ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 9637

Г.В.Ефимов, М.А.Иванов, О.А.Могилевский

СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОНА В НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1976

P2 - 9637

Г.В.Ефимов, М.А.Иванов, О.А.Могилевский

СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОНА В НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в "Annals of Physics"

Введение

В настоящее время принято считать, что собственная энергия электрона в классической и квантовой теории поля имеет различную природу /см., напр., /1/ /. Обычно к такому выводу приходят при сравнении выражения для собственной массы электрона во втором порядке квантовой электродинамики /2/:

$$\delta m_{\text{кв}} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \cdot \frac{3}{4\pi} m\left(\ln\frac{\hbar^2}{r_0^2 m^2 c^2} + \frac{1}{2}\right) \qquad /1/$$

с классической собственной энергией электрона

$$\delta m_{\text{кл}} = \frac{e^2}{2 r_0 c^2} v, \qquad /2/$$

где r_0 - радиус обрезания, а v - безразмерный параметр, учитывающий распределение заряда электрона.

Из сравнения /1/ и /2/ видно, что квантовая поправка к массе, в отличие от классической, зависит от массы электрона и расходится лишь логарифмически при $r_0 \to 0$. Переход $\hbar \to 0$ в выражении /1/, соответствующий переходу к классическому пределу, приводит к явно бессмысленному результату, поэтому говорить о принципе соответствия в данном случае не имеет смысла.

Из вышесказанного следует, хотя об этом явно не говорится, что в теории должен существовать некоторый параметр r_0, не зависящий от константы $\hbar$, m, c, e, а квантовая теория поля должна быть построена таким образом, чтобы

$$\delta m_{\text{кв}} \underset{\hbar \to 0}{\to} \delta m_{\text{кл}} .$$

Основой трудностей в рассматриваемой здесь проблеме является то обстоятельство, что современная как классическая, так и квантовая электродинамика имеет дело лишь с локальными взаимодействиями, где параметр r_0 принципиально отсутствует. Поэтому собственная энергия электрона бесконечна как в классическом, так и в квантовом случае, и, следовательно, сама постановка вопроса о выполнении принципа соответствия является бессмысленной. Перенормированная квантовая электродинамика этот вопрос фактически обходит, так как имеет дело лишь с наблюдаемыми массой и зарядом электрона. Поэтому справедливость принципа соответствия в проблеме собственной массы электрона может быть установлена лишь в нелокальной теории, где параметр r_0 может быть введен непротиворечивым образом, или же мы должны выйти за рамки чистой электродинамики, вводя в рассмотрение новые поля типа гравитационного и т.д. Ниже мы будем обсуждать только первую возможность.

В связи с этими выводами возникает вопрос: откуда появилась формула /1/ и какие предположения лежат в ее основе?

Обычно [2] формула /1/ получается в рамках регуляризации Паули-Вилларса, которая состоит в том, что свободный пропагатор фотона заменяется выражением

$$\frac{1}{-k^2-i\epsilon} \to \frac{1}{-k^2-i\epsilon}\cdot\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2-k^2-i\epsilon}\,. \qquad /3/$$

Здесь Λ - импульс обрезания, связанный с радиусом обрезания соотношением

$$r_0=\frac{\hbar}{\Lambda c}\,. \qquad /4/$$

Замена /3/ означает, что теория становится нелокальной. Однако, если мы хотим рассматривать теорию при конечных Λ, то при энергиях, превышающих Λ, унитарность S-матрицы нарушается, что соответствует рождению нефизических квантов с массой Λ. Поэтому параметр Λ мы можем считать конечным только тогда, когда энергии электронов и фотонов, участвующих в тех или иных процессах, много меньше Λ. Отсюда следует, что формула /1/ имеет реальный смысл при условии

$$\frac{\Lambda}{m} \gg 1\,, \qquad \text{или } r_0 \ll \frac{\hbar}{mc}. \qquad /5/$$

Полученное условие запрещает переход к классическому пределу $\hbar \to 0$, поскольку при $r_0 \gg \dfrac{\hbar}{mc}$ S-матрица не удовлетворяет основным требованиям, предъявляемым к самосогласованной теории. Эта трудность неоднократно отмечалась Фейнманом, который всегда подчеркивал, что если в теории не выполняется условие унитарности, то в такой теории не имеет смысла говорить ни о каких физических следствиях.

Таким образом, формула /1/ действительно получена с использованием условий, запрещающих переход в классическую область.

Существует еще другая точка зрения, состоящая в том, что при переходе к классическому пределу $(\hbar \to 0)$ нельзя опираться на результаты теории возмущений, поскольку параметр разложения $\alpha = \dfrac{e}{4\pi\hbar c}$ в этом пределе неограниченно возрастает. Эта идея была рассмотрена в работе /3/. Авторы предположили, что полная функция Грина фотона, входящая в массовый оператор электрона, убывает быстрее, чем в локальной теории и, по существу, совпадает с выражением для собственной энергии во втором порядке теории возмущений с пропагатором фотона /3/. Причем теория стала нелокальной, хотя авторы ничего не говорят об этом, и обладает всеми теми трудностями, о которых говорилось выше. Кроме того, авторы ничего не говорят о возможной природе параметра r_0, который может возникнуть в чистой электродинамике. Единственным параметром размерности длины, не зависящим от $\hbar$, может быть лишь классический радиус электрона $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$. Но в таком случае поправка к энергии электрона, согласно /2/, будет иметь вид $\delta m_{кл} = mv$, а это означает, что существование конечного предела для δm всегда может интерпретироваться как выполнение принципа соответствия, так как

$$m = \frac{e^2}{r_0 c^2}, \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2}.$$

Однако, как говорилось выше, под принципом соответствия обычно подразумевается иное.

В этих предположениях, переходя к пределу $\hbar \to 0$, авторы получили выражение для поправки к массе электрона, совпадающее с выражением /2/ в классической электродинамике.

