ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

96-460

Р2-96-460

И.Н.Кондрашук*

МИНИМИЗАЦИЯ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА В МНОГОХИГГСОВСКИХ МОДЕЛЯХ

Направлено в «Журнал экспериментальной и теоретической физики»

---

*E-mail: ikond@thsun1.jinr.dubna.su

1996

1 Введение

В стандартной модели элементарных частиц фермионы приобретают массы через юкавское взаимодействие со скалярным хиггсовским полем, которое имеет ненулевое вакуумное среднее. В то время как для обеспечения фермионов массами в стандартной модели достаточно одного хиггсовского поля, в её минимальном суперсимметричном расширении – минимальной суперсимметричной стандартной модели (МССМ) – для этого необходимы уже два хиггсовских поля **ввиду голоморфности** суперпотенциала по полям. Вакуумное среднее одного хиггсовского поля придаст массы нижним кваркам и лептонам, а вакуумное среднее другого сделает массивными верхние кварки [1].

МССМ успешно справляется со многими проблемами, которые остались не решёнными в рамках стандартной модели. К ним относятся достижение объединения сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий на очень большой энергии [2], решение связанной с этим объединением проблемы иерархий (в суперсимметричных квантовополевых моделях отсутствуют квадратичные ультрафиолетовые расходимости [3], поэтому в теории возможно сосуществование лёгких и тяжёлых частиц), радиационное нарушение электрослабой симметрии [4] и т. д.

Несмотря на такой успех МССМ, нельзя сбрасывать со счетов её дальнейшие многохиггсовские расширения. Однако ряд физических проблем остаются не решёнными и в МССМ. В частности, остаётся непонятным происхождение значительной иерархии в массовом спектре кварков [5]. Кроме того, малая величина наблюдаемого CP-нарушения **также не находит** своего объяснения в рамках МССМ. Часть этих проблем может быть решена в многохиггсовских расширениях МССМ. В них возможно объяснить наблюдаемую иерархию кварковых масс иерархией вакуумных средних хиггсовких полей [5], а также объяснить наблюдаемые эффекты CP-нарушения присутствием относительных фаз между вакуумными средними хиггсовских полей [6].

Изучение многохиггсовских систем затруднено большим количеством хиггсовских полей. Для того чтобы хиггсовские поля приобретали ненулевые вакуумные средние, хиггсовский потенциал должен иметь ненулевой минимум. Расширенность хиггсовского сектора делает задачу поиска минимума нетривиальной. В этой работе мы рассмотрим расширение скалярного хиггсовского потенциала МССМ на произвольное число хиггсовских дублетов и найдём минимум этого расширенного потенциала точно, не делая никаких априорных предположений о форме минимума.

2 Потенциал МССМ

Хиггсовский потенциал минимальной суперсимметричной стандартной модели имеет вид [1, 7]

Объединённый институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

$$V = m_1^2|H_1|^2 + m_2^2|H_2|^2 + \mu\left(H_1\epsilon H_2 + H_1^*\epsilon H_2^*\right) + \frac{g^2+g'^2}{8}\left(|H_1|^2 - |H_2|^2\right)^2 + \frac{g^2}{2}|H_1^\dagger H_2|^2, \tag{1}$$

в котором H_1, H_2 являются скалярными хиггсовскими дублетами с противоположным гиперзарядом:

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix}.$$

Компоненты дублетов пронумерованы знаком электрического заряда, который они получат после нарушения электрослабой симметрии. Для краткости в потенциале (1) использованы следующие обозначения:

$$|H_1|^2 = \left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2, \quad |H_2|^2 = \left|H_2^+\right|^2 + \left|H_2^0\right|^2, \quad H_1\epsilon H_2 = H_1^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} H_2^\beta, \tag{2}$$

где α, β есть $SU(2)$-индексы, и подразумевается, что $\epsilon_{12} = 1$. Форма членов четвёртой степени характерна для $N = 1$ суперсимметричных теорий. Она возникает после исключения так называемых D-компонент векторного суперполя и не меняется квантовыми поправками вследствие теоремы о неперенормировке суперпотенциала [3].

