ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



Р2 - 9620



Н.А.Черников

# ВВЕДЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В МЕХАНИКУ

Доклад на IV Советской гравитационной конференции (Минск, 1976 г.)

1976

P2 - 9620

Н.А.Черников

# ВВЕДЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В МЕХАНИКУ

Доклад на IV Советской гравитационной конференции (Минск, 1976 г.)

"Оставалось бы исследовать, какого рода перемена произойдет от введения воображаемой Геометрии в Механику", - завещал Лобачевский /1/. С тех пор накопилось достаточно результатов для развернутого ответа на этот вопрос.

1. Еще Ньютон доказал, что в механике невозможно отличить абсолютное пространство от относительного, если последнее движется равномерно и прямолинейно, - утверждение, которое теперь называют принципом относительности Галилея, а все относительные пространства, не отличимые от абсолютного, - инерциальными системами отсчета. Понятно, что доказательство Ньютона основывалось на единственно тогда возможном понятии евклидова пространства. Однако, если теперь, последовательно проводя ньютоновскую концепцию абсолютного пространства, мы пожелали бы динамически выделить абсолютную систему отсчета, то пришли бы к отрицанию евклидова постулата о параллельных в абсолютном пространстве.

2. Множество инерциальных систем отсчета само по себе можно рассматривать как особое пространство - пространство скоростей. В ньютоновой механике пространство скоростей евклидово. Что же произойдет от введения геометрии Лобачевского в пространство скоростей? А произойдет то, что мы должны будем отказаться от абсолютного времени Ньютона и перейти от ньютоновских представлений о пространстве и времени к представлениям теории относительности Эйнштейна. Иначе говоря, постулат Ньютона об абсолютном времени оказывается эквивалентным постулату Евклида о параллельных прямых в пространстве скоростей, так что в понятии параллельных прямых, раскрытом Лобачевским, содержится столь цен-

ная информация, как формула Эйнштейна $E = Mc^2$ и формула Эйнштейна-Пуанкаре для относительной скорости двух частиц. Последняя оказалась основной формулой

$$\mathrm{ch}\frac{s}{c} = \mathrm{ch}\frac{s_1}{c}\,\mathrm{ch}\frac{s_2}{c} - \mathrm{sh}\frac{s_1}{c}\,\mathrm{sh}\frac{s_2}{c}\cos\theta$$

тригонометрии Лобачевского, записанной в том виде, который ей придал Э.Бельтрами в 1868 г. /2/. Чтобы получить формулу Бельтрами-Эйнштейна-Пуанкаре, надо положить $\frac{v}{c} = \mathrm{th}\frac{s}{c}$,

$$\frac{v_1}{c} = \mathrm{th}\frac{s_1}{c}, \quad \frac{v_2}{c} = \mathrm{th}\frac{s_2}{c}, \quad \vec{v}_1\vec{v}_2 = c^2\,\mathrm{th}\frac{s_1}{c}\,\mathrm{th}\frac{s_2}{c}\cos\theta.$$

Скорость света $c$ оказывается фундаментальной константой Лобачевского для пространства скоростей.

Таковы два главных способа введения геометрии Лобачевского в механику. Надо, однако, сказать, что ни Эйнштейн, ни Пуанкаре не заметили связи теории относительности с геометрией Лобачевского. Не беремся комментировать, почему Эйнштейн ни разу не высказался по этому вопросу. Что же касается Пуанкаре, то незнанием геометрии Лобачевского здесь объяснять никак не приходится. Можно думать, что, как и Гаусс, Пуанкаре не желал слышать "крика беотийцев". Ведь при построении теории автоморфных функций он широко пользовался геометрией Лобачевского и даже построил модель этой геометрии, называемую его именем. Но "чтобы избегнуть всякой неясности", при изложении результатов он прибегал к другой терминологии /3/.

На тесную связь теории относительности с геометрией Лобачевского впервые обратили внимание независимо друг от друга В.Варичак /4/, , Г.Герглотц /5/ и А.А.Роб /6/. В отличие от скорости $v$, величину $s$, определенную подстановкой $\frac{v}{c} = \mathrm{th}\frac{s}{c}$, Роб назвал быстротой. Сейчас эта величина - длина в пространстве скоростей Лобачевского - становится общеупотребительной в физике высоких энергий. Затем Ф.Клейн /7/ доказал, что группа Лоренца изоморфна группе изометрий пространства Лобачевского. Полностью же связь теории



относительности с геометрией Лобачевского выяснил А.П.Котельников /8/, которому и принадлежит понятие пространства скоростей. Вероятно, геометрические результаты Клейна и Котельникова оказались малодоступными для физиков, так как не привлекали их внимания более тридцати лет. Интерес к этому вопросу снова возрос в пятидесятые годы благодаря работам В.А.Фока /9/, а также нашим работам /10/. В.А.Фок ввел понятие пространства скоростей, опираясь на модель Бельтрами для пространства Лобачевского. В наших же работах мировая скорость частицы определялась как касательная к ее мировой траектории. Отсюда - прямой путь к проективной интерпретации пространства скоростей Котельникова.