Другими словами, в работе /3/ показано, что, если, во-первых, закрыть глаза на трудности теории, когда нарушается условие /5/, и, во-вторых, предположить, что весь ряд теории возмущений эффективно сводится к интегралу, по существу совпадающему со вторым порядком теории возмущений, то принцип соответствия будет выполнен.

В настоящей работе принцип соответствия в задаче о собственной энергии электрона рассмотрен в рамках нелокальной квантовой электродинамики, предложенной одним из авторов /4/. В этом подходе построена S-матрица, описывающая нелокальное взаимодействие электрона с фотоном и удовлетворяющая всем необходимым аксиомам /унитарности, причинности и т.д./ при любых соотношениях между параметром нелокальности ℓ и комптоновской длиной волны электрона. Поэтому естественно ожидать, что в такой теории принцип соответствия будет выполнен. Действительно, оказалось, что классический и квантовый пределы определяются в зависимости от соотношения между параметром нелокальности ℓ /или r_0 / и комптоновской длиной волны электрона

$\lambda\!\!\!^{-} = \dfrac{\hbar}{mc}$. В пределе $\hbar \to 0$, т.е. $\dfrac{\lambda}{\ell} \ll 1$, вклад в поправку к массе дается только вторым порядком теории возмущений и стремится к /2/, а все высшие порядки обращаются в нуль. Рассмотрена также поправка к массе частицы произвольного спина и показано, что в классическом пределе $\dfrac{\lambda\!\!\!^{-}}{\ell} \ll 1$ эта поправка не зависит от спина и определяется формулой /2/.

1. Постановка задачи

Построение нелокальной квантовой электродинамики, удовлетворяющей всем аксиомам квантовой теории поля, было проведено в работах /4/, результатами которых мы будем пользоваться ниже.

Введение нелокального взаимодействия электрон-позитронного и электромагнитного полей эффективно приводит к тому, что в ряду теории возмущений изменяется пропагатор электромагнитного поля:

$$\frac{-g_{\mu\nu}}{-q^2 - i\epsilon} \to \frac{-g_{\mu\nu}\, V\left(-\dfrac{q^2\ell^2}{\hbar^2}\right)}{-q^2 - i\epsilon}\,. \qquad /1.1/$$

Здесь формфактор $V\left(-\dfrac{q^2\ell^2}{\hbar^2}\right)$ является целой аналитической функцией, убывающей достаточно быстро в евклидовой области $q^2 < 0$.

Такая модификация фотонного пропагатора физически означает изменение закона Кулона на малых расстояниях. В соответствии с этим потенциал покоящегося электрона будет иметь вид:

$$W(\vec{r}) = \frac{e}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k}\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, D(\vec{k}^2)\,, \qquad /1.2/$$

где

$$D(\vec{k}^2) = \frac{V(\vec{k}^2 \ell^2)}{\vec{k}^2}. \qquad /1.3/$$

В случае, когда формфактор $V(z)$ - целая функция порядка роста $\rho = \frac{1}{2}$, имеем

$$W(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{\ell} \int\limits_0^\infty dx\, V(x^2) + O(\frac{r^2}{\ell^2}), & r < \ell \\ \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}, & r > \ell. \end{cases} \qquad /1.4/$$

Потенциал $W(\vec{r})$ точно совпадает с кулоновским при $r > \ell$. Это означает, что формфакторы такого типа описывают электрон, заряд которого распределен внутри сферы радиуса ℓ.

Используя равенство /1.2/, получаем следующее выражение для собственной энергии электрона в классической физике:

$$\delta m_{кл} = \frac{e}{2} W(0) = \frac{e^2}{4\pi^2 \ell} \int\limits_0^\infty dx\, V(x^2). \qquad /1.5/$$

В квантовой электродинамике поправка к массе электрона определяется значением массового оператора электрона на массовой поверхности. Массовый оператор электрона представляется в виде ряда теории возмущений по постоянной тонкой структуры $\alpha = \frac{e^2}{4\pi \hbar c}$

$$\Sigma(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^n M_{2n}(p). \qquad /1.6/$$

Наша задача будет состоять в изучении предельного перехода $\hbar \to 0$ в членах

$$\delta m_{2n} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^n \bar{u}(\vec{p}) M_{2n}(p) u(\vec{p}), \qquad (p^2 = m^2),$$

определяющих поправку к массе электрона. Ниже мы рассмотрим члены второго, четвертого и шестого порядков $/\delta m_2$, , δm_4 и δm_6 /.

2. Второй порядок теории возмущений

Во втором порядке теории возмущений поправка к массе электрона описывается диаграммой Фейнмана, показанной на *рис. 1*, и записывается следующим образом:

$$\delta m_2 = \frac{e^2}{\hbar (2\pi)^4} \bar{u}(\vec{p}) \int_{(E)} d^4 q \frac{V\left(\frac{q^2 \ell^2}{\hbar^2}\right)}{q^2} \gamma_\mu \frac{m + \hat{p} - \hat{q}}{m^2 + (p-q)^2} \gamma_\mu u(\vec{p}). \qquad /2.1/$$

Рис. 1. Поправка в массовый оператор второго порядка.

Здесь $\hat{p} u(\vec{p}) = m u(\vec{p})$, $\quad p^2 = -m^2$. Спинор Дирака, описывающий электрон, нормирован так, что $\bar{u}(\vec{p}) u(\vec{p}) = 1$. Интегрируя по евклидовым углам, после некоторых довольно очевидных преобразований, выражение /2.1/ можно привести к виду

$$\delta m_2 = \frac{m}{(2\pi)^2} \cdot \frac{e^2}{\hbar} \int_0^\infty du\, V\left(4\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 u\right) M(u), \qquad /2.2/$$

$$M(u) = 2u + (1-2u)\sqrt{\frac{1+u}{u}}.$$

Здесь $\lambda = \frac{\hbar}{m}$ - комптоновская длина волны электрона.