Электрослабая симметрия в МССМ, как и в стандартной модели, нарушается через механизм Хиггса [1]. Для того чтобы хиггсовские поля приобрели ненулевые вакуумные средние, этот потенциал должен иметь нетривиальный минимум. Обычно предполагается, что только нейтральные компоненты хиггсовских дублетов приобретают ненулевые вакуумные средние [1, 7], и затем минимум ищется вдоль этих нейтральных компонент. В работе [8] было показано, что минимум скалярного потенциала (1) действительно достигается на нейтральных полевых конфигурациях

$$H_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$v_1^2 = \left(m_1^2 + m_2^2 \mp \sqrt{(m_1^2+m_2^2)^2 - 4|\mu|^2}\right) F_\pm(|\mu|^2),$$

$$v_2^2 = \left(m_1^2 + m_2^2 \pm \sqrt{(m_1^2+m_2^2)^2 - 4|\mu|^2}\right) F_\pm(|\mu|^2),$$

$$F_\pm(|\mu|^2) = \frac{1}{g^2+g'^2}\,\frac{\pm(m_1^2 - m_2^2) - \sqrt{(m_1^2+m_2^2)^2 - 4|\mu|^2}}{\sqrt{(m_1^2+m_2^2)^2 - 4|\mu|^2}}.$$

а так же на калибровочно им эквивалентным (для $\mu < 0$).

Условием существования вещественных и положительных решений для $|H_1|$ и $|H_2|$ является [8]:

$$m_1^2 m_2^2 \leq \mu^2, \tag{4}$$

в то время как условие стабильности на больших полях в направлении исчезновения членов четвертой степени (D-плоские направления) выглядит как [8]:

$$m_1^2 + m_2^2 > 2|\mu|. \tag{5}$$

3 Расширение на произвольное число дублетов

Теперь мы обобщим потенциал минимальной суперсимметричной стандартной модели (1) на случай произвольного числа пар хиггсовских дублетов. Потенциал, который мы будем рассматривать, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} V &= \overline{m}^2 \sum_i \left|\overline{H}_i\right|^2 + m^2 \sum_i |H_i|^2 + \mu_i\left(\overline{H}_i\epsilon H_i + \overline{H}_i^*\epsilon H_i^*\right) + \\ &+ \frac{g^2}{2}\left[\left(\overline{H}_i^\dagger T^1 \overline{H}_i + H_i^\dagger T^1 H_i\right)^2 + \left(\overline{H}_i^\dagger T^2 \overline{H}_i + H_i^\dagger T^2 H_i\right)^2 + \left(\overline{H}_i^\dagger T^3 \overline{H}_i + H_i^\dagger T^3 H_i\right)^2\right] \\ &+ \frac{g'^2}{8}\left[\sum_i |\overline{H}_i|^2 - \sum_i |H_i|^2\right]^2. \end{aligned} \tag{6}$$

В этом потенциале число пар (поколений) хиггсов произвольно. По повторяющимся индексам поколений хиггсов в (6) производится суммирование. $SU(2)$-генераторы T^a имеют вид $T^a = \frac{1}{2}\sigma^a$, а компоненты хиггсовских дублетов обозначены как

$$\overline{H}_i = \begin{pmatrix} \overline{H}_i^U \\ \overline{H}_i^D \end{pmatrix}, \quad H_i = \begin{pmatrix} H_i^U \\ H_i^D \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Как и ранее в (2), для краткости подразумевается, что

$$\left|\overline{H}_i\right|^2 = \left|\overline{H}_i^U\right|^2 + \left|\overline{H}_i^D\right|^2, \quad |H_i|^2 = \left|H_i^U\right|^2 + \left|H_i^D\right|^2.$$

Хиггсовские дублеты $\overline{H}_i$ и H_i имеют противоположные гиперзаряды. Потенциал (6) обладает свойством $SU(2)\times U(1)$ инвариантности. Если оставить только одну пару хиггсовых дублетов, то потенциал (6) перейдёт в потенциал МССМ (1).

4 Минимум расширенного потенциала

Члены четвёртой степени возникли после исключения вспомогательных нединамических компонент векторных суперполей. Первые три слагаемые четвёртой степени по полям в потенциале (6) представляют собой квадраты компонент D^a калибровочного супермультиплета, соответствующего группе $SU(2)$, в то время как последнее слагаемое в потенциале является квадратом компоненты D' калибровочного супермультиплета, соответствующего группе $U(1)$. Квадратичная часть потенциала (6) определяется как суперсимметричными вкладами, так и вкладами, мягко нарушающими суперсимметрию [5, 9]. Именно последние являются причиной для существования ненулевого нетривиального минимума. В суперсимметричной теории (без мягкого нарушения суперсимметрии) минимум потенциальной энергии может быть нетривиальным, но энергия системы в минимуме всегда будет равна нулю.