Оба способа введения геометрии Лобачевского в механику можно объединить, рассмотрев косое произведение /11/, базой которого является четырехмерное дифференцируемое многообразие, а слоем - проективное пространство касательных прямых, т.е. пространство скоростей частицы. При первом способе неевклидова геометрия вводится в базу, при втором же - в слой. В первом случае неевклидова геометрия может пониматься в весьма широком смысле этого слова, но во втором - только как неевклидова геометрия Лобачевского. Если в слое действует геометрия Евклида, то говорят /и, на наш взгляд, неудачно/ о нерелятивистской теории. Если же в слое действует геометрия Лобачевского, то говорят /и опять-таки неудачно/ о релятивистской теории. Собственно, неудачен лишь выбор терминологии: "релятивистский - нерелятивистский" случай.

Геометрия Лобачевского задается в слое квадратичной формой $g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ с сигнатурой $(1,-1,-1,-1)$. Дифференциалы $dx^\alpha$ координат $x^\alpha$ на базе являются однородными координатами в слое. В пределе $c \to \infty$ эта форма вырождается в произведение: $g_{\alpha\beta} \to \omega_\alpha\omega_\beta$. Линейная форма $\omega_\alpha dx^\alpha$ есть мера времени. Задав ее, мы превращаем проективное пространство скоростей в аффинное, но еще не в евклидово. Однако мы располагаем еще одним пределом при $c \to \infty$: $-c^{-2}g^{\alpha\beta} \to h^{\alpha\beta}$, причем $h^{\alpha\beta}\omega_\beta = 0$. Задание тензора $h^{\alpha\beta}$, ортогонального к $\omega_\alpha$, превращает аффинное пространство скоростей в евклидово.

Если, далее, хотим говорить об инерциальном движении частицы, то задаем на базе аффинную связность /12/ $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$: частица движется инерциально, если ее уравнения движения суть уравнения геодезических $\frac{d^2x^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$. Можно ограничить связность, положив нулю тензор кручения $S^\mu_{\alpha\beta}$. Если еще сильней ограничить связность, положив нулю тензор кривизны Римана-Кристоффеля $R^\nu_{\mu,\alpha\beta}$, то в случае невырожденной метрики приходим к представлениям СТО о пространстве и времени, а в случае вырожденной - к ньютоновским представлениям. В обоих случаях с помощью параллельного переноса добиваемся соответствия между слоями и приходим к понятию инерциальной системы отсчета.

Мы должны, однако, согласовать аффинную связность с метрикой. Полагая $S^\mu_{\alpha\beta} = 0$, в невырожденном случае из условия $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$ находим связность однозначно. В вырожденном же случае, даже если $S^\mu_{\alpha\beta} = 0$, условия $\nabla_\gamma \omega_\alpha = 0$, $\nabla_\gamma h^{\alpha\beta} = 0$ определяют связность не однозначно, а лишь с точностью до тензора $\Delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\omega_\alpha F_{\beta\nu} + \omega_\beta F_{\alpha\nu})h^{\nu\mu}$, где $F_{\alpha\beta}$ - любой антисимметричный тензор. В этом скрывается причина того, что, переходя к пределу $c\to\infty$ в метрике и связности Шварцшильда, мы не получаем $R^\nu_{\mu,\alpha\beta} = 0$ и приходим к тому парадоксу, что движение ньютоновой планеты с такой точки зрения вынуждены рассматривать как инерциальное.

Что же происходит в механике от введения в слой геометрии Лобачевского? В механике одной частицы происходят изменения, во всем аналогичные тем, которые происходят в геометрии при отрицании одного только постулата Евклида о параллельных. Например, кинетическая энергия $E$ и импульс $p$ частицы продолжают выражаться