Уже из полученной формулы видно, что величина поправки к массе δm_2 стремится к пределам /1/ и /2/ соответственно в случаях $\ell \ll \lambda$ и $\ell \gg \lambda$. Действительно, асимптотическое поведение функции $M(u)$ определяется

$$M(u) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{u}}, & u \ll 1, \\[2ex] \dfrac{3}{4u}, & u \gg 1. \end{cases}$$

Естественно считать, что функция $M(u)$ порядка единицы при $u \sim 1$ и быстро убывает при $u \gg 1$, так что

$$\delta m_2 \simeq m \cdot \frac{e^2}{\hbar} \cdot \int_0^{(\lambda/\ell)^2} du\, M(u).$$

При $\ell \ll \lambda$ вклад в интеграл дают большие значения u, поэтому

$$\int_0^{(\lambda/\ell)^2} du\, M(u) \simeq \frac{3}{4} \int_1^{(\lambda/\ell)^2} \frac{du}{u} = \frac{3}{4} \ln\left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^2$$

и

$$\delta m_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{e^2}{\hbar}\, m \ln\left(\frac{\hbar}{m\ell}\right)^2 ,$$

т.е. получаем квантовополевое выражение для собственной массы /1/.

При $\ell \gg \lambda$ вклад в интеграл дают малые значения u, поэтому

$$\int_0^{(\lambda/\ell)^2} du\, M(u) \simeq \int_0^{(\lambda/\ell)^2} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\frac{\lambda}{\ell}$$

и

$$\delta m_2 = \mathrm{const}\frac{\hbar}{m\ell}\cdot m\cdot\frac{e^2}{\hbar} = \mathrm{const}\frac{e^2}{\ell},$$

т.е. получаем классическое выражение для собственной массы /2/, которое не зависит ни от постоянной Планка $\hbar$, ни от массы электрона m.

Таким образом, полученная нами формула для поправки к массе справедлива при любых соотношениях между "элементарной длиной" ℓ и комптоновской длиной волны электрона $\lambda = \frac{\hbar}{m}$ и в пределах $\ell \ll \lambda$ и $\ell \gg \lambda$ дает правильную асимптотику квантовой и классической теории поля соответственно.

Интересно представить интеграл /2.2/, определяющий поправку к массе, в несколько ином виде, воспользовавшись связью формфактора V с плотностью заряда $\rho(\vec{r}^{\,2})$ /см. /4/ /:

$$V(\bar{k}^2\ell^2) = \Big|\int\limits_{0\le r^2\le \ell^2} d\vec{r}\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\rho(\vec{r}^{\,2})\Big|^2. \qquad /2.3/$$

После некоторых простых преобразований можно получить

$$\delta m_2 = \frac{m}{(2\pi)^3}\cdot\frac{e^2}{\hbar}\cdot\Big(\frac{\lambda}{\ell}\Big)^2\int\frac{d\vec{k}}{\sqrt{\vec{k}^2}}V(\vec{k}^2\ell^2)M\Big(\frac{\vec{k}^2\lambda^2}{4}\Big) =$$

$$= \frac{e^2}{2}\int d\vec{r}_1\int d\vec{r}_2\,\rho(\vec{r}_1^{\,2})W(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)\rho(\vec{r}_2^{\,2}). \qquad /2.4/$$

Здесь

$$W(r) = \frac{\lambda}{2(2\pi)^3}\int\frac{d\bar{k}}{\sqrt{\vec{k}^2}}e^{i\vec{k}\vec{r}}M\Big(\frac{\vec{k}^2\lambda^2}{4}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2\lambda\rho}\int\limits_0^\infty ds\,\sin(s\rho)\cdot M(s^2) = \frac{1}{2\pi\lambda}\cdot\frac{e(\rho)}{\rho}, \qquad /2.5/$$

где

$$e(\rho) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\rho} \{ -\frac{4}{\rho^2} + \rho K_1(\rho) + 2K_2(\rho) + \rho \int_0^\infty du K_0(u) \}, \quad /2.6/$$

$\rho = \frac{2r}{\lambda}$ и $K_n(\rho)$ - функция Макдональда / $n = 0,1,2$/.

Асимптотическое поведение функции $e(\rho)$ при малых и больших ρ дается формулами

$$e(\rho) = \begin{cases} \frac{3}{2\pi} \rho (\ln \frac{2}{\rho} + \frac{5}{4} - c + O(\rho)), & \rho \ll 1, \\ 1 + O(\frac{1}{\rho}), & \rho \gg 1, \end{cases} \quad /2.7/$$

где $c = -\psi(1) = 0,577...$ - постоянная Эйлера . График функции $e(\rho)$ и ее асимптотик /2.7/ приведен на *рис. 2.* Он дает представление о том, как изменяется закон Кулона на малых расстояниях.

Функция $W(r)$ представляет собой потенциал взаимодействия между двумя точечными зарядами, получающийся в квантовой теории поля, т.е. с учетом релятивистской инвариантности взаимодействия и с учетом статистики Ферми, которой подчиняются электроны. Именно поэтому на малых расстояниях /по сравнению с комптоновской длиной волны электрона $r \lesssim \lambda$ / он отличается от кулоновского /2/. На больших расстояниях /фактически, при $r \gtrsim 2\lambda$, как видно из *рис. 2*/ потенциал $W(r)$ практически совпадает с кулоновским. Следует особо подчеркнуть, что "большие" и "малые" расстояния определяются комптоновской длиной волны электрона $\lambda = \frac{\hbar}{m}$.