Компоненты D^a преобразуются при $SU(2)$-преобразованиях как вещественный трёхмерный вектор, оставляя инвариантной величину $\sum_a D^{a2}$. Можно воспользоваться этой инвариантностью и положить вектор D^a вдоль третьей оси, соответствующей диагональному генератору T^3 группы $SU(2)$. Это можно показать явно, представив произвольную $SU(2)$-матрицу в виде

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta\, e^{i\alpha} & -\sin\theta\, e^{-i\beta} \\ \sin\theta\, e^{i\beta} & \cos\theta\, e^{-i\alpha} \end{pmatrix}.$$

Калибровочному преобразованию хиггсовских полей, задаваемому этой матрицей, соответствует следующее преобразование вектора D^a :

$$\begin{pmatrix} D^1 \\ D^2 \\ D^3 \end{pmatrix} \to M \begin{pmatrix} D^1 \\ D^2 \\ D^3 \end{pmatrix},$$

где вещественная ортогональная матрица M имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta\cos 2\alpha - \sin^2\theta\cos 2\beta & \cos^2\theta\sin 2\alpha - \sin^2\theta\sin 2\beta & -\sin 2\theta\cos(\beta-\alpha) \\ -\cos^2\theta\sin 2\alpha - \sin^2\theta\sin 2\beta & \cos^2\theta\cos 2\alpha + \sin^2\theta\cos 2\beta & -\sin 2\theta\sin(\beta-\alpha) \\ \sin 2\theta\cos(\alpha+\beta) & \sin 2\theta\cos(\alpha+\beta) & \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеет смысл рассматривать только такие полевые конфигурации, для которых $D^1 = D^2 = 0$. Хиггсовский потенциал при этом будет выглядеть в обозначениях (7) как

$$\begin{aligned} V &= \overline{m}^2\left(\sum_i \left|\overline{H}_i^U\right|^2 + \sum_i \left|\overline{H}_i^D\right|^2\right) + m^2\left(\sum_i \left|H_i^U\right|^2 + \sum_i \left|H_i^D\right|^2\right) \\ &+ \sum_i \mu_i\left(\overline{H}_i^U H_i^D - \overline{H}_i^D H_i^U + \overline{H}_i^{U*} H_i^{D*} - \overline{H}_i^{D*} H_i^{U*}\right) \\ &+ \frac{g^2}{4}\left[\sum_i \left|\overline{H}_i^U\right|^2 + \sum_i \left|H_i^U\right|^2 - \sum_i \left|\overline{H}_i^D\right|^2 - \sum_i \left|H_i^D\right|^2\right]^2 \\ &+ \frac{g'^2}{8}\left[\sum_i \left|\overline{H}_i^U\right|^2 + \sum_i \left|\overline{H}_i^D\right|^2 - \sum_i \left|H_i^U\right|^2 - \sum_i \left|H_i^D\right|^2\right]^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Выбрав фазы полей так, чтобы

$$Arg\left(\mu_i \overline{H}_i^U H_i^D\right) = \pi, \quad Arg\left(\mu_i \overline{H}_i^D H_i^U\right) = 0, \tag{9}$$

перепишем потенциал (8) в виде

$$\begin{aligned} V &= \overline{m}^2\left(\sum_i \left|\overline{H}_i^U\right|^2 + \sum_i \left|\overline{H}_i^D\right|^2\right) + m^2\left(\sum_i \left|H_i^U\right|^2 + \sum_i \left|H_i^D\right|^2\right) \\ &- 2\sum_i |\mu_i|\left(\left|\overline{H}_i^U\right|\left|H_i^D\right| + \left|\overline{H}_i^U\right|\left|H_i^D\right|\right) \\ &+ \frac{g^2}{4}\left[\sum_i \left|\overline{H}_i^U\right|^2 + \sum_i \left|H_i^U\right|^2 - \sum_i \left|\overline{H}_i^D\right|^2 - \sum_i \left|H_i^D\right|^2\right]^2 \\ &+ \frac{g'^2}{8}\left[\sum_i \left|\overline{H}_i^U\right|^2 + \sum_i \left|\overline{H}_i^D\right|^2 - \sum_i \left|H_i^U\right|^2 - \sum_i \left|H_i^D\right|^2\right]^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Третье слагаемое можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &-2\sqrt{\left(\sum_i \left|\overline{H}_i^U\right|^2\right)\left(\sum_i |H_i^D|^2\right)}\sum_i |\mu_i|\alpha_i\beta_i \\ &-2\sqrt{\left(\sum_i \left|\overline{H}_i^D\right|^2\right)\left(\sum_i |H_i^U|^2\right)}\sum_i |\mu_i|\gamma_i\delta_i, \end{aligned}$$

