

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

96-407

P2-96-407

С.М.Доркин*, Л.П.Каптарь, С.С.Семих

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ СПЕКТРЕ. УРАВНЕНИЯ
БЕТЕ—СОЛПИТЕРА

Направлено в журнал «Ядерная физика»

*Дальневосточный государственный университет

1996

1 Введение

Одной из проблемных задач релятивистской ядерной физики является исследование релятивистских эффектов в реакциях с большой передачей импульса и ковариантное описание таких процессов. Традиционные подходы, основанные на нерелятивистском уравнении Шредингера, не дают адекватного описания ядерных процессов при больших (в несколько ГэВ и больше) передачах импульса q . В таких ситуациях становится необходимым применение релятивистских, ковариантных подходов. В последние десятилетия проводятся интенсивные исследования релятивистских лоренц-инвариантных моделей [1, 2, 3, 4, 5, 6] и делаются попытки применения их к описанию малочастичных систем. Достигнутый в этом направлении успех позволяет утверждать, что ковариантные подходы могут сейчас полностью заменить, по крайней мере для малочастичных систем, подходы, основанные на нерелятивистских уравнениях. Это наглядно можно продемонстрировать на примере исследований свойств дейтрона и реакций с его участием в рамках ковариантных подходов [7, 8, 1, 2, 3, 6], основанных на решении (в различных приближениях) уравнения Бете – Солпитера (БС). Кроме того, весьма актуальной является задача нахождения спектра масс связанной системы и соответствующих ковариантных волновых функций, например, при исследовании свойств мезонов как связанных состояний кварка и антикварка. Поскольку кварк-антикварковая связанная система является сугубо релятивистской, особую актуальность приобретает проблема ковариантности подходов к ее описанию. Подходы, основанные на уравнении БС с ядрами взаимодействий, мотивированными КХД, являются в этой области весьма распространенными.

Следует отметить, что хотя уравнение БС было предложено довольно давно [9, 10], формальные математические свойства его ядра для случая спинор-спинорных систем пока не получили удовлетворительного описания. Даже численное решение уравнения БС в лестничном приближении до сих пор удалось получить, по-видимому, только в двух исследовательских группах [1, 8]. До настоящего времени подробное



описание процедур нахождения решений и строгое математическое обоснование использованных алгоритмов в литературе практически отсутствует.

Целью данной работы является построение строго обоснованного метода исследования энергетического спектра уравнения БС для системы из двух спинорных частиц, который был бы применим, в принципе, к уравнению с любым модельным взаимодействием.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 обсуждаются необходимые для дальнейшего изложения общие свойства амплитуды БС. Этот раздел имеет вводный характер. В разделе 3 излагается суть предлагаемого метода на примере скаляр-скалярного уравнения БС. Для этого ядро уравнения БС модифицируется таким образом, чтобы в результате получить эквивалентное симметричное уравнение Фредгольма, для которого известны точные свойства спектра решений и ядра (в частности, разложение ядра в ряд Гильберта – Шмидта). Исходя из этих свойств формулируется строго обоснованный численный метод и приводится пример конкретных расчетов энергетического спектра по этому методу. Раздел 4 посвящен формальному обобщению полученных результатов на случай спинор-спинорного уравнения БС в лестничном приближении. В следующем разделе приводятся полученные результаты решения уравнения БС для дейтрона и анализируется адекватность модели на примерах вычисления простейших наблюдаемых величин. В разделе 6 помещены основные выводы работы.

2 Некоторые свойства амплитуды БС

Многие свойства спинор-спинорной амплитуды БС можно установить, не обращаясь к уравнению БС, которому она удовлетворяет, а исходя только из ее определения. К таким свойствам относится связь между амплитудой и сопряженной амплитудой БС, которая будет рассматриваться в следующем пункте. Кроме того, при разработке метода решения уравнения БС нам потребуется детальное знание спин-угловой структуры амплитуды, и в пункте 2.2 мы получим соответствующие

уравнения, описывающие спин-угловую зависимость произвольной амплитуды БС.

2.1 Сопряженная амплитуда

Амплитуда БС $\Phi_{JM}(x_1, x_2)$, соответствующая состоянию $|P; JM\rangle$ системы частиц А и В с определенным собственным моментом J , его проекцией M , и полным импульсом $P = (P_0, \mathbf{P})$, определяется как матричный элемент T -произведения операторов полей соответствующих частиц [9]:

$$[\Phi_{JM}(x_1, x_2)]_{\alpha\beta} = \langle 0 | T \psi_{\alpha}^A(x_1) \psi_{\beta}^B(x_2) | P; JM \rangle. \quad (1)$$

Определенная таким образом амплитуда позволит вычислить матричные элементы оператора любой наблюдаемой величины системы $A + B$. Метод вычисления наблюдаемых в формализме Бете – Солпитера был предложен в работе [11], согласно которому выражение для некоторой наблюдаемой O можно записать в виде (сохранена только матричная структура, необходимые интегрирования опущены):

$$O \equiv \langle P; JM | \hat{O}(A, B) | P; JM \rangle = [\bar{\Phi}_{JM}]_{\alpha\beta} O_{\alpha\sigma}^A O_{\beta\tau}^B [\Phi_{JM}]_{\sigma\tau}, \quad (2)$$

где $[\bar{\Phi}_{JM}]_{\alpha\beta}$ – сопряженная амплитуда БС, определенная как

$$[\bar{\Phi}_{JM}(x_1, x_2)]_{\alpha\beta} = \langle P; JM | T \bar{\psi}_{\alpha}^A(x_1) \bar{\psi}_{\beta}^B(x_2) | 0 \rangle, \quad (3)$$

а O^A и O^B – матрицы, действующие на спинорные индексы полей частиц А и В соответственно; явный вид этих матриц определяется видом оператора $\hat{O}(A, B)$. Формулы (1) – (3) устанавливают связь между наблюдаемыми системы и амплитудами БС. Для удобства вычислений в формуле (2) можно перейти к матричному умножению [7]. Для этого при помощи неособой матрицы $\gamma_c = \gamma_3 \gamma_1$ введем новые величины ²:

$$\Psi_{JM}(x_1, x_2) = -\Phi_{JM}(x_1, x_2) \gamma_c, \quad \bar{\Psi}_{JM}(x_1, x_2) = -(\bar{\Phi}_{JM}(x_1, x_2) \gamma_c)^T, \quad (4)$$

²матрица γ_c по своим свойствам сходна с матрицей зарядового сопряжения, в частности $\gamma_c \gamma_{\mu}^T = \gamma_{\mu} \gamma_c$.

где знак T обозначает транспонирование. В дальнейшем, если не будет особых оговорок, именно эти функции мы станем именовать амплитудой и сопряженной амплитудой БС соответственно. Нетрудно показать, что в терминах величин (4) соотношение (2) примет вид:

$$O = Tr \{ \bar{\Psi}_{JM} O^A \Psi_{JM} O^B \}, \quad (5)$$

где умножение понимается в обычном смысле умножения матриц. При написании формулы (5) предполагалось, что матрица O^B есть линейная комбинация матриц γ_μ и $\hat{1}$.

Таким образом, для вычисления наблюдаемых в формализме БС наряду с амплитудой Ψ_{JM} необходимо знать и сопряженную амплитуду $\bar{\Psi}_{JM}$. Ниже мы установим точную связь между этими двумя величинами, исходя из анализа общих симметричных свойств амплитуды (1) и векторов состояний под действием оператора обращения времени. Эта связь позволяет при вычислении наблюдаемых величин избежать громоздкой процедуры численного решения отдельного уравнения для сопряженной амплитуды.

Напомним, что оператор обращения времени U_T — это антиунитарный оператор, действие которого на спинорную полевую функцию сводится к следующему [12]:

$$[U_T^{-1} \psi(x_0, \mathbf{x}) U_T]^\dagger = \eta \bar{\psi}(-x_0, \mathbf{x}) R, \quad (6)$$

где $R = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_3$ — матрица обращения времени, а η — Т-четность. Рассмотрим вспомогательную величину

$$[\Omega_{JM}(x_1, x_2)]_{\alpha\beta} = \langle 0_T | T \psi_\alpha^A(x_1) \psi_\beta^B(x_2) U_T | P; JM \rangle, \quad (7)$$

где $|0_T\rangle \equiv U_T |0\rangle$. Пользуясь антиунитарностью оператора U_T и формулой (6), можно показать, что

$$[\Omega_{JM}(x_1^0, \mathbf{x}_1; x_2^0, \mathbf{x}_2)]_{\alpha\beta} = -\eta^A \eta^B [\bar{\Phi}_{JM}(-x_1^0, \mathbf{x}_1; -x_2^0, \mathbf{x}_2)]_{\alpha'\beta'} R_{\alpha'\alpha} R_{\beta'\beta}, \quad (8)$$

где η^A, η^B — четности относительно обращения времени полей ψ^A, ψ^B соответственно. Будем считать состояния $|0\rangle$ и $|P; JM\rangle$ собственными состояниями оператора U_T :

$$U_T |0\rangle = |0\rangle, \quad U_T |P_0, \mathbf{P}; JM\rangle = e^{i\varphi} (-1)^M |P_0, -\mathbf{P}; J-M\rangle. \quad (9)$$

Если выполняются условия (9), то вспомогательная величина (7) с точностью до фазового множителя $e^{i\varphi} (-1)^M$ является амплитудой БС для обращенного во времени состояния, т. е. для состояния с обратным импульсом и изменившей знак проекцией спина. Вводя для амплитуды БС (1) временное обозначение $\Phi_{JM}(x_1, x_2) \equiv \Phi_{JM}^P(x_1, x_2)$ и аналогичное для сопряженной амплитуды (3), полученный результат можно записать в виде

$$[\Omega_{JM}(x_1^0, \mathbf{x}_1; x_2^0, \mathbf{x}_2)]_{\alpha\beta} = e^{i\varphi} (-1)^M [\Phi_{J-M}^{-P}(x_1^0, \mathbf{x}_1; x_2^0, \mathbf{x}_2)]_{\alpha\beta} = -\eta^A \eta^B [\bar{\Phi}_{JM}^P(-x_1^0, \mathbf{x}_1; -x_2^0, \mathbf{x}_2)]_{\alpha'\beta'} R_{\alpha'\alpha} R_{\beta'\beta}, \quad (10)$$