Формулы /1/ и /2/ также могут быть легко получены из представления /2.4/ с учетом оценок /2.7/. Действительно, интегрирование по $\vec{r}$ в /2.4/ проводится по области $|\vec{r}| \le \ell$. Поэтому при $\ell \ll \lambda$ имеем

$$\delta m_2 = \frac{e^2}{2} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2\, \rho(\vec{r}_1^{\,2}) \frac{3}{(2\pi)^2 \lambda} \ln \left(\frac{\lambda}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right) \rho(\vec{r}_2^{\,2}) =$$

$$= \frac{e^2}{4\pi\hbar} \cdot \frac{3}{4\pi} \cdot m[\ln(\frac{\hbar}{m\ell})^2 + O(1)], \qquad /2.6/$$

поскольку функция $\rho(\vec{r}^{\,2})$ нормирована условием

$$\int d\vec{r}\rho(\vec{r}^{\,2}) = 1$$

и

$$\int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2\, \rho(\vec{r}_1^{\,2}) \ln\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{\ell} \rho(\vec{r}_2^{\,2}) = O(1).$$

При $\ell \gg \lambda\!\!\!^{-}$ имеем

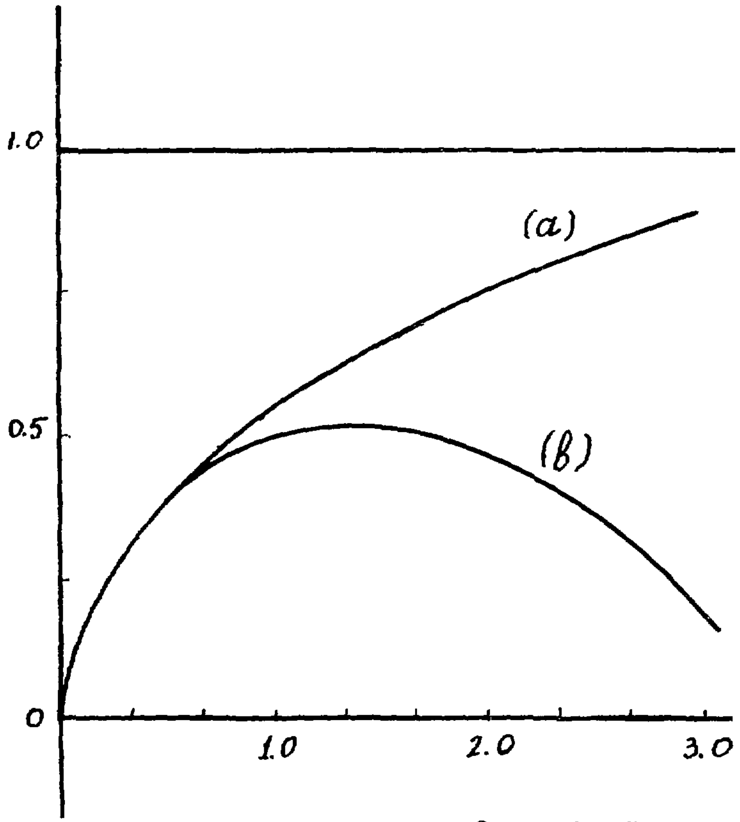

Рис. 2.График функции $e(\rho)[a]$, $\frac{3}{2\pi}\rho(\ln\frac{2}{\rho} + \frac{5}{4} - c)\,[b]$.

$$\delta m_2 = \frac{e^2}{8\pi} \iint \frac{d\vec{r}_1\, d\vec{r}_2\, \rho(\vec{r}_1^{\,2})\rho(\vec{r}_2^{\,2})}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \qquad /2.9/$$

в точном соответствии с классическим результатом.

Таким образом, принцип соответствия выполнен в рассматриваемой нами квантовой электродинамике с нелокальным взаимодействием во втором порядке теории возмущений.

3. Высшие порядки

Остается теперь существенным вопрос, что происходит в высших порядках теории возмущений, поскольку разложение массового оператора идет по параметру $\frac{e^2}{4\pi\hbar}$, который стремится к бесконечности при $\hbar \to 0$.

Ниже будут проведены соответствующие расчеты в четвертом и шестом порядках теории возмущений. Оказывается, что в разложении /1.6/ при $\hbar \to 0$

$$\bar{u}(\vec{p})M_{2n}(p)u(\vec{p}) = O\left(\left(\frac{\hbar}{m\ell}\right)^{n+1}\right), \qquad /3.1/$$

так что

$$\lim_{\hbar\to 0} \delta^{(2n)} m = \lim_{\hbar\to 0} \left(\frac{e^2}{\hbar}\right)^n \bar{u}(\vec{p})M(p)u(\vec{p}).$$

$$= \lim_{\hbar\to 0} O(\hbar) = 0. \qquad /3.2/$$

По всей видимости, это справедливо в любом порядке теории возмущений, хотя нами исследован вклад только четвертого и шестого порядков.

Прежде чем переходить к доказательству этих утверждений, сделаем ряд общих замечаний о методике вычислений. Все интегралы, соответствующие вкладам в δm_{2n}, будем записывать в евклидовой метрике, согласно изложенной в [4] процедуре. Удобно во всех интегрированных по виртуальным евклидовым импульсам сделать замену $q_E = \hbar k_E$, чтобы устранить зависимость от $\hbar$ в формфакторе

$$V\left(\frac{q_E^2 \ell^2}{\hbar^2}\right) = V(k_E^2 \ell^2).$$

Заметим далее, что интегралы, определяющие поправку к массе электрона, вообще говоря, содержат инфракрасные расходимости. Чтобы избавиться от них, мы, как обычно, введем "массу" фотона

$$\frac{1}{q_E^2} \to \frac{1}{q_E^2 + \mu_\phi^2},$$

причем будем считать, что $\mu_\phi^2 = \hbar^2 \lambda^2$, где λ - волновое число, фигурирующее в классическом уравнении, которому подчиняется вектор-потенциал электромагнитного поля

$$(\Box - \lambda^2) A_\mu(x) = 0.$$

Тогда при замене $q_E = \hbar k_E$ получим

$$\frac{1}{q_E^2 + \mu_\phi^2} = \frac{1}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{k_E^2 + \lambda^2}.$$

Вычисление удобно проводить в системе координат, где электрон покоится, т.е. $p_E = (-im, \vec{0})$. Спинор Дирака, описывающий электрон, в этой системе выглядит как

$$u(\vec{p}) = \binom{I}{0} v$$

и нормирован условием

$$\bar{u}(\vec{p})\, u(\vec{p}) = u^*(\vec{p})\, u(\vec{p}) = 1.$$

В этом случае пропагатор электрона может быть представлен в виде:

$$S_E(p_E+\hbar k_E)=\frac{1}{m-\hat p_E-\hbar\hat k_E}=\frac{m(1+\gamma_0)+\hbar\hat k_E}{\hbar[-2imk_4+\hbar k^2]}=$$