где α_i, β_i, γ_i и δ_i определены как

$$\begin{aligned} \left|\overline{H}_i^U\right| &= \alpha_i\sqrt{\sum_i \left|\overline{H}_i^U\right|^2}, & \sum_i \alpha_i^2 = 1 \\ \left|H_i^D\right| &= \beta_i\sqrt{\sum_i |H_i^D|^2}, & \sum_i \beta_i^2 = 1 \\ \left|\overline{H}_i^D\right| &= \gamma_i\sqrt{\sum_i \left|\overline{H}_i^D\right|^2}, & \sum_i \gamma_i^2 = 1 \\ \left|H_i^U\right| &= \delta_i\sqrt{\sum_i |H_i^U|^2}, & \sum_i \delta_i^2 = 1. \end{aligned}$$

При фиксированных $\sum_i \left|\overline{H}_i^U\right|^2$, $\sum_i \left|\overline{H}_i^D\right|^2$, $\sum_i \left|H_i^U\right|^2$, и $\sum_i \left|H_i^D\right|^2$ и при иерархии $|\mu_i|$ такой, что

$$|\mu_1| < |\mu_2| < \ldots < |\mu_{n-1}| < |\mu_n|,$$

выражение (10) минимально, если

$$\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \delta_n = 1, \tag{11}$$

в то время как все остальные $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ и δ_i равны нулю. Это означает, что задача свелась к поиску минимума хиггсовского потенциала МССМ (1) с хиггсовскими дублетами $\overline{H}_n$ и H_n вместо H_1 и H_2, соответственно, на полевых конфигурациях, которые удовлетворяют условиям

$$Arg\left(\mu_n \overline{H}_n^U H_n^D\right) = \pi, \quad Arg\left(\mu_n \overline{H}_n^D H_n^U\right) = 0, \quad D^1 = D^2 = 0.$$

Очевидно, что полевая конфигурация (3), дающая минимум потенциалу (1), удовлетворяет этим условиям (если $\mu_n < 0$), а значит минимум потенциала (6) есть

$$\overline{H}_n = \begin{pmatrix} \overline{v}_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_n = \begin{pmatrix} 0 \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \overline{H}_i = H_i = 0 \quad \text{for} \quad i \neq n,$$

$$\overline{v}_n^2 = \left(\overline{m}^2 + m^2 \mp \sqrt{(\overline{m}^2 + m^2)^2 - 4|\mu_n|^2}\right) F_\pm(|\mu_n|^2),$$

$$v_n^2 = \left(\overline{m}^2 + m^2 \pm \sqrt{(\overline{m}^2 + m^2)^2 - 4|\mu_n|^2}\right) F_\pm(|\mu_n|^2),$$

$$F_\pm(|\mu_n|^2) = \frac{1}{g^2 + g'^2} \frac{\pm(\overline{m}^2 - m^2) - \sqrt{(\overline{m}^2 + m^2)^2 - 4|\mu_n|^2}}{\sqrt{(\overline{m}^2 + m^2)^2 - 4|\mu_n|^2}}$$

и калибровочно ему эквивалентные. При таком способе анализа очевидно, что это абсолютный и единственный минимум потенциала (6). Этот минимум является электрически нейтральным и не приводит к несохранению электрического заряда при спонтанном нарушении электрослабой симметрии. Условием существования вещественных и положительных решений для $|H_n|$ и $\left|\overline{H}_n\right|$ является

$$m^2 \overline{m}^2 \leq |\mu_n|^2.$$

Оно обобщает условие (4) для МССМ. Если оно не выполнено, единственным минимумом потенциала (6) является тривиальный. Условие стабильности потенциала (6) на больших полях в направлении исчезновения членов четвертой степени (D-плоские направления) выглядит как:

$$m^2 + \overline{m}^2 > 2|\mu_n|.$$

Это условие обобщает соответствующее условие (5). Его легко вывести по аналогии с рассуждениями, приведшими к результату (11).