или в матричной форме:

$$\Phi_{J-M}^{-P}(x_1^0, \mathbf{x}_1; x_2^0, \mathbf{x}_2) = e^{i\psi} (-1)^M R^T \bar{\Phi}_{JM}^P(-x_1^0, \mathbf{x}_1; -x_2^0, \mathbf{x}_2) R. \quad (11)$$

Из выражения (11), используя определение (4), легко получить следующее основное соотношение:

$$\bar{\Psi}_{JM}^P(x_1^0, \mathbf{x}_1; x_2^0, \mathbf{x}_2) = e^{i\alpha} (-1)^M R [\Psi_{J-M}^{-P}(-x_1^0, \mathbf{x}_1; -x_2^0, \mathbf{x}_2)]^T R. \quad (12)$$

Воспользовавшись трансляционной инвариантностью теории [13], перейдем к амплитудам, зависящим только от "относительных координат" $x = x_1 - x_2$:

$$\bar{\Psi}_{JM}^P(x^0, \mathbf{x}) = e^{i\alpha} (-1)^M R [\Psi_{J-M}^{-P}(-x^0, \mathbf{x})]^T R. \quad (13)$$

Для фурье-образов амплитуд из (13) имеем:

$$\bar{\Psi}_{JM}^P(p^0, \mathbf{p}) = e^{i\alpha} (-1)^M R [\Psi_{J-M}^{-P}(p^0, -\mathbf{p})]^T R. \quad (14)$$

Формулы (12) – (14) устанавливают точную связь между амплитудой БС и сопряженной амплитудой. В системе покоя, где $\mathbf{P} = 0$, верхний индекс \mathbf{P} будем опускать.

2.2 Спин-угловая структура

В этом разделе мы выведем уравнения, описывающие спин-угловую зависимость амплитуды БС $\Phi_{JM}(x_1, x_2)$, соответствующей состоянию

$|\alpha; JM\rangle$ системы частиц А и В с определенным полным моментом J , его проекцией M и другими квантовыми числами α (это может быть как связанное состояние, так и состояние рассеяния). Исходными являются следующие общие трансформационные свойства взаимодействующих спинорных полей $\psi^i(x)$, $i = A, B$ при преобразованиях системы отсчета [12]:

$$U(\Lambda) \psi^i(x) U(\Lambda)^{-1} = S(\Lambda)^{-1} \psi^i(\Lambda x), \quad (15)$$

$$U(\Lambda) = \exp\left[-\frac{i}{2} \tilde{\Lambda}^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\right], \quad (16)$$

$$S(\Lambda) = \exp\left[-\frac{i}{4} \tilde{\Lambda}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}\right]. \quad (17)$$

Здесь Λ – однородное преобразование Лоренца, $\tilde{\Lambda}^{\mu\nu} = -\tilde{\Lambda}^{\nu\mu}$ – матрица его параметров, $M_{\mu\nu}$ – тензор момента импульса системы квантовых полей, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Рассматривая бесконечно малые преобразования $\tilde{\Lambda}^{\mu\nu}$, из (15) – (17) легко получить следующее коммутационное соотношение:

$$[M_{\mu\nu}, \psi^i(x)] = -m_{\mu\nu} \psi^i(x), \quad (18)$$

$$m_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu}. \quad (19)$$

Очевидно, что величина $m_{\mu\nu}$ является тензором момента импульса для классических решений уравнения Дирака $\psi(x)$ [13]: если $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$, то

$$\psi'(x) = \exp\left[-\frac{i}{2} \tilde{\Lambda}^{\mu\nu} m_{\mu\nu}\right] \psi(x). \quad (20)$$

Далее будут рассматриваться только пространственные вращения системы координат. В этом случае формулы (16) и (20) могут быть записаны в обычном виде:

$$U(\Lambda) = \exp[i\chi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})], \quad \psi'(x) = \exp[i\chi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{j})] \psi(x), \quad (21)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор оси поворота, χ – угол поворота, $\mathbf{J}_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} M_{jk}$ – квантовополевой оператор момента импульса, а $\mathbf{j}_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} m_{jk}$ – оператор момента импульса классического поля:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2} \Sigma + \mathbf{L}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = -i(\mathbf{x} \times \nabla_x). \quad (22)$$

Легко показать, что $\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2} M_{jk} M_{jk}$, и при помощи (18) получим:

$$[\mathbf{J}^2, \psi^i(x)] = -\frac{1}{2} m_{jk}(m_{jk} + 2 M_{jk}) \psi^i(x), \quad (23)$$

$i = A, B$. Состояние $|\alpha; JM\rangle$ удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\mathbf{J}^2 |\alpha; JM\rangle = J(J+1) |\alpha; JM\rangle, \quad \mathbf{J}_3 |\alpha; JM\rangle = M |\alpha; JM\rangle. \quad (24)$$

Таким образом, обращаясь к формуле (1), имеем:

$$J(J+1) \Phi_{JM}(x_1, x_2) = \langle 0 | T \psi^A(x_1) \psi^B(x_2) \mathbf{J}^2 | \alpha; JM \rangle, \quad (25)$$

$$M \Phi_{JM}(x_1, x_2) = \langle 0 | T \psi^A(x_1) \psi^B(x_2) \mathbf{J}_3 | \alpha; JM \rangle. \quad (26)$$

В выражении (25) выполним коммутации оператора \mathbf{J}^2 с операторами ψ^B и ψ^A , используя (23). При этом затрагиваются только пространственные переменные, и Т-упорядочение никак не повлияет на конечный результат (в этом легко убедиться, записав Т-произведение при помощи θ -функций). Аналогичные действия произведем с выражением (26), используя при этом формулу (18). Учитывая, что $\mathbf{J}^2 |0\rangle = 0$, $\mathbf{J}_3 |0\rangle = 0$, получим следующие уравнения для амплитуды (1):

$$(\mathbf{j}^A + \mathbf{j}^B)(\mathbf{j}^A + \mathbf{j}^B) \Phi_{JM}(x_1, x_2) = J(J+1) \Phi_{JM}(x_1, x_2), \quad (27)$$

$$(\mathbf{j}_3^A + \mathbf{j}_3^B) \Phi_{JM}(x_1, x_2) = M \Phi_{JM}(x_1, x_2). \quad (28)$$

Обозначения очевидны: $\mathbf{j}_i^A = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} m_{jk}^A$, $\mathbf{j}_i^B = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} m_{jk}^B$ – операторы, действующие на ψ^A и ψ^B соответственно.

Рассмотрим теперь случай, когда частицы А и В образуют связанное состояние с полным импульсом $\mathbf{P} = 0$. Состояние связанной системы с $\mathbf{P} = 0$ можно рассматривать как состояние, в котором орбитальный момент ее движения как целого $\mathbf{L} = 0$, т. е. \mathbf{J} в данном случае – ее собственный момент (спин). После перехода к относительным координатам $x = x_1 - x_2$ уравнение (28) примет вид:

$$\left\{ \frac{1}{2} \Sigma_3^A + \frac{1}{2} \Sigma_3^B + \mathbf{L}_3 \right\} \Phi_{JM}(x) = M \Phi_{JM}(x). \quad (29)$$

До сих пор мы не выписывали явно спинорных индексов, лишь подразумевая их. Перейдем теперь к матричному виду в соответствии с (4)

и запишем в импульсном пространстве уравнение для $\Psi_{JM}(p)$, прямо вытекающее из (29):

$$\frac{1}{2} [\Sigma_3, \Psi_{JM}(p)] + L_3^p \Psi_{JM}(p) = M \Psi_{JM}(p). \quad (30)$$

Здесь $L^p = -i(\mathbf{p} \times \nabla_p)$, а $[\Sigma_3, \Psi_{JM}] \equiv \Sigma_3 \Psi_{JM} - \Psi_{JM} \Sigma_3$.