/3.3/

$$=\frac{m(1+\gamma_0)+\hbar\hat k_E}{\hbar(-2im)[1+\frac{i\hbar}{2m}k_4-f(\frac{\hbar^2\vec k^2}{m^2})][k_4+i\frac{2m}{\hbar}f(\frac{\hbar^2\vec k^2}{m^2})]},$$

где

$$\hat p_E=+m\gamma_0,$$

$$\hat k_E=ik_4\gamma_0-\vec k\vec\gamma,$$

$$f(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}-1)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^nA_n.$$

При вычислениях в каждом порядке теории возмущений необходимо функцию /3.3/ разложить в ряд по $\hbar^2\vec k^2$ и ограничиться некоторой конечной степенью, связанной с исследуемым порядком теории возмущений.

Так, при изучении четвертого порядка достаточно взять

$$S(p_E+hk_E)=\frac{m(1+\gamma_0)+\hbar\hat k_E}{\hbar(-2im)[1+i\frac{\hbar}{2m}k_4][k_4+i\epsilon]}, \qquad /3.4/$$

а при изучении шестого -

$$S(p_E+hk_E)=\frac{m(1+\gamma_0)+\hbar\hat k_E}{\hbar(-2im)[1+i\frac{\hbar}{2m}k_4][k_4+i\epsilon]}\times$$

/3.5/

$$\times[1-\frac{\frac{\hbar^2\vec k^2}{4m^2}}{1+i\frac{\hbar}{2m}k_4}][1-\frac{i\hbar}{2m}\frac{\vec k^2}{k_4+i\epsilon}].$$

Заметим, что переход $\hbar \to 0$ в двух знаменателях в /3.3/ и, следовательно, в /3.4/ и /3.5/, может быть выполнен независимо, поскольку с точки зрения комплексной k_4-плоскости особенности $k_4 = -i\hbar$ и $k_4 = i\frac{2m}{\hbar}$ никак не связаны друг с другом.

Рассмотрим теперь поправку к массе в четвертом порядке теории возмущений, которая определяется вкладами в массовый оператор, происходящими за счет диаграмм, изображенных на *рис. 3*.

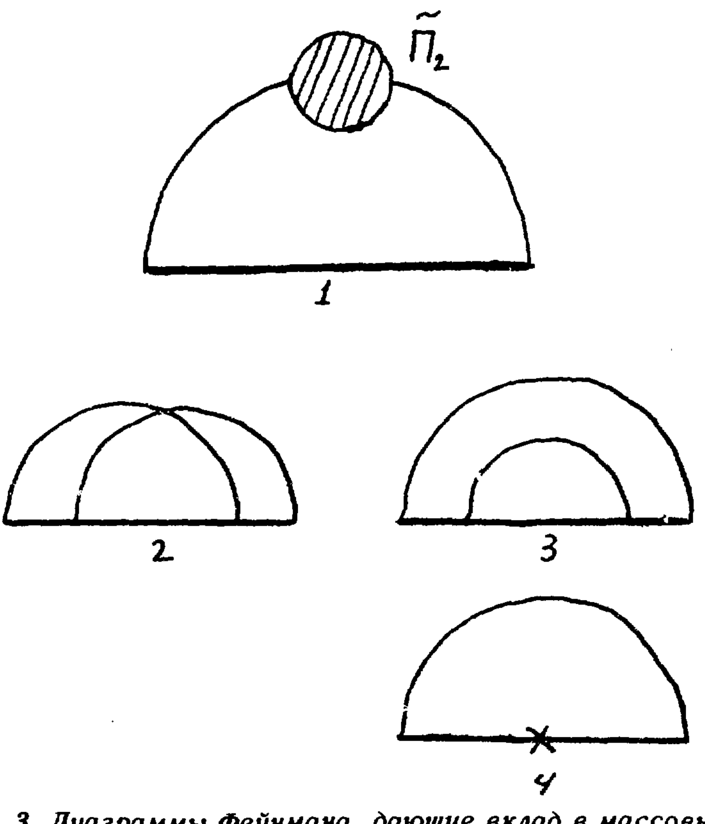

Рис. 3. Диаграммы Фейнмана, дающие вклад в массовый оператор в четвертом порядке теории возмущений.

Заметим, что вклад от контрчленов Z_1 и Z_2 можно не учитывать, поскольку в нашем случае они конечны и равны, в силу тождества Уорда, так что они сокращаются в сумме диаграмм 2,3 и 4 на *рис. 3.*

Диаграмма 1, изображенная на *рис. 3*, содержит перенормированный поляризационный оператор второго порядка, который определен так, что во втором порядке теории возмущений отсутствует перенормировка массы фотона и заряда электрона. В силу градиентной инвариантности он может быть представлен в виде

$$\tilde{\Pi}^{(2)}_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) I_2(q^2), \qquad /3.6/$$

причем при $q^2 \to 0$ $I_2(q^2) = O(q^2)$. Вклад от диаграммы 3.1 записывается

$$\delta^{(1)} m_4 = \frac{e^4}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{(E)} \frac{d^4k}{[k^2 + \lambda^2]^2} V^2(k^2 \ell^2) \times$$

$$/3.7/$$

$$\times \bar{u}(\vec{p}) \gamma_\mu S(p + \hbar k) \gamma_\nu \tilde{\Pi}^{(2)}_{\mu\nu}(\hbar k) u(\vec{p}).$$

Согласно /3.6/ $\tilde{\Pi}^{(2)}_{\mu\nu}(\hbar k) = O(\hbar^1)$ и с учетом /3.4/ получаем, что $\delta^{(1)} m_4 = O(\hbar)$.