5 Заключение

Предложенный метод позволяет находить минимум потенциала (6) в многохиггсовской модели с произвольным числом пар хиггсовских дублетов, не делая априорных предположений о форме минимума (то есть не предполагая заранее его

нейтральности, вещественности и т. п.). Специфический вид членов четвёртой степени, диктуемый суперсимметрией, позволяет воспользоваться калибровочной инвариантностью и свести задачу к поиску минимума потенциала минимальной суперсимметричной стандартной модели. Предложенный метод также позволяет легко найти условия стабильности многохиггсовского потенциала в направлениях исчезновения членов четвёртой степени (D-плоские направления).

Данный результат может иметь приложения в феноменологии многохиггсовских моделей, поскольку он открывает возможности для строгого анализа нарушения электрослабой симметрии в моделях с расширенным хиггсовским сектором.

Я благодарен Международному **центру фундаментальной физики в Москве** (ICFPM) за предоставленную мне стипендию (грант INTAS #93-2492-ext). Эта работа выполнена в рамках исследовательской программы ICFPM.

Я также благодарен Российскому **фонду фундаментальных исследований (гранты** РФФИ #96-02-17379а и RFFR–DFG #96-02-000826) за финансовую поддержку.

Литература

[1] H.E. Haber, G.L. Kane, T. Sterling, Nucl. Phys. **B161**, 493 (1979);
J.F. Gunion, H.E. Haber, Nucl. Phys. **B272**, 1 (1986);
H.E. Haber, G.L. Kane, Phys. Rep. **117**, 75 (1985);
H.E. Haber, preprint SCIPP 91/06; preprint SCIPP 92/06;
H.E. Haber, preprint SCIPP 92/33

[2] U. Amaldi, W. de Boer, H. Fürstenau, Phys. Lett. **260B**, 447 (1991)

[3] M.T. Grisaru, W. Siegel, M. Rocek, Nucl. Phys. B159, 429 (1979)

[4] G.G. Ross, R.G. Roberts, Nucl. Phys. **B377**, 571 (1992)

[5] L.E. Ibañez, Phys. Lett. **139B**, 363 (1984);
D.I. Kazakov, preprint JINR E2-94-162;
I.N. Kondrashuk, Int. J. Mod. Phys. **A11**, 989 (1996);
D.I. Kazakov, M.Yu. Kalmykov, I.N. Kondrashuk, A.V. Gladyshev, Nucl. Phys. **B471**, 389 (1996)

[6] M. Masip, A. Rasin, Nucl. Phys. **B460**, 449 (1996);
M. Masip, A. Rasin, Phys. Rev. **D52**, 3768 (1995)

[7] K. Inoue, A. Kakuto, H. Komatsu, S. Takeshita, Progr. Theor. Phys. **67**, 1889 (1982); Progr. Theor. Phys. **68**, 927 (1982);
R.A. Flores, M. Sher, Ann. Phys. **148**, 95 (1983);
R. Barbieri, Rivista del Nuovo Cimento **Vol.11 No.4**, 1 (1988);
M. Sher, Phys. Rept. **179**, 273 (1989);

[8] I.N. Kondrashuk, JETP Lett. 62, 472 (1995)

[9] L. Girardello, M.T. Grisaru, Nucl. Phys. **B194**, 65 (1982)

Рукопись поступила в издательский отдел
9 декабря 1996 года.

Кондрашук И.Н. P2-96-460
Минимизация скалярного потенциала в многохиггсовских моделях

Рассмотрено расширение хиггсовского потенциала минимальной суперсимметричной стандартной модели (МССМ) на случай произвольного числа хиггсовских дублетов. Показано, что у расширенного потенциала существует абсолютный и единственный минимум, полностью аналогичный минимуму МССМ. Этот минимум является электрически нейтральным и не приводит к несохранению электрического заряда при спонтанном нарушении электрослабой симметрии. Предложенный метод позволяет найти минимум расширенного потенциала, не делая априорных предположений о форме минимума.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1996

Перевод автора

Kondrashuk I.N. P2-96-460
Minimization of the Scalar Potential in the Multihiggs Models

We consider an extension of the scalar Higgs potential of the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM) to an arbitrary number of Higgs doublets. The extended potential has an absolute and only nontrivial minimum that is found exactly. It appears to be a simple analog to the well-known minimum of the MSSM. This minimum is charge-conversing one. The proposed method allows one to find the minimum of the scalar multihiggs potential exactly without any apriorial assumptions about the form of the minimum.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1996