площадью круга и длиной окружности в пространстве скоростей, но сам вид этой зависимости ($E = \frac{m}{2}s^2$, $p = ms$) изменяется ($E = mc^2(\mathrm{ch}\frac{s}{c} - 1)$, $p = mc\,\mathrm{sh}\frac{s}{c}$, где $s$ - радиус круга и окружности, равный быстроте) в соответствии с формулами Лобачевского для площади круга и длины окружности. Более радикальным изменениям подвергается механика двух и более частиц. В этой обширной части механики остается неразрушенной только механика контактных столкновений частиц. Последняя же изменяется в такой же мере, как и механика одной частицы. Так, закон сохранения 4-импульса при распаде одной частицы на две продолжает оставаться эквивалентным паре архимедовых законов рычага в пространстве скоростей. Однако вместо плеч рычага в этих законах приходится считать, что, впрочем, и естественно, длины окружностей, описываемых нагруженными точками рычага. Эквивалентность закона сохранения 4-импульса паре законов рычага Архимеда позволяет представить механику контактных столкновений частиц в виде статики в пространстве скоростей. Следующая задача поясняет эту мысль и указывает на тесную связь формулы Эйнштейна $E = Mc^2$ с формулой Лобачевского $F = (\pi - X - Y - Z)c^2$ для дефекта треугольника.

Пусть две частицы с мировыми скоростями $a_1$ и $a_2$ и массами $m_1$ и $m_2$ соединяются в одну частицу и требуется найти мировую скорость $a$ и массу $m$ образовавшейся частицы. Согласно первому закону рычага, точка $a$ находится на отрезке $a_1a_2$ и делит его так, что $m_1\ell_1 = m_2\ell_2$, где $\ell_1$ и $\ell_2$ - длины окружностей радиусов $aa_1$ и $aa_2$. Этим законом точка $a$ определяется однозначно. Из второго закона рычага найдем массу $m$. Обозначив $\ell$ длину окружности радиуса $a_1a_2$, запишем оба закона рычага в симметричной форме: $\frac{m_1}{\ell_2} = \frac{m_2}{\ell_1} = \frac{m}{\ell}$.

Сместим немного точку $a$ с отрезка $a_1a_2$ и получим почти вырожденный треугольник $a_1aa_2$. Применим к этому треугольнику теорему синусов Бойяи: $\frac{\sin X}{\rho_2} = \frac{\sin Y}{\rho_1} = \frac{\sin Z}{\rho}$,

где $X, Y, Z$ - углы при вершинах $a_1, a_2, a$, соответственно. Углы $X$ и $Y$ близки к нулю, а угол $Z$ - к $\pi$. Имеем $X = \lambda m_1$, $Y = \lambda m_2$, $\pi - Z = \lambda m$, где $\lambda$ - малый параметр. Подставляя эти углы в формулу $\cos Z + \cos X \cos Y = \sin X \sin Y \operatorname{ch}\frac{s}{c}$ тригонометрии Лобачевского, найдем $m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \operatorname{ch}\frac{s}{c}$. Здесь $s$ - длина отрезка $a_1a_2$, равная относительной быстроте, с которой сталкиваются частицы. Дефект треугольника $F = (\pi - X - Y - Z)c^2 = \lambda(m - m_1 - m_2)c^2$, а поглощенная кинетическая энергия $E = (m - m_1 - m_2)c^2$.

Что касается механики неконтактных взаимодействий двух и более частиц, то в случае СТО и, тем более, ОТО, таковой мы еще не располагаем. Надо думать, что вместо обыкновенных дифференциальных уравнений здесь придется иметь дело с уравнениями в частных производных.

*Литература*


1. *Н.И.Лобачевский. О началах геометрии. В сб. "Об основаниях геометрии", Гостехиздат, М., 1956, стр. 49.*
2. *Э.Бельтрами. Опыт интерпретации неевклидовой геометрии, там же, стр. 212.*
3. *А.Пуанкаре. Теория фуксовых групп, там же, стр. 306.*
4. *V.Varicak. Phys.Z., 1910, 11, 93, 287, 586.*
5. *G.Herglotz. Ann.d.Phys., 1910, 31, 404.*
6. *A.A.Robb. Optical geometry of motion, a new view of the theory relativity, Cambridge, 1911.*
7. *Ф.Клейн. О геометрических основаниях лоренцевой группы. В кн. "Новые идеи в математике", вып. 5, 144-174, Спб.1914.*
8. *А.П.Котельников. Принцип относительности и геометрия Лобачевского. В кн. "Memorial N.I.Lobachevskii", 2, 37-66, Казань, 1927.*





9. ***В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения. Гостехиздат, М., 1955.***
10. ***Н.А.Черников. "Научные доклады Высшей школы", физ.-мат. серия, 2, 158 /1958/; Стохастическое движение релятивистской частицы, Препринт ИТФ-68-44, Киев, 1968. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1973, т. 4, вып. 3 /773-810/.***
11. ***Н.Стинрод. Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953.***
12. ***А.П.Норден. Пространства аффинной связности. Гостехиздат, М.-Л., 1950.***


Рукопись поступила в издательский отдел
19 марта 1976 года.