Запишем теперь интегралы, соответствующие вкладам диаграмм 2,3 и 4 на *рис. 3* в поправку к массе

$$\delta^{(2)} m_4 + \delta^{(3)} m_4 + \delta^{(4)} m_4 =$$

$$= \frac{e^4}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^8} \iint_{(E)} \frac{d^4q_1 \, d^4q_2 \, V\left(\frac{q_1^2 \ell^2}{\hbar^2}\right) V\left(\frac{q_2^2 \ell^2}{\hbar^2}\right)}{(q_1^2 + \mu_\Phi^2)(q_2^2 + \mu_\Phi^2)} \times$$

$$\times \bar{u}(\vec{p}) \{ \gamma_\mu S(p + q_1) \gamma_\nu S(p + q_1 + q_2) \gamma_\mu S(p + q_2) \gamma_\nu +$$

$$+\gamma_\mu S(p+q_1)\gamma_\nu S(p+q_1+q_2)\gamma_\nu S(p+q_1)\gamma_\mu -$$

$$-\gamma_\mu S(p+q_1)[\bar{u}(\vec{p})\gamma_\nu S(p+q_2)\gamma_\nu \bar{u}(\vec{p})]S(p+q_1)\gamma_\mu \} u(\vec{p}).$$

/3.8/

Воспользовавшись /3.4/, интегралы, соответствующие диаграммам /2-4/, можно записать в следующем виде:

$$\delta^{(2)}m_4 + \delta^{(3)}m_4 + \delta^{(4)}m_4 =$$

$$= \frac{e^4}{\hbar}\frac{i}{(2\pi)^8}\iint_{(E)} d^4k_1 d^4k_2 \frac{V(k_1^2\ell^2)}{k_1^2+\lambda^2}\cdot\frac{V(k_2^2\ell^2)}{k_2^2+\lambda^2}\times$$

$$\times\{[1+O(\hbar^2)]\frac{1}{(k_{14}+i0)(k_{14}+k_{24}+i0)(k_{24}+i0)}$$

$$+[1-\frac{i\hbar}{2m}3(k_{14}+k_{24})+O(\hbar^2)]\frac{1}{(k_{14}+i0)(k_{14}+k_{24}+i0)(k_{14}+i0)}-$$

$$-[1-\frac{i\hbar}{2m}3k_{24}+O(\hbar^2)]\frac{1}{(k_{14}+i0)(k_{24}+i0)(k_{14}+i0)}\}=O(\hbar).$$

/3.9/

Отсюда видно, что вклады от отдельных диаграмм 3.2-3.4 при $\hbar\to 0$ ведут себя как $1/\hbar$, а в сумме как $O(\hbar)$. Таким образом,

$$\lim_{\hbar\to 0}\delta m_4 = 0.$$

Покажем теперь, что в шестом порядке теории возмущений поправка к массе электрона также равна нулю при $\hbar\to 0$. Мы не будем приводить все выкладки, поскольку они достаточно длинные, а укажем лишь путь доказательства. Поправка к массе в этом порядке определяется вкладами от диаграмм, изображенных на ***рис. 4,5.***

Вклад от диаграмм Фейнмана, показанных на *рис. 4*, где $\tilde{\Pi}^{(4)}_{\mu\nu}(q)$ - перенормированный поляризационный оператор четвертого порядка, также стремится к нулю. Действительно, функция $\tilde{\Pi}^{(4)}_{\mu\nu}(q)$ определена так, что отсутствует перенормировка массы фотона и заряда

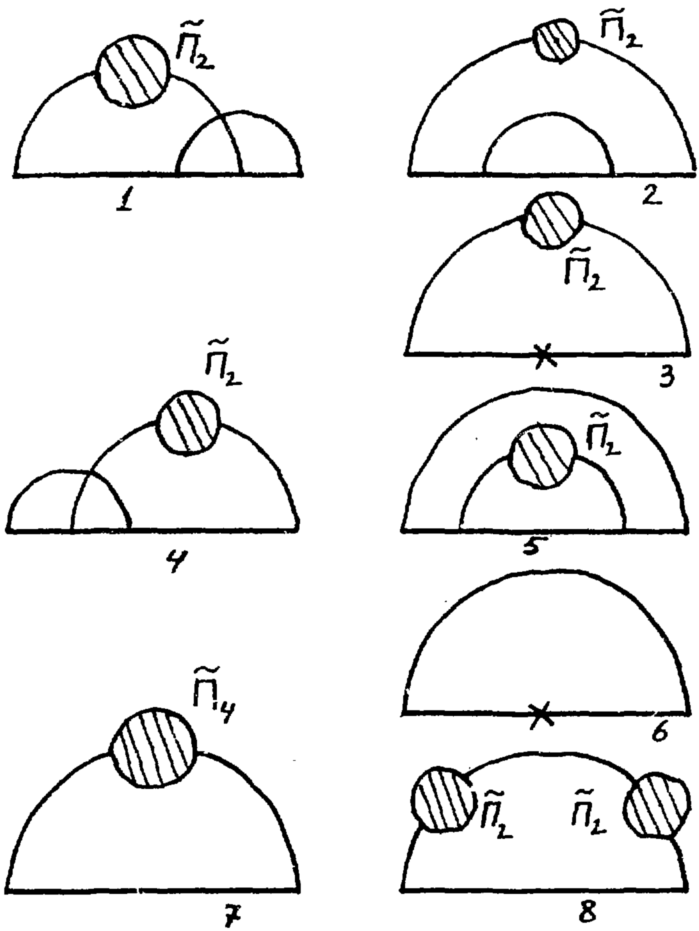

Рис. 4. Диаграмма Фейнмана шестого порядка с поляризацией вакуума, дающие вклад в δm_6.

