ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-96-302

О.О.Воскресенская, А.Н.Сисакян, А.В.Тарасов,
Г.Т.Торосян

ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ МОТТОВСКИХ ПОПРАВОК К ФОРМУЛЕ БЕТЕ — БЛОХА В ТЕРМИНАХ МОТТОВСКИХ ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД

Направлено в «Письма в ЖЭТФ»

1996

Воскресенская О.О. и др. P2-96-302
Выражение для моттовских поправок к формуле Бете — Блоха
в терминах моттовских парциальных амплитуд

Показано, что расчет моттовских поправок [3] к формуле Бете — Блоха может быть сведен к суммированию ряда, составленного из величин, билинейных по моттовским парциальным амплитудам.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1996

Voskresenskaya O.O. et al. P2-96-302
Expression for the Mott Corrections to the Bethe — Bloch Formula
in Terms of the Mott Partial Amplitudes

It is shown that the calculation of the Mott corrections to the Bethe — Bloch formula can be reduced to the summation of a series consisting of quantities bilinear in the Mott partial amplitudes.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1996

Отличие точного (вычисляемого с помощью моттовских фазовых сдвигов [1]) выражения для сечения рассеяния релятивистских электронов тяжелыми заряженными частицами от его борновского аналога приводит к поправкам к формуле Бете — Блоха [2] для средних потерь энергии заряженными частицами в веществе.

Эти поправки представляются выражением

$$\Delta_M(-\frac{d\overline{E}}{dx}) = n_0 z \int (\frac{d\sigma_M}{d\varepsilon} - \frac{d\sigma_B}{d\varepsilon})\varepsilon\, d\varepsilon, \qquad (1)