Выше рассматривалась система спиновых частиц А и В, но в точности такие же рассуждения можно провести в случае, когда частицы А и В скалярные. Амплитуда БС для этого случая такова:

$$\varphi_{JM}(x_1, x_2) = \langle 0 | T \varphi^A(x_1) \varphi^B(x_2) | \alpha; JM \rangle, \quad (31)$$

и для нее легко получить аналоги формул (27) – (28):

$$(L^A + L^B) (\mathbf{L}^A + \mathbf{L}^B) \varphi_{JM}(x_1, x_2) = J(J+1) \varphi_{JM}(x_1, x_2), \quad (32)$$

$$(L_3^A + L_3^B) \varphi_{JM}(x_1, x_2) = M \varphi_{JM}(x_1, x_2), \quad (33)$$

где $L_i^A = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} k_{jk}^A$, $L_i^B = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} k_{jk}^B$ – операторы, действующие на φ^A и φ^B соответственно. Ниже мы будем рассматривать случай, когда частицы А и В образуют связанное состояние с полным импульсом $\mathbf{P} = 0$ и полным собственным моментом J : $|\alpha; JM\rangle \equiv |P_0, \mathbf{P} = 0; JM\rangle$. Так же, как при получении уравнения (29), перейдем к относительным координатам $x = x_1 - x_2$. Из (32) – (33) получим:

$$L^2 \varphi_{JM}(x) = J(J+1) \varphi_{JM}(x), \quad L_3 \varphi_{JM}(x) = M \varphi_{JM}(x). \quad (34)$$

Здесь дифференциальный оператор $L = -i(\mathbf{x} \times \nabla_x)$. Из двух последних формул следует, что угловая зависимость амплитуды $\varphi_{JM}(x)$ описывается обычными сферическими гармониками $Y_{JM}(\Omega_x)$:

$$\varphi_{JM}(x) = \varphi_J(x_0, |\mathbf{x}|) Y_{JM}(\Omega_x). \quad (35)$$

В импульсном представлении парциальное разложение амплитуды φ_{JM} будем записывать следующим образом:

$$\varphi_{JM}(p) = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \varphi_J(p_0, |\mathbf{p}|) Y_{JM}(\Omega_p). \quad (36)$$

3 Метод исчерпывания

В этом разделе будет сформулирован метод исследования энергетического спектра скаляр-скалярного уравнения БС в лестничном приближении. Для строгого обоснования метода нам понадобится переписать это уравнение в виде эквивалентного симметричного уравнения Фредгольма. Напомним, что симметричным интегральным уравнением Фредгольма второго рода называют любое уравнение вида

$$\varphi(p) = \lambda \int dp' K(p, p') \varphi(p'), \quad (37)$$

если его ядро $K(p, p') = K^*(p', p)$ квадратично интегрируемо [14]:

$$\int dp \int dp' |K(p, p')|^2 < \infty. \quad (38)$$

Известно, что уравнения этого вида обладают следующими свойствами:

1. Существует спектр действительных собственных значений (СЗ) λ_i и соответствующих им собственных функций (СФ) $\varphi_i(p)$ уравнения (37), причем спектр λ_i является дискретным и представляет собой неубывающую по модулю и, вообще говоря, бесконечную последовательность: $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots \leq |\lambda_{n-1}| \leq |\lambda_n| \leq \dots$, точка сгущения которой может быть только бесконечно удаленной. Собственные значения могут быть вырожденными, но кратность вырождения – конечная.

2. Последовательность функций $\varphi_i(p)$ может быть сделана ортонормированной, т. е.

$$\int dp \varphi_i^*(p) \varphi_j(p) = \delta_{ij}. \quad (39)$$

3. Симметричное ядро $K(p, p')$ может быть представлено в виде би-линейного ряда Гильберта – Шмидта:

$$K(p, p') = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(p) \varphi_i^*(p'). \quad (40)$$

Перечисленные выше свойства играют ключевую роль при исследовании уравнения БС.

3.1 Скалярное взаимодействие

В случае системы из двух скалярных частиц А и В уравнение БС для вершинной функции связанного состояния со спином J имеет следующий общий вид:

$$\gamma_{JM}(p) = \lambda \int d^4 p' K(p, p'; P) \gamma_{JM}(p'), \quad (41)$$

где $\lambda = g^2$, g – константа связи, $P = (P_0, \mathbf{P})$ – полный 4-импульс системы, а явный вид ядра $K(p, p'; P)$ определяется конкретным выбором эффективного лагранжиана взаимодействия (скалярное, псевдоскалярное, ...). Если частицы А и В взаимодействуют путем обмена скалярным мезоном с массой μ , ядро $K(p, p'; P)$ в лестничном приближении таково [13]:

$$K(p, p'; P) = \frac{i}{(2\pi)^4} D(p'_0, \mathbf{p}') \frac{1}{(p - p')^2 - \mu^2 + i\epsilon}, \quad (42)$$

$$D(p_0, \mathbf{p}) = S^{(A)}\left(\frac{P}{2} + p\right) S^{(B)}\left(\frac{P}{2} - p\right), \quad (43)$$

где $S^{(k)}$, $k = A, B$ – пропагаторы свободных скалярных частиц А и В,

$$S^{(k)}(p) = \frac{1}{p^2 - m_k^2 + i\epsilon}. \quad (44)$$

Видно, что ядро (42) несимметрично: $K(p, p'; P) \neq K^*(p', p; P)$.

Нашей конечной целью является получение энергетического спектра уравнения (41), т.е. нахождение совокупности значений энергии связанного состояния P_0^J и соответствующих им амплитуд $\gamma_{JM}^n(p)$ при заданной константе связи g ³. Очевидно, что уравнение (41) нелинейно относительно энергии связанного состояния P_0 , тогда как параметр $\lambda = g^2$ входит в него линейно. Поэтому при заданном полном импульсе системы P мы можем рассматривать (41) как уравнение на

³Введенные здесь обозначения отражают, в частности, то обстоятельство, что энергия связанного состояния зависит, вообще говоря, от J и не зависит от проекции M . Этот факт представляется очевидным; его формальное обоснование будет приведено ниже. Также легко понять, что при фиксированном J индекс n нумерует радиальные возбуждения; поэтому его можно назвать главным квантовым числом.

собственные значения $\lambda_{iJ} = g_{iJ}^2$ и соответствующие им собственные функции $\gamma_{JM}^i(p)$, в полной аналогии с задачей о спектре уравнения Фредгольма (37). Совокупность всех значений $\lambda_{iJ} \equiv \lambda_{iJ}(P^2 = M_B^2)$ (далее по тексту – $\lambda_{iJ}(M_B)$) при фиксированной массе связанного состояния M_B мы будем называть спектром уравнения (41) по константе связи. Оказывается, что между энергетическим спектром и спектром по константе связи можно установить определённое соответствие, и при этом физическая задача вычисления энергетического спектра при заданном g сводится к вычислению спектра $\lambda_{iJ}(M_B)$ при всех допустимых M_B , $0 \leq M_B \leq (m_A + m_B)$. Забегая вперед, отметим, что общее представление о характере этого соответствия можно составить, обратившись к рис. 1, на котором приведены полученные зависимости $g_{iJ}(M_B)$ при некоторых частных значениях i и J . Более подробно этот вопрос будет обсуждаться в пункте 3.2, а в этом разделе мы рассмотрим спектр $\lambda_{iJ}(M_B)$.

Будем считать связанное состояние А+В покоящимся, т.е. $P = (M_B, \mathbf{0})$; кроме того, положим $m_A = m_B = m$ и произведём в уравнении (41) поворот Вика [15]: $p_0 \rightarrow ip_0$, $p'_0 \rightarrow ip'_0$; при этом получим:

$$\gamma_{JM}^i(p) = \lambda_{iJ} \int d^4 p' K_E(p, p'; M_B) \gamma_{JM}^i(p'). \quad (45)$$

$$K_E(p, p'; M_B) = \frac{1}{(2\pi)^4} D_E(p'_0, \mathbf{p}') \frac{1}{(p - p')_E^2 + \mu^2}, \quad (46)$$

где $p_E^2 \equiv p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$. В данном случае

$$D_E^{-1}(p_0, \mathbf{p}) = \left(\omega^2(\mathbf{p}) + p_0^2 - \frac{1}{4} M_B^2 \right)^2 + p_0^2 M_B^2, \quad (47)$$

$\omega^2(\mathbf{p}) = m^2 + |\mathbf{p}|^2$. Преобразуем уравнение (45) ещё раз: введём новую функцию $\tilde{\gamma}$,

$$\tilde{\gamma}_{JM}^i(p) = D_E^{\frac{1}{2}}(p_0, \mathbf{p}) \gamma_{JM}^i(p). \quad (48)$$

Из уравнения (45) следует уравнение для функции (48):

$$\tilde{\gamma}_{JM}^i(p) = \lambda_{iJ} \int d^4 p' \tilde{K}_E(p, p'; M_B) \tilde{\gamma}_{JM}^i(p'), \quad (49)$$

$$\tilde{K}_E(p, p'; M_B) = \frac{1}{(2\pi)^4} D_E^{\frac{1}{2}}(p_0, \mathbf{p}) \frac{1}{(p - p')_E^2 + \mu^2} D_E^{\frac{1}{2}}(p'_0, \mathbf{p}'). \quad (50)$$

Легко установить, что

$$\widetilde{K}_E(p, p'; M_B) = \widetilde{K}_E(p', p; M_B), \quad \int d^4 p \int d^4 p' \widetilde{K}_E^2(p, p'; M_B) < \infty, \quad (51)$$

т.е. уравнение (49) является однородным интегральным уравнением Фредгольма с симметричным действительным ядром [14]. Чтобы пояснить вытекающие отсюда следствия, прибегнем к парциальному разложению этого уравнения. Парциальное разложение ядра (50) следует из формулы [7]:

$$\frac{1}{(p - p')_E^2 + \mu^2} = \frac{2\pi}{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{p}'|} \sum_{J, M} Y_{JM}^*(\Omega'_p) Y_{JM}(\Omega_p) Q_J(y_\mu), \quad (52)$$

где $Q_J(y_\mu)$ есть присоединённые функции Лежандра второго рода и

$$y_\mu = \frac{|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p}'|^2 + \mu^2 + (p_0 - p'_0)^2}{2|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{p}'|}. \quad (53)$$

Парциальное разложение функции (48) будем записывать по-прежнему (см. формулу (36)):

$$\tilde{\gamma}_{JM}^i(p) = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \tilde{\gamma}_J^i(p_0, |\mathbf{p}|) Y_{JM}(\Omega_p). \quad (54)$$

Для краткости введем обозначения для пары аргументов $p_0, |\mathbf{p}|$, которыми будем постоянно пользоваться в дальнейшем: $\tilde{p} = (p_0, |\mathbf{p}|)$, $d\tilde{p} = dp_0 d|\mathbf{p}|$. Тогда уравнение для парциальных вершинных функций из (49), (52) и (54) примет вид

$$\tilde{\gamma}_J^i(\tilde{p}) = \lambda_{iJ} \int d\tilde{p}' \widetilde{K}_E^J(\tilde{p}; \tilde{p}'; M_B) \tilde{\gamma}_J^i(\tilde{p}'), \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_E^J(\tilde{p}; \tilde{p}'; M_B) &\equiv \frac{D_E^{\frac{1}{2}}(\tilde{p})}{D_E^{\frac{1}{2}}(\tilde{p}')} K_E^J(\tilde{p}; \tilde{p}'; M_B) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} D_E^{\frac{1}{2}}(\tilde{p}) Q_J(y_\mu) D_E^{\frac{1}{2}}(\tilde{p}'). \end{aligned} \quad (56)$$

Соотношение (55) также является интегральным уравнением Фредгольма с симметричным действительным ядром. Следовательно:

1. Спектр уравнения (55) является дискретным и вещественным, СЗ λ_{iJ} образуют неубывающую последовательность: $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq$

$\dots \leq |\lambda_{n-1}| \leq |\lambda_n| \leq \dots$. Полный спектр уравнения (49) представляет собой совокупность спектров уравнения (55) при всех значениях J . Ясно, что этот спектр является одновременно и спектром по константе связи уравнения (45), а следовательно, и уравнения (41). По физическому смыслу все λ_{iJ} должны быть действительными числами больше нуля. Кроме того, из (55) явным образом следует, что λ_{iJ} не зависит от проекции момента M (отсюда вытекает независимость от M уровней спектра связанных состояний, см. рис. 1).