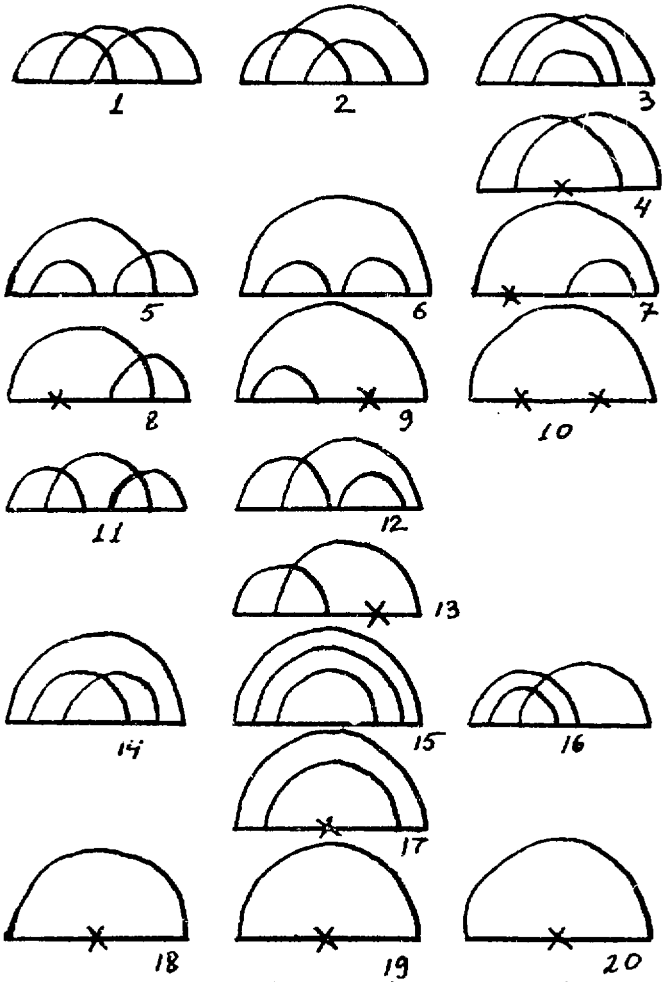

Рис. 5. Диаграммы Фейнмана, дающие вклад в массовый оператор в шестом порядке теории возмущений без поляризации вакуума.

электрона в четвертом порядке теории возмущений. Нетрудно убедиться в том, что при $\hbar \to 0$ $\tilde{\Pi}^{(4)}_{\mu\nu}(\hbar k) = O(\hbar^6)$, поскольку, в отличие от поляризационного оператора второго порядка, $\tilde{\Pi}^{(4)}_{\mu\nu}(\hbar k)$ содержит одну фотонную линию, а добавление виртуальной фотонной линии ведет к появлению фактора $\hbar^2$. Тогда вклады от диаграмм 4.7 и 4.8 ведут себя как $O(\hbar^2)$ при $\hbar \to 0$. Вклады от диаграмм 4.1-4.6 ведут себя как $O(1)$, а в сумме - как $O(\hbar)$, что является следствием сокращения диаграмм четвертого порядка.

Ситуация оказывается намного сложнее для диаграмм, показанных на *рис. 5*. Вклады от этих диаграмм при $\hbar \to 0$ ведут себя как $1/\hbar^2$, поэтому подынтегральное выражение для каждой диаграммы нужно вычислять с точностью до $O(\hbar^3)$. Вклад от каждой диаграммы, изображенной на *рис. 5*, можно представить в следующем виде, используя представление /3.5/:

$$\delta^{(j)} m_6 = \frac{e^6}{(2\pi)^{12} i} \cdot \frac{1}{\hbar^6} \iiint_{(F)} \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 \, V(k_1^2 \ell^2) V(k_2^2 \ell^2) V(k_3^2 \ell^2)}{(k_1^2 + \lambda^2)(k_2^2 + \lambda^2)(k_3^2 + \lambda^2)} \times$$

$$\times \{ a_j(k_{14}, k_{24}, k_{34}) + \hbar b_j(k_{14}, k_{24}, k_{34}) + \hbar^2 c_j(k_{14}, k_{24}, k_{34}) +$$

$$+ \hbar^2 \bar{k}_1^2 d_j(k_{14}, k_{24}, k_{34}) + O(\hbar^3) \},$$

где $j = 1, \dots 20$, согласно обозначениям на *рис. 5*. Оказывается, после простых, но достаточно утомительных выкладок, что:

(I) 1) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$,

2) $a_5 + \dots + a_{10} = 0$,

3) $a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0$,

4) $a_{14} + \dots + a_{17} = 0$,

5) $a_{18} + a_{19} + a_{20} = 0$.

(II) 1) $b_1 + b_2 = b_{11} = b_{14} = b_{16} = b_{18} = 0$,

2) $b_3 + b_4 = 0$,

3) $b_5 + b_8 = 0, \quad b_6 + b_7 + b_9 + b_{10} = 0,$

4) $b_{12} + b_{13} = 0, \quad b_{15} + b_{17} = 0,$

5) $b_{19} + b_{20} = 0.$

(III) $\sum_{j=1}^{20} d_j = \sum_{j=1}^{20} c_j = 0.$

Таким образом,

$$\lim_{\hbar \to 0} \delta m_6 = 0. \qquad /3.10/$$

Полученные результаты позволяют надеяться, что в высших порядках теории возмущений поправка к массе электрона стремится к нулю при $\hbar \to 0$. Однако достаточно простого алгоритма для доказательства этого утверждения найти пока не удалось. Проведенные расчеты в четвертом и шестом порядках позволяют лишь заметить, что механизм исчезновения поправок к массе высших порядков заключается в алгебре спинорных пропагаторов, т.е. в наличии определенных соотношений между ними, или, другими словами, в наличии обобщенного тождества Уорда в квантовой электродинамике.

4. Произвольный спин

Интересно рассмотреть классический предел $\hbar \to 0$ для электромагнитной поправки к массе частицы произвольного спина. Нелокальная квантовая электродинамика частиц произвольного спина была развита в работах одного из авторов /5/.

