2 \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} r_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_p} r_{\nu}^{\;\alpha_1 \dots \alpha_p} - g_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{L}}_2 , \qquad /38/$$

где

$$f_{\mu}^{\;\alpha_1 \dots \alpha_p} = g^{\alpha_1\beta_1} \dots g^{\alpha_p\beta_p} f_{\mu\beta_1 \dots \beta_p} .$$

Если $a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, $b_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ - компоненты p-векторов, то вариация выражения вида

$$S = a_{\alpha_1 \dots \alpha_p} b^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = a_{\alpha_1 \dots \alpha_p} b_{\beta_1 \dots \beta_p} g^{\alpha_1 \beta_1} \dots g^{\alpha_p \beta_p}$$

равна

$$\delta S = \frac{p}{2} (a_{\mu \alpha_1 \dots \alpha_{p-1}} b_{\nu}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}} +$$

$$+ a_{\nu \alpha_1 \dots \alpha_{p-1}} b_{\mu}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}}) \delta g^{\mu\nu} .$$

Эта формула является основной при варьировании $\tilde{\mathfrak{L}}_1$ и $\tilde{\mathfrak{L}}_2$. Если входящие в тензоры энергии-импульса /37/, /38/ функции $f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, $r_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ удовлетворяют уравнениям /35/, /36/, то

$$\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0 .$$

Доказательство этого утверждения не представляет особых трудностей, если использовать тождество

$$(p+1) \nabla_{[\beta} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p]} = \nabla_{\beta} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} - p \nabla_{[\alpha_1} f_{|\beta| \alpha_2 \dots \alpha_p]}$$

и следствие из него, получающееся, если положить

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \nabla_{[\alpha_1} f_{\alpha_2 \dots \alpha_p]} .$$

К индексу, выделенному вертикальными черточками, операция альтернирования не относится. Таким образом, система уравнений, состоящая из уравнений /35/ или /36/ и уравнений Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} ,$$

где $T_{\mu\nu}$ равен соответственно /37/ или /38/, непротиворечива и, следовательно, развиваемая теория с-поля общековариантна.

Автор выражает искреннюю благодарность Н.А.Черникову и Н.С.Шавохиной за ценные замечания при обсуждении настоящей работы.

Литература

1. *Д.А.Уилер. Гравитация, нейтрино и Вселенная. ИЛ, М., 1962.*
2. *В.И.Стражев, Л.М.Томильчик. ЭЧАЯ, 4, 187 /1973/.*
3. *В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения. М., Физматгиз, 1961.*

Рукопись поступила в издательский отдел
24 марта 1976 года.