2. Последовательность СФ $\tilde{\gamma}_{JM}^i(p)$ может быть сделана ортонормированной. Каждое значение λ_{iJ} вырождено: ему соответствует не меньше, чем $2J + 1$ линейно независимых функций, отвечающих различным значениям проекции M спина J . Далее мы будем предполагать, что никакого другого вырождения нет, т.е. для всех i и J кратность вырождения λ_{iJ} составляет ровно $2J + 1$. При имеющейся нумерации собственных чисел это предположение формулируется следующим образом:

$$\lambda_{1J} < \lambda_{2J} < \lambda_{3J} < \dots < \lambda_{n-1,J} < \lambda_{n,J} < \dots \quad (57)$$

Ортогональность амплитуд $\tilde{\gamma}_{JM}^i(p)$, соответствующих одному и тому же i , но разным J и M , очевидна (формула (54)). Общее же соотношение ортогональности таково:

$$\int d^4 p \tilde{\gamma}_{JM}^{i*}(p) \tilde{\gamma}_{J'M'}^i(p) = \delta_{ij} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}. \quad (58)$$

3. Симметричное ядро $\widetilde{K}_E(p, p'; M_B)$ может быть представлено в виде билинейного ряда Гильберта – Шмидта:

$$\widetilde{K}_E(p, p'; M_B) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{J, M} \frac{1}{\lambda_{iJ}} \tilde{\gamma}_{JM}^i(p) \tilde{\gamma}_{JM}^{i*}(p'). \quad (59)$$

Переходя в выражениях (58) и (59) к прежним обозначениям в соответствии с формулами (48), (50) и учитывая, что амплитуда БС $\varphi_{JM}(p)$ после поворота Вика есть

$$\varphi_{JM}(p) = [S^{(1)}(\frac{P}{2} + p) \gamma_{JM}(p) S^{(2)}(\frac{P}{2} - p)]_E = D_E(p_0, \mathbf{p}) \gamma_{JM}(p), \quad (60)$$

получим

$$\int d^4 p \tilde{\gamma}_{JM}^{i*}(p) \tilde{\gamma}_{J'M'}^j(p) = \int d^4 p \gamma_{JM}^{i*}(p) D_E(\vec{p}) \gamma_{J'M'}^j(p) = \int d^4 p \varphi_{JM}^{i*}(p) \gamma_{J'M'}^j(p) = \delta_{ij} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}, \quad (61)$$

$$K_E(p, p'; M_B) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{JM} \frac{1}{\lambda_{iJ}} \gamma_{JM}^i(p) D_E(\vec{p}') \gamma_{JM}^{i*}(p') = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{JM} \frac{1}{\lambda_{iJ}} \gamma_{JM}^i(p) \varphi_{JM}^{i*}(p'). \quad (62)$$

Итак, основываясь на формуле (61), можно утверждать, что амплитуды БС $\varphi_{JM}^i(p)$ и вершинные функции БС $\gamma_{J'M'}^j(p)$ образуют биортогональный базис (в смысле спектра по константе связи) и ядро $K_E(p, p'; M_B)$ уравнения БС может быть представлено в виде билинейного ряда (62) по элементам этого базиса. Понятие биортогонального базиса будет весьма существенно при рассмотрении спектра спинор-спинорного уравнения БС.

Легко показать, что в пространстве Минковского формулам (62) и (61) соответствуют следующие соотношения:

$$K(p, p'; M_B) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{JM} \frac{1}{i\lambda_{nJ}} (-1)^M \gamma_{JM}^n(p) \varphi_{J-M}^n(p'), \quad (63)$$

$$(-1)^{M'} \int d^4 p \varphi_{J-M}^j(p) \gamma_{J'M'}^i(p) = i\delta_{ij} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}. \quad (64)$$

Приведём теперь формулы, которые потребуются непосредственно для изложения численного метода. После частичного разложения уравнения (45) с использованием формул (36) и (52) получим

$$\gamma_J^i(\vec{p}) = \lambda_{iJ} \int d\vec{p}' K_E^J(\vec{p}; \vec{p}'; M_B) \gamma_{J'}^i(\vec{p}'), \quad (65)$$

$$K_E^J(\vec{p}; \vec{p}'; M_B) = \frac{1}{(2\pi)^3} D_E(\vec{p}') Q_J(y_\mu). \quad (66)$$

Парциальное разложение вершины БС $\gamma_{JM}^i(p)$ будем записывать в виде, аналогичном (36):

$$\gamma_{JM}^i(p) = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \gamma_J^i(\vec{p}) Y_{JM}(\Omega_p). \quad (67)$$

Между парциальными амплитудой и вершинной функцией существует следующая связь, вытекающая из (67), (36), и (60):

$$\gamma_J^i(\vec{p}) = D_E^{-1}(\vec{p}) \varphi_J^i(\vec{p}). \quad (68)$$

Из соотношения ортогональности (61) получим следствие для парциальных функций:

$$\int d\vec{p} \gamma_J^i(\vec{p}) \varphi_J^j(\vec{p}) = \delta_{ij}. \quad (69)$$

Нам понадобится также билинейное разложение ядра (66). В соответствии с формулой (62),

$$K_E^J(\vec{p}; \vec{p}'; M_B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{iJ}} \gamma_J^i(\vec{p}) \varphi_J^i(\vec{p}'). \quad (70)$$

Теперь, основываясь на полученных результатах, сформулируем численный метод нахождения спектра по константе связи уравнения (45). Как уже отмечалось, для нахождения всего спектра уравнения (45) необходимо вычислить спектры уравнения (65) (или эквивалентного ему уравнения (55), которое имеет тот же спектр по константе связи) при всех значениях J . Численный метод, который мы здесь изложим, предназначен именно для уравнения (65); основой его является разложение (70). Отметим, забегая вперед, что очень существенным для этого метода является предположение (57), которое подтверждается численным анализом уравнения (65).

Итак, зафиксируем значения J и M_B и рассмотрим задачу численного определения наименьшего СЗ λ_{iJ} уравнения (65). В краткой форме это уравнение имеет вид

$$\alpha_{iJ} \gamma_J^i = K_E^J \gamma_J^i, \quad (71)$$

где $\alpha_{iJ} = 1/\lambda_{iJ}$. Первоначально не известны ни λ_{iJ} , ни γ_J^i . Чтобы вычислить и то, и другое, выберем некоторое нулевое приближение — функцию $\chi(\vec{p})$ и построим последовательность функций $K_E^J \chi$, $(K_E^J)^2 \chi$, ..., $(K_E^J)^n \chi$, ... Функцию χ можно разложить по полному набору функций γ_J^i :

$$\chi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \gamma_J^i, \quad (72)$$

где, в соответствии с (69), $c_i = \int d\vec{p} \varphi_J^i(\vec{p}) \chi(\vec{p})$. Из формул (72) и (71) следует:

$$K_E^J \chi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_{iJ} \gamma_J^i, \quad (K_E^J)^2 \chi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_{iJ}^2 \gamma_J^i, \dots$$

$$(K_E^J)^n \chi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_{iJ}^n \gamma_j^i, \dots \quad (73)$$

На каждом шаге n составляем отношение $(K_E^J)^n \chi / (K_E^J)^{n-1} \chi$:

$$\frac{(K_E^J)^n \chi}{(K_E^J)^{n-1} \chi} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_{iJ}^n \gamma_j^i}{\sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_{iJ}^{n-1} \gamma_j^i} = \alpha_{1J} \frac{c_1 \gamma_j^1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i \left(\frac{\alpha_{iJ}}{\alpha_{1J}}\right)^n \gamma_j^i}{c_1 \gamma_j^1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i \left(\frac{\alpha_{iJ}}{\alpha_{1J}}\right)^{n-1} \gamma_j^i} \quad (74)$$

Среди всех λ_{iJ} собственное значение λ_{1J} является наименьшим, следовательно, α_{1J} – наибольшее среди всех α_{iJ} , и тогда для всех $i > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_{iJ}}{\alpha_{1J}}\right)^n = 0, \quad (75)$$

то есть, если $c_1 \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(K_E^J)^n \chi}{(K_E^J)^{n-1} \chi} = \alpha_{1J}. \quad (76)$$

Итак, для того чтобы вычислить значение α_{1J} , нужно найти отношение (74) при достаточно большом n . Функция γ_j^1 может быть найдена при помощи того же процесса (73). Легко заметить, что при больших n главный вклад в разложение $(K_E^J)^n \chi$ будет давать слагаемое с γ_j^1 . Если в последовательности (73) на каждом шаге сохранять неизменной норму выражения $(K_E^J)^n \chi$, то эта последовательность сойдется к функции $C \cdot \gamma_j^1$, где C – некоторый постоянный множитель. Детали конкретных вычислений будут обсуждаться ниже. Отметим только, что, как показывает опыт, описанный метод вычисления наименьшего СЗ $\lambda_{1J} = 1/\alpha_{1J}$ и соответствующей ему СФ γ_j^1 является, несмотря на свою простоту, весьма эффективным и устойчивым по отношению к функции нулевого приближения χ и позволяет получить искомые величины с любой желаемой степенью точности.

Покажем теперь, как, умея вычислять для заданного ядра уравнения только его наименьшее СЗ и соответствующую ему СФ, найти первые N собственных значений $\lambda_{1J}, \lambda_{2J}, \dots, \lambda_{NJ}$ и соответствующих им СФ уравнения (65). Предположим, что для заданного ядра K_E^J найдено λ_{1J} и γ_j^1 . Следовательно, по формуле (68) можно найти и функцию φ_j^1 .

Построим теперь новое ядро $K_E^{J,1}$:

$$\begin{aligned} K_E^{J,1}(\tilde{p}, \tilde{p}'; M_B) &= K_E^J(\tilde{p}, \tilde{p}'; M_B) - \frac{1}{\lambda_{1J}} \gamma_j^1(\tilde{p}) \varphi_j^1(\tilde{p}') = \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{iJ}} \gamma_j^i(\tilde{p}) \varphi_j^i(\tilde{p}'). \end{aligned} \quad (77)$$

Из последнего соотношения следует, что все СФ γ_j^i ядра K_E^J , кроме γ_j^1 , являются собственными функциями ядра $K_E^{J,1}$ с теми же собственными значениями λ_{iJ} . При этом наименьшим СЗ ядра $K_E^{J,1}$ является уже λ_{2J} ; функцию γ_j^1 можно формально рассматривать как СФ для $K_E^{J,1}$ с "бесконечно большим СЗ" $\lambda = \infty$, и тем самым она исключается из рассмотрения. Теперь можно применить к ядру $K_E^{J,1}$ описанный выше способ нахождения наименьшего СЗ (в данном случае это λ_{2J}) и соответствующей ему СФ (γ_j^2). Вычислив эти величины, построим следующее ядро $K_E^{J,2}$:

$$\begin{aligned} K_E^{J,2}(\tilde{p}, \tilde{p}'; M_B) &= K_E^{J,1}(\tilde{p}, \tilde{p}'; M_B) - \frac{1}{\lambda_{2J}} \gamma_j^2(\tilde{p}) \varphi_j^2(\tilde{p}') = \\ &= \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{iJ}} \gamma_j^i(\tilde{p}) \varphi_j^i(\tilde{p}'), \end{aligned} \quad (78)$$

у которого, очевидно, наименьшим СЗ является уже λ_{3J} и т. д. Этот численный метод мы будем, следуя [17], именовать методом исчерпывания. Таким образом, метод исчерпывания состоит в нахождении наименьших СЗ и соответствующих им СФ у последовательности ядер, которые рекуррентно выражаются друг через друга следующим образом:

$$\begin{aligned} K_E^{J,n}(\tilde{p}, \tilde{p}'; M_B) &= K_E^{J,n-1}(\tilde{p}, \tilde{p}'; M_B) - \frac{1}{\lambda_{nJ}} \gamma_j^n(\tilde{p}) \varphi_j^n(\tilde{p}') = \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{iJ}} \gamma_j^i(\tilde{p}) \varphi_j^i(\tilde{p}'). \end{aligned} \quad (79)$$

3.2 Вычисления и результаты

В этом разделе кратко обсуждаются результаты численного решения уравнения (45) методом исчерпывания и объясняется связь между спектром по константе связи этого уравнения и его энергетическим спектром. Как уже было отмечено, для определения энергетического спек-

тра уравнения (45) при заданной константе связи g необходимо вычислить спектр по константе связи $\lambda_{iJ}(M_B)$ этого уравнения при всех значениях M_B : $0 \leq M_B \leq 2m$ и для всех значений J . Фактически это означает, что необходимо найти спектр по константе связи уравнения (65) для всех J . Поясним сначала некоторые детали вычислений. Областью определения функций $\gamma_J^i(p_0, |\mathbf{p}|)$ является полуплоскость ($p_0 = -\infty, \infty$; $|\mathbf{p}| = 0, \infty$), и для метода исчерпывания необходимо иметь подходящую сетку точек $(p_0, |\mathbf{p}|)$ на этой полуплоскости, в которых будут вычисляться значения функций; эта сетка, в частности, должна обеспечивать эффективное вычисление двукратного интеграла в уравнении (65). В случае конечных пределов интегрирования весьма удобной является сетка Гаусса, обеспечивающая наивысшую алгебраическую точность [17]. Для того чтобы перейти к конечным пределам и применить в уравнении (65) сетку Гаусса по каждой переменной, мы использовали замену переменных $p_0 = p_0(x, y)$, $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}|(x)$ ($x, y = -1, \dots, 1$), которая вычисляется из уравнений

$$\frac{d|\mathbf{p}|}{dx} \cdot F(|\mathbf{p}|(x)) = \frac{I}{2}, \quad \frac{dp_0}{dy}(x, y) \cdot D_E(p_0(x, y), |\mathbf{p}|(x)) = \frac{1}{2} F(|\mathbf{p}|(x)), \quad (80)$$

$$F(|\mathbf{p}|) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 D_E(p_0, |\mathbf{p}|), \quad I = \int_0^{\infty} d|\mathbf{p}| \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 D_E(p_0, |\mathbf{p}|). \quad (81)$$

В новых переменных уравнение (65) имеет вид

$$\gamma_J^i(x, y) = \lambda_{iJ} I \int_{-1}^1 \frac{dx'}{4(2\pi)^3} \int_{-1}^1 dy' Q_J(y_\mu(x', y')) \gamma_J^i(x', y'). \quad (82)$$

Отметим, что ядро уравнения (82) по-прежнему сохраняет зависимость от M_B , т. к. от M_B зависит замена переменных. Конкретная реализация численного метода, в общих чертах описанного в пункте 3.1, может быть, например, следующей:

1. Задается начальное значение вершинной функции во всех точках сетки (нулевая итерация $\chi^{(0)}$) и начальное значение величины $\lambda^{(0)} = g^{(0)2}$;
2. Функция нулевой итерации $\chi^{(0)}$ подставляется в правую часть уравнения (82), и с заданным начальным значением $\lambda^{(0)}$ по ней вычисляется функция первой итерации $\chi^{(1)}$, по которой, в свою очередь (при

той же $\lambda^{(0)}$), вычисляется вторая итерация $\chi^{(2)}$ и т. д. Этот процесс повторяется до тех пор, пока отношение $\chi^{(n+1)}/\chi^{(n)}$ не примет некоторого значения C , с определенной относительной точностью R постоянного для всех точек сетки (здесь n – номер итерации). Когда это произойдет, выполняется следующий шаг:

3. Величина $g^{(0)2}$ делится на константу C :

$$g^{(1)2} = \frac{g^{(0)2}}{C},$$

и далее итерации опять возобновляются, но уже с новой константой связи $g^{(1)}$. Пункты 2 и 3 повторяются до тех пор, пока отношение $\chi^{(n+1)}/\chi^{(n)}$ для всех значений аргументов не станет равным 1, и относительная точность определения g не сравняется с R – относительной точностью всех вычислений в алгоритме.

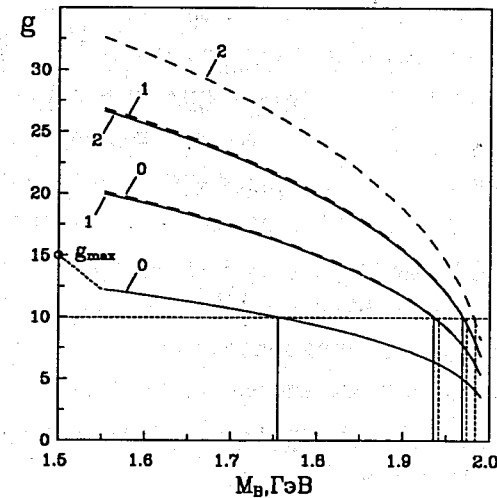


Рис. 1

Перейдем теперь к анализу связи энергетического спектра и спектра по константе взаимодействия на примере результатов численного решения уравнения (82) методом исчерпывания для модельной системы $A + B$ со следующими параметрами: $m_A = m_B = 1$ ГэВ, $\mu = 1$ кэВ.

Это уравнение рассматривалось на гауссовской сетке 32×32 по переменным x и y для $J = 0, 1, 2$. При этом были вычислены только первые два уровня по константе связи, т. е. $i = 1, 2$ ("основное" и "первое возбужденное" состояния). На рис. 1 представлены полученные зависимости спектральных значений $g_{iJ}(M_B)$. Кривые, обозначенные цифрами "0", "1" и "2", являются решениями уравнения Бете - Солпитера для значений углового момента системы $J = 0, 1$ и 2 соответственно; сплошным кривым соответствует $i = 1$, пунктирным - $i = 2$. Может показаться, что в пределах ошибки вычислений кривые $g_{1J}(M_B)$ и $g_{2,J-1}(M_B)$, $J = 1, 2$ совпадают, т. е. имеется вырождение уровней по константе связи. Этот вопрос был детально исследован (путем вычислений на "более густых" сетках Гаусса 48×48 , 64×64). Было установлено, что эти кривые не совпадают и не пересекаются, а сохраняют свое поведение во всем исследованном интервале M_B . Отметим, что кривые $g(M_B)$ с аналогичным поведением были получены в работе [16] для спинор-спинорного уравнения БС. Имея теперь зависимость $g(M_B)$, легко установить энергетический спектр связанных состояний системы $A + B$: для этого необходимо зафиксировать некоторое постоянное значение $g = g_0$ и определить, каким массам системы оно соответствует. На рис. 1 это продемонстрировано на примере $g_0 = 10$: точки пересечения горизонтальной пунктирной линии с кривыми $g_{iJ}(M_B)$ определяют значения M_B^{nJ} основного и возбужденных состояний (сплошные и пунктирные вертикальные линии). Отметим, что в соответствии с полученными численными результатами для функций $\gamma_J^i(p_0, |\mathbf{p}|)$ кривую $g_{10}(M_B)$ можно назвать кривой основного радиального состояния системы при $J = 0$, кривую $g_{20}(M_B)$ - кривой первого радиального возбуждения при $J = 0$ и т. д., так как при каждом значении M_B при любом p_0 и $|\mathbf{p}| > 0$ соответствующая функция $\gamma_0^1(p_0, |\mathbf{p}|)$ не имеет нулей (узлов) по $|\mathbf{p}|$, функция $\gamma_0^2(p_0, |\mathbf{p}|)$ имеет один узел, функция $\gamma_0^3(p_0, |\mathbf{p}|)$ - два узла ... Таким образом, здесь прослеживается точная аналогия с поведением решений радиального уравнения Шредингера, например, с кулоновским потенциалом. Эта аналогия позволяет сделать вывод, что физическое значение константы взаимодействия g_0 не

должно превышать $g_{max} = g_{10}(0)$ (см. рис. 1), т. к. в противном случае получающийся спектр состояний не будет содержать по крайней мере основного радиального состояния при $J = 0$, что выглядит физически бессмысленным.

В завершение этого раздела отметим, что состояния с более высокими, чем рассмотренные, значениями J и i ($J > 2$, $i > 2$) могут быть рассчитаны методом исчерпывания без затруднений и с той же степенью точности. Таким образом, предложенный метод позволяет найти в ковариантном подходе весь энергетический спектр связанного состояния.

4 Спинор-спинорное уравнение

До сих пор мы рассматривали уравнение БС для системы скалярных частиц со скалярным взаимодействием. При исследовании реальных физических связанных состояний, например дейтрона, необходимо использовать спинор-спинорное уравнение с достаточно сложным ядром взаимодействия. В этом случае вместо одного уравнения на парциальную амплитуду получается система двумерных интегральных уравнений (в случае дейтрона необходимо решать систему из восьми интегральных уравнений на парциальные амплитуды [7]). В данном разделе мы покажем, как обобщить метод исчерпывания в соответствии с этой задачей. Рассмотрим спинор-спинорное уравнение БС для частиц A и B , $m_A = m_B = m$, взаимодействующих путём обмена скалярным мезоном с массой μ , в системе покоя, т.е. полный 4-импульс связанного состояния $A + B$ есть $P = (M_B, \mathbf{0})$, где M_B - масса связанного состояния:

$$\Psi_{JM}^k(p) = i\lambda_{kJ} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{D(p_0, \mathbf{p})}{(p - p')^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \Lambda(p_1) \Psi_{JM}^k(p') \Lambda(p_2), \quad (83)$$

$\Lambda(p) = \hat{p} + m$, $p_{1,2} = P/2 \pm p$. Здесь

$$D^{-1}(p_0, \mathbf{p}) = \left(\omega^2(\mathbf{p}) - p_0^2 - \frac{1}{4}M_B^2 \right)^2 - p_0^2 M_B^2, \quad (84)$$

что в точности соответствует формуле (47) до поворота Вика. Ниже понадобится также и покомпонентная запись уравнения (83) в следующей

форме:

$$[\Psi_{JM}^k(p)]_{\alpha\beta} = \lambda_{kJ} \int d^4 p' [N(p, p')]_{\alpha\alpha', \beta'\beta} [\Psi_{JM}^k(p')]_{\alpha'\beta'}, \quad (85)$$

где

$$[N(p, p')]_{\alpha\alpha', \beta'\beta} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{iD(p_0, \mathbf{p})}{(p-p')^2 - \mu^2 + i\epsilon} [\Lambda(p_1)]_{\alpha\alpha'} [\Lambda(p_2)]_{\beta'\beta}. \quad (86)$$

Известно, что уравнение (83) не относится к уравнениям Фредгольма (см. [10]), поэтому пока нельзя сделать точных заключений о его спектре по константе связи. Выше уже отмечалось, что целью этой работы является нахождение приемлемого метода расчёта дискретного энергетического спектра уравнения (83), если он существует. По физическому смыслу такой спектр должен быть; обращаясь к аналогии со скаляр-скалярным уравнением БС, заключаем, что тогда должен существовать и спектр по константе связи уравнения (83). Если это условие выполняется, то для обобщения метода исчерпывания необходимо только установить аналог условия ортогональности СФ и аналог разложения ядра взаимодействия по биортогональному базису.

Центральным звеном этих рассуждений будет, конечно, получение билинейного разложения ядра (86), подобного ряду (63). С этой целью введём в рассмотрение новую величину – сопряжённую вершинную функцию БС $\bar{\Gamma}_{JM}^k(p)$, которая по определению связана с сопряжённой амплитудой БС (14) следующим образом:

$$\bar{\Psi}_{JM}^k(p) = S(p_2) \bar{\Gamma}_{JM}^k(p) S(p_1), \quad (87)$$

где $S(p)$ – пропагатор свободной спинорной частицы,

$$S(p) = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Производя тождественные преобразования над уравнением (83) в соответствии с формулой (14), получим уравнение для сопряжённой амплитуды $\bar{\Psi}_{JM}^k$,

$$\bar{\Psi}_{JM}^k(p) = i\lambda_{kJ} \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{D(p_0, \mathbf{p})}{(p-p')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \Lambda(p_2) \bar{\Psi}_{JM}^k(p') \Lambda(p_1). \quad (88)$$

Подставляя в (88) определение (87), получим уравнение для сопряжённой вершинной функции:

$$\bar{\Gamma}_{JM}^k(p) = i \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{\lambda_{kJ}}{(p-p')^2 - \mu^2 + i\epsilon} D(p') \Lambda(p_2) \bar{\Gamma}_{JM}^k(p') \Lambda(p_1). \quad (89)$$

Отметим ещё раз, что уравнение (89) получено из (83) тождественными преобразованиями, следовательно, спектры этих уравнений совпадают. Нетрудно убедиться в том, что покомпонентная запись уравнения (89) такова:

$$[\bar{\Gamma}_{JM}^k(p)]_{\alpha\beta} = \lambda_{kJ} \int d^4 p' [N(p', p)]_{\beta'\beta, \alpha\alpha'} [\bar{\Gamma}_{JM}^k(p')]_{\alpha'\beta'}, \quad (90)$$

где ядро $N(p, p')$ задано формулой (86).

Покажем теперь, что функции $\bar{\Gamma}_{JM}^i(p)$ и $\Psi_{JM'}^j(p)$ образуют биортогональный базис в следующем смысле:

$$\int d^4 p \text{Tr} \{ \bar{\Gamma}_{JM}^i(p) \Psi_{JM'}^j(p) \} = N \delta_{ij} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}, \quad (91)$$

N – нормировочный множитель. Покажем сначала, что если $i = j$, $J = J'$ и $M \neq M'$, то

$$\int d^4 p \text{Tr} \{ \bar{\Gamma}_{JM}^i(p) \Psi_{JM'}^i(p) \} = 0. \quad (92)$$

Прежде всего, из уравнения (30) следует аналогичное для $\bar{\Gamma}_{JM}^i(p)$:

$$\frac{1}{2} [\Sigma_3, \bar{\Gamma}_{JM}^i(p)] + L_3^p \bar{\Gamma}_{JM}^i(p) = -M \bar{\Gamma}_{JM}^i(p). \quad (93)$$

Имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} & M \int d^4 p \text{Tr} \{ \Psi_{JM}^i(p) \bar{\Gamma}_{JM'}^i(p) \} = \\ & = \int d^4 p \text{Tr} \left\{ \left(\frac{1}{2} [\Sigma_3, \Psi_{JM}^i(p)] + L_3^p \Psi_{JM}^i(p) \right) \bar{\Gamma}_{JM'}^i(p) \right\} = \\ & = - \int d^4 p \text{Tr} \left\{ \Psi_{JM}^i(p) \left(\frac{1}{2} [\Sigma_3, \bar{\Gamma}_{JM'}^i(p)] + L_3^p \bar{\Gamma}_{JM'}^i(p) \right) \right\} = \\ & = M' \int d^4 p \text{Tr} \{ \Psi_{JM}^i(p) \bar{\Gamma}_{JM'}^i(p) \}, \end{aligned}$$

а так как $M \neq M'$, то получаем (92). Такой же ход рассуждений с использованием уравнений типа (27) приводит к утверждению:

$$\int d^4 p \text{Tr} \{ \bar{\Gamma}_{JM}^i(p) \Psi_{JM'}^i(p) \} = 0, \quad (94)$$

если $J \neq J'$. Осталось доказать, что при $i \neq j$, ($\lambda_{iJ} \neq \lambda_{jJ}$) функции $\bar{\Gamma}_{JM}^i(p)$ и $\Psi_{J'M'}^j(p)$ ортогональны в смысле (91) для любых M, M', J, J' . Для этого при помощи уравнений (85) и (90) составим выражение:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \{ \bar{\Gamma}_{JM}^i(p) \Psi_{J'M'}^j(p) \} = \\ & = \lambda_{jJ'} \int d^4 p' [\bar{\Gamma}_{JM}^i(p)]_{\beta\alpha} [N(p, p')]_{\alpha\alpha', \beta'\beta} [\Psi_{J'M'}^j(p')]_{\alpha'\beta'} = \\ & = \lambda_{iJ} \int d^4 p' [\Psi_{J'M'}^j(p)]_{\alpha\beta} [N(p', p)]_{\beta'\alpha, \beta\alpha'} [\bar{\Gamma}_{JM}^i(p')]_{\alpha'\beta'}. \end{aligned} \quad (95)$$

Интегрируя (95), убеждаемся в том, что если $i \neq j$, $\lambda_{iJ} \neq \lambda_{jJ}$, то

$$\begin{aligned} & \int d^4 p \text{Tr} \{ \bar{\Gamma}_{JM}^i(p) \Psi_{J'M'}^j(p) \} = \\ & = \lambda_{jJ'} \int d^4 p \int d^4 p' [\bar{\Gamma}_{JM}^i(p)]_{\beta\alpha} [N(p, p')]_{\alpha\alpha', \beta'\beta} [\Psi_{J'M'}^j(p')]_{\alpha'\beta'} = \\ & = \lambda_{iJ} \int d^4 p \int d^4 p' [\bar{\Gamma}_{JM}^i(p')]_{\alpha'\beta'} [N(p', p)]_{\beta'\alpha, \beta\alpha'} [\Psi_{J'M'}^j(p)]_{\alpha\beta} = 0. \end{aligned}$$

Итак, соотношение (91) доказано, и можно записать следующее формальное разложение ядра (86) по биортогональному базису $\bar{\Gamma}_{JM}^i(p)$, $\Psi_{J'M'}^j(p)$:

$$[N(p, p')]_{\alpha\alpha', \beta'\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{JM} \frac{1}{N\lambda_{kJ}} [\Psi_{JM}^k(p)]_{\alpha\beta} [\bar{\Gamma}_{JM}^k(p')]_{\beta'\alpha'}. \quad (96)$$

Ряд (96) был получен при помощи эвристических рассуждений. Полностью строгое доказательство существования и свойств сходимости этого ряда пока невозможно, т. к. неизвестны соответствующие спектральные свойства ядра (86). Тем не менее, разложение (96) предоставляет реальный способ исследования спектра по константе связи, а следовательно, и энергетического спектра уравнения (83). Действительно, основываясь на этом разложении, мы можем обобщить описанный в пункте 3.1 метод исчерпывания на спинор-спинорное уравнение БС. Для связанной системы с определенным значением собственного углового момента из уравнения (83) следует система интегральных уравнений на парциальные амплитуды, и из формулы (96) после парциального разложения будет следовать обобщение метода исчерпывания на этот случай.

5 Дейтрон

Вычисление энергетического спектра системы парциальных уравнений БС по методу исчерпывания является весьма громоздкой задачей. Одним из возможных путей анализа работоспособности метода (а точнее, способа расчета основных состояний по константе связи) может стать исследование основного энергетического состояния некоторой реально наблюдаемой физической системы, свойства которой хорошо известны. Одной из таких систем является дейтрон, и уравнение (83) при $J = 1$ можно применить к описанию его свойств. Ясно, что полномасштабное описание всех свойств дейтрона в модели скалярного обмена невозможно (спинор-спинорное уравнение БС для дейтрона с реалистическим взаимодействием решено в [1, 8]). С другой стороны, известно, что дейтрон – слабосвязанная система и находится преимущественно в S -состоянии (вероятность D -состояния составляет всего лишь несколько процентов [18]), так что в рамках уравнения со скалярным взаимодействием можно ожидать удовлетворительного описания тех его свойств, которые не очень чувствительны к релятивистским эффектам.⁴ В двухнуклонной системе нет других связанных состояний, кроме дейтрона. Поэтому в данном случае существование в энергетическом спектре уравнения (83) для $J = 1$ уровней, отличных от основного (т. е. радиальных возбуждений), или существование любых энергетических уровней при $J \neq 1$ должно было бы рассматриваться скорее как недостаток теории. Этот вопрос пока не ясен и требует дополнительной проработки. Отметим еще раз, что модель, основанная на уравнении (83), для дейтрона выглядит физически разумной, и ниже мы приведем примеры вычисления простейших наблюдаемых величин в этой модели.

При $J = 1$ уравнение (83) приводит к системе из 8 парциальных

⁴Напомним, что в нерелятивистском случае такая модель сводится к модели Юкавы, в которой решается уравнение Шредингера с центральным потенциалом и волновая функция дейтрона состоит только из одной S -волны. В релятивистском же случае, благодаря смешиванию малых компонент дираковских спиноров между собой и малых компонент с большими, амплитуда БС будет иметь восемь слагаемых, S , D , и P -волновые функции (более подробно, см., например, [19]).

уравнений, которая полностью приведена в [7]. Для ее решения в соответствии с вышесказанным достаточно найти лишь одно значение константы взаимодействия $g \equiv g_\sigma$ и соответствующие ей парциальные амплитуды при заданной массе дейтрона M_D (которая известна с большой точностью). Вычисления показывают, что все парциальные амплитуды имеют довольно гладкое поведение при достаточно больших $|p_0|$, $|\mathbf{p}|$ (≥ 0.2 ГэВ/с), и очень сильно меняются (на 3-4 порядка) в окрестности начала координат $p_0 = 0$, $|\mathbf{p}| = 0$ (около начала координат у всех парциальных амплитуд имеется резкий пик).

В численных расчетах использовалась гауссова сетка 96×96 , относительная точность вычислений $R = 0.001$. При массе обменного σ -мезона $\mu = 0.2 m$, где m – масса нуклона, $m = 0.939$ ГэВ, константа связи оказалась равной

$$g_\sigma = 2.561.$$

Выяснилось, что решение системы уравнения БС (восемь парциальных амплитуд) и константа связи g_σ практически не зависят от выбора начальных условий (нулевой итерации) и использовавшихся замен переменных для перехода от бесконечных пределов интегрирования к конечным (при условии, что сетка интегрирования имеет достаточно высокий порядок – примерно от $N = 48$ и выше).

Найденные таким образом решения проверялись на примере вычисления наблюдаемых дейтрона. Как и следовало ожидать, среди восьми амплитуд только одна оказалась доминирующей (аналог S -волны в нерелятивистской модели); остальные семь получились на несколько порядков величины подавленными.

Оператор электромагнитного тока. Условие нормировки – простейший пример вычисления наблюдаемых в формализме Бете – Солпитера. Удобно, пользуясь методом Мандельстама [11] для вычисления матричных элементов в формализме БС, нормировать амплитуду (1) на электромагнитный ток дейтрона. При нулевой передаче импульса это

не что иное, как его 4-импульс:

$$P_\mu = \frac{1}{3} \sum_M \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \{ \bar{\Psi}_M^D(p_0, \mathbf{p}) \gamma_\mu \Psi_M^D(p_0, \mathbf{p}) (\hat{p}_2 - m) \}. \quad (97)$$

Условие нормировки (97) является релятивистским обобщением условия нормировки нерелятивистской волновой функции дейтрона (например, боннской), когда последняя нормируется не на единицу, а на массу дейтрона M_D . Действительно, если из шредингеровской волновой функции $\Psi(\mathbf{r})$ частицы с массой m построить "4-мерный" ток вероятности, удовлетворяющий уравнению непрерывности:

$$j^\alpha = (\rho(t, \mathbf{r}), \mathbf{j}(t, \mathbf{r})), \quad (98)$$

$$\rho(t, \mathbf{r}) = |\Psi(t, \mathbf{r})|^2, \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = -\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*), \quad (99)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (100)$$

то домножив (98) на m и проинтегрировав по всему 3-мерному пространству, получим:

$$J^\alpha = \int d^3 \mathbf{r} j^\alpha(\mathbf{r}) = (m, \mathbf{P}), \quad (101)$$

где \mathbf{P} – среднее значение импульса частицы. В соответствии с этой аналогией условие нормировки (97) в нерелятивистском пределе должно переходить в интеграл от обычной плотности вероятности, умноженный на M_D . Поэтому для того, чтобы сопоставить результаты релятивистского подхода с нерелятивистским описанием, можно сравнить между собой подынтегральные выражения в условии нормировки боннской волновой функции:

$$\int_0^\infty d|\mathbf{p}| n_{Bonn}(|\mathbf{p}|) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^2}{(\hbar c)^3} (u^2(|\mathbf{p}|) + w^2(|\mathbf{p}|)) = 1, \quad (102)$$

и в условии (97) после снятия интеграла по углам, определив $n_{BS}(|\mathbf{p}|)$ по аналогии с (102). На рис. 2 представлены графики зависимости подынтегральных выражений $n_{Bonn}(|\mathbf{p}|)$ и его аналога $n_{BS}(|\mathbf{p}|)$. Сплошная линия соответствует вычислениям в подходе БС, прерывистая –

боннскому потенциалу. Из приведённых графиков видно, что релятивистская модель дейтрона с простым скалярным взаимодействием хорошо описывает поведение зарядовой плотности нуклонов в достаточно широкой области значений импульса $p \sim 0.5 \text{ ГэВ/с}$. В области больших значений p необходимо более реалистическое ядро взаимодействия.

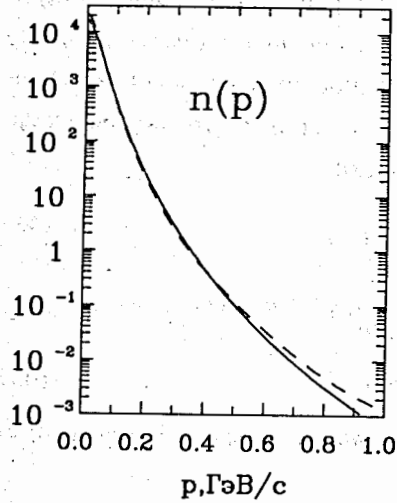


Рис. 2

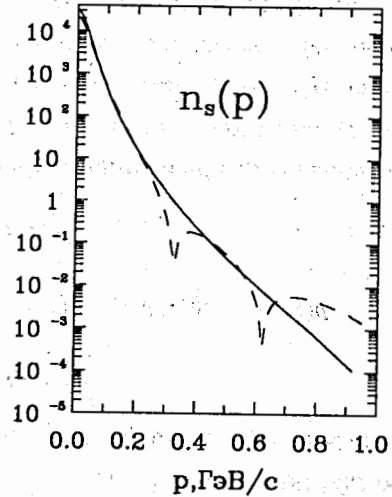


Рис. 3

Оператор спина Существует еще одна возможность сравнить результаты расчетов в формализме Бете – Солпитера с расчетами боннской группы: можно вычислить среднее значение оператора проекции на ось z спина дейтрона S_z в обоих подходах и сравнить соответствующие подынтегральные выражения, как уже делалось выше. В нерелятивистском случае $S_z = S_{Az} + S_{Bz} = \frac{1}{2}(\sigma_{Az} + \sigma_{Bz})$, и таким образом,

$$\langle S_z \rangle_{\text{Bonn}} = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} \Psi_M^{D\dagger} (\sigma_{Az} + \sigma_{Bz}) \Psi_M^D, \quad (103)$$

где Ψ_M^D – боннская волновая функция дейтрона. Вычисление величины (103) даёт следующий результат:

$$\langle S_z \rangle_{\text{Bonn}} = \int_0^\infty d|\mathbf{p}| n_s^{\text{Bonn}}(|\mathbf{p}|) =$$

$$= \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{2|\mathbf{p}|^2}{\pi(\hbar c)^3} (u^2(|\mathbf{p}|) - \frac{1}{2}w^2(|\mathbf{p}|)) = 1 - \frac{3}{2}P_D, \quad (104)$$

где под P_D подразумевается вероятность D -волны в дейтроне.

Легко убедиться, что вычисление среднего значения проекции спина дейтрона на ось z в релятивистском случае соответствует нахождению среднего от полусуммы третьих компонент аксиальных токов составляющих нуклонов:

$$\langle S_z \rangle_{BS} = \frac{1}{2} \langle D | (\bar{\psi}^A \gamma_5 \gamma_3 \psi^A + \bar{\psi}^B \gamma_5 \gamma_3 \psi^B) | D \rangle. \quad (105)$$

Применение метода Мандельштама [11] к вычислению матричного элемента (105) приводит к выражению

$$\langle S_z \rangle_{BS} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \bar{\Psi}_M^D(p) \gamma_5 \gamma^3 \Psi_M^D(p) (\hat{p}_2 - m) \}, \quad (106)$$

Положим проекцию спина дейтрона $M = 1$ и сравним подынтегральные выражения в (104) и в (106) как функции $|\mathbf{p}|$. Графики этих функций представлены на рис. 3. Сплошная линия соответствует вычислениям в формализме БС, прерывистая – модели боннского потенциала. Из графиков видно, что согласие "радиальных спиновых плотностей" в этих подходах имеет место только до относительного импульса $|\mathbf{p}| \sim 0.2 \text{ ГэВ/с}$. Различие в результатах двух подходов при больших значениях импульса обусловлено почти полным отсутствием в данной релятивистской модели тензорных сил. Более детальный анализ поведения наблюдаемых дейтрона в формализме БС с реалистическим взаимодействием можно найти, например, в [8] и [20].

6 Выводы

Таким образом, результаты данной статьи можно кратко сформулировать следующим образом:

1. Найдено разложение ядра спинор-спинорного уравнения БС по биортогональному базису его решений. Разработан строго обоснованный метод численного решения уравнения БС в лестничном приближении.

2. Предложенный метод легко обобщается на достаточно широкий класс ядер взаимодействия и позволяет найти спектр энергий и волновые функции как основного, так и возбужденных состояний двухчастичных связанных систем. Пригодность метода продемонстрирована на примере вычисления спектра системы двух скалярных частиц. Можно утверждать, что при соответствующем выборе эффективного кварк-кваркового взаимодействия (содержащего, например, конфайнмент) метод применим для анализа спектра и вероятностей переходов в кварк-антикварковых системах. Эта проблема чрезвычайно актуальна при разработке эффективных ковариантных моделей для исследования связанных состояний в КХД.

3. Получено решение уравнения БС для дейтрона со скалярным взаимодействием, вычислены некоторые наблюдаемые в формализме БС и показано, что полученные решения удовлетворительно описывают зарядовые и спиновые плотности нуклонов при малых импульсах. Несмотря на то, что вычисления в рамках такой упрощенной модели не позволяют исследовать роль релятивистских эффектов в дейтроне, с практической точки зрения рассмотрение спинор-спинорного уравнения БС со скалярным потенциалом достаточно информативно. Во-первых, в рамках такой модели относительно легко проверяется обобщение метода исчерпывания на спинорный случай. Во-вторых, полученные решения довольно близки к реальности, и их можно с успехом использовать как функции нулевого приближения при решении уравнения с реалистическим взаимодействием, т.е. с обменным потенциалом, включающим полный набор обменных мезонов: $\pi, \rho, \omega, \sigma, \delta, \eta$.

7 Резюме

Предложено строгое математическое обоснование численного итерационного метода нахождения энергий и волновых функций основного и возбужденных состояний двухфермионных связанных систем в формализме БС. Приведены конкретные примеры применения метода к различным задачам: нахождение энергетического спектра системы ска-

лярных частиц, решение уравнения Бете – Солпитера для дейтрона и вычисление наблюдаемых в формализме Бете – Солпитера.

В заключение авторы выражают признательность А.Ю. Умникову, С.Г. Бондаренко и А.Ю. Илларионову за плодотворные дискуссии и обсуждение результатов.

Литература

- [1] J. Flescher and J. Tjon, Nucl. Phys. **B 84**, 375 (1975); Phys. Rev. **D 15**, 2537 (1977);
M.J. Zuilhof and J.A. Tjon, Phys. Rev. **C 22** 2369 (1980);
E. van Faassen and J. Tjon, Phys. Rev. **C 33**, 2105 (1986).
- [2] F. Gross, Phys. Rev. **186**, 1448 (1969);
W.W. Buck and F. Gross, Phys. Rev. **D 20**, 2361 (1979).
- [3] F. Gross, J.W. Van Orden and K. Holinde, Phys. Rev. **C 45**, 2094 (1992).
- [4] P.L. Chung, F. Coester, B.D. Keister and W.N. Polyzou, Phys. Rev. **C 37**, 2000 (1988).
- [5] J. Carbonell and V.A. Karmanov, Nucl. Phys. **A 581**, 625 (1995).
- [6] F. Gross, Talk given at the 9-th Amsterdam miniconference "Electromagnetic studies of the deuteron", NIKHEF, Amsterdam, February 1-2, 1996.
- [7] A.Yu. Umnikov and F.C. Khanna, Phys. Rev. **C49** (1994) 2311.
- [8] A.Yu. Umnikov, L.P. Kaptari, K.Yu. Kazakov and F. Khanna, Phys. Lett. **B334** (1994) 163.
L.P. Kaptari, A.Yu. Umnikov et al., to appear in Phys. Rev. **C**,
e-print archive: nucl-th/9603022.
- [9] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
- [10] N. N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **43**, 1 (1969).

- [11] S. Mandelstam, Proc. R. Soc. London A **233**, 248 (1955).
- [12] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. – М., “Наука”, 1984.
- [13] Ициксон К., Зюбер Ж.Б. Квантовая теория поля. – М., “Мир”, 1984, т.1, 2.
- [14] Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М., Физматгиз, 1959.
- [15] G. C. Wick, Phys. Rev. **96**, 1124 (1954).
- [16] M. Harada and Y. Yoshida, KUNS-1304, HE(HT) 94/16, SU-4240-592; e-print archive: hep-ph/9505206.
- [17] Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М., “Наука”, 1966.
- [18] M. Lacombe et al., Phys. Rev. C **21**, 861 (1980);
R. Machleid, K. Holinde and Ch. Elster, Phys. Rep. **149**, 1 (1987).
- [19] J.J. Kubis, Phys. Rev.,D **6**, 547 (1972).
- [20] A.Yu. Umnikov, L.P. Kaptari and F.C. Khanna, to be published; e-print archive: nucl-th/9603022.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 октября 1996 года.

Доркин С.М., Каптарь Л.П., Семих С.С. P2-96-407
Об энергетическом спектре уравнения Бете—Солпитера

Обсуждается проблема нахождения энергетического спектра связанных состояний системы двух фермионов в формализме Бете—Солпитера. Найдено разложение ядра спинор-спинорного уравнения Бете—Солпитера в лестничном приближении по биортогональному базису в виде билинейного ряда, аналогичного ряду Гильберта—Шмидта для ядра симметричного интегрального уравнения Фредгольма. В соответствии с полученным разложением предлагается новый метод решения этого уравнения, позволяющий найти спектр возбужденных состояний и соответствующие волновые функции. Приводятся методические результаты численного решения уравнения Бете—Солпитера со скалярным взаимодействием.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1996

Перевод авторов

Dorkin S.M., Kaptari L.P., Semikh S.S. P2-96-407
On the Energy Spectrum of the Bethe—Salpeter Equation

The problem of calculating the energy spectrum of a two-fermion bound state within the Bethe—Salpeter formalism is discussed. An expansion of the kernel of the spinor-spinor Bethe—Salpeter equation in the ladder approximation is found in terms of a bi-orthogonal basis of the generalized Gilbert—Schmidt series for symmetric equations of the Fredholm type. According to this expansion, a new method of solving the Bethe—Salpeter equation and finding the mass spectrum is proposed. Methodological result of numerical solutions of equations with scalar interaction is presented.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1996