Мы будем исходить из предложения Хариш-Чандра /6/ и Х.Баба /7/ описывать частицы со спином системой уравнений первого порядка, имеющих формально такой же вид, как и уравнение Дирака:

$$(i\beta_\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \qquad /4.1/$$

Здесь $\psi(x)$ представляет собой столбец из N строк и β_μ / /μ = 0,1,2,3,4/ четыре матрицы ранга N. Если поле $\psi(x)$ в /4.1/ описывает частицы массы m, то оно удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона

$$(\Box - m)\psi(x) = 0. \qquad /4.2/$$

Существует оператор $d(i\partial)$, называемый дивизором, который удовлетворяет соотношению

$$d(i\partial)\Lambda(i\partial) = \Lambda(i\partial)d(i\partial) = (\Box - m^2), \qquad /4.3/$$

где

$$\Lambda(i\partial) = i\beta_\mu \partial_\mu - m.$$

В данном случае нас не будет интересовать, каким образом находятся матрицы β_μ, которые гарантировали бы, что уравнение /4.1/ описывает поле $\psi(x)$ с определенным спином s и не содержит лишних компонент. Будем считать, что принципиально этот вопрос решен. /См., напр., /8/ /. Если матрицы β_μ для заданного спина s известны, то они удовлетворяют условию:

$$\hat{p}^{2s+1} = p^2 \hat{p}^{2s-1}, \qquad (s \geq \frac{1}{2}).$$

Причинная функция частицы со спином s записывается в виде:

$$\tilde{T}_c^{(s)}(p) = \frac{1}{m - \hat{p} - i\epsilon} = \frac{d_s(\hat{p})}{m^2 - p^2 - i\epsilon},$$

$$d_s(\hat{p}) = m + \hat{p} - \frac{1}{m}(p^2 - \hat{p}^2)\left\{1 + \frac{\hat{p}}{m} + \ldots + \left(\frac{\hat{p}}{m}\right)^{2s-2}\right\}. \qquad /4.4/$$

Исследование ряда теории возмущений для S-матрицы формально будет таким же, как и в нелокальной спинорной электродинамике, и, следовательно, вычисление матричных элементов S-матрицы может производиться с помощью фейнмановских диаграмм и правил, с единственным различием, что вместо пропагаторов электронов следует подставить пропагаторы частиц со спином s /4.4/. Кроме того, вершинам диаграмм соответствует теперь β_μ, а не γ_μ.

Во втором порядке теории возмущений интересующая нас поправка к массе частицы со спином s имеет вид:

$$\delta m_2 = \frac{e^2}{(2\pi)^4 \hbar} \bar{\psi}(p) \int_{(E)} d^4 q_E \frac{V\left(\frac{q^2 \ell^2}{\hbar^2}\right)}{q_E^2} \cdot \frac{\beta_\mu d_s(p_E - q_E)\beta_\mu}{m^2 + (p_E - q_E)^2} \psi(p). \qquad /4.5/$$

Здесь

$$(\beta_\mu p_\mu - m)\psi(p) = 0, \quad p_E^2 = -m^2,$$

$$\bar{\psi}(p)\psi(p) = 1.$$

Оператор $d_s(p)$ удовлетворяет условию

$$d_s(p)(\beta_\mu p_\mu - m) = (\beta_\mu p_\mu - m) d_s(p) = (p^2 - m^2) \qquad /4.6/$$

и определяется формулой /4.4/.

Проводя замену $q_E = \hbar k_E$ в интеграле /4.5/, мы видим, что числитель подынтегрального выражения представляет собой полином степени $2s$ по $(\hbar k_E)$. Поэтому в пределе $\hbar \to 0$ имеем

$$\beta_\mu d_s(p_E - \hbar k_E)\beta_\mu = \beta_\mu d_s(p_E)\beta_\mu + O(\hbar). \qquad /4.7/$$

Величина $\bar{\psi}\beta_\mu d_s(p)\beta_\mu \psi$ может быть легко вычислена с помощью равенства /4.6/. Действительно, продифференцировав это равенство по p_μ, получаем тождество

$$\left[\frac{\partial}{\partial p_\mu} d_s(p)\right](\beta_\mu p_\mu - m) + d_s(p)\beta_\mu = 2p_\mu, \qquad /4.8/$$

откуда следует, что

$$\bar{\psi}(p)\beta_{\mu}d_{s}(p)\beta_{\mu}\psi(p) = \bar{\psi}(p)2\hat{p}\psi(p) = 2m\bar{\psi}(p)\psi(p) = 2m. \qquad /4.9/$$

Тогда в пределе $\hbar \to 0$ можно воспользоваться вычислениями раздела 2, и мы имеем:

$$\lim_{\hbar \to 0} \delta m_2 = \frac{e^2}{4\pi^2 \ell} \int_0^{\infty} dx\, V(x^2), \qquad /4.10/$$

т.е. есть в точности классическое выражение для собственной энергии заряженной частицы /см. 2/.

Таким образом оказывается, что при $\hbar \to 0$ поправка к массе частицы с произвольным спином не зависит от спина и массы этой частицы и совпадает с электростатической энергией заряженной частицы.

Литература

1. *С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, 1963.*
2. *V.Wesskopf. Phys.Rev., 56, 72 (1939).*
   R.Feynman. Phys.Rev., 76, 769 (1949).
3. *А.В.Виленкин, П.И.Фомин. ЖЭТФ, 67, 12 /1974/.*
4. *Г.В.Ефимов. Annals of Phys., 71, 466 (1972), ЭЧАЯ, т. 5, вып. 1, Атомиздат, 1974.*
5. *О.А.Могилевский. Некоторые вопросы нелокальной квантовой электродинамики частиц произвольного спина. Автореферат диссертации, ОИЯИ, 2-8804, Дубна, 1975.*
6. *Garish-Chandra. Proc.Roy.Soc., 186, 502 (1946).*
7. *H.J.Bhabha. Rev.Mod.Phys., 17, 200; 21, 451 (1945).*
8. *Y.Takahashi. An introduction to field quantization. Pergamon Press (1969).*
   Х.Умэдзава. Квантовая теория поля. ИЛ, Москва, 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 марта 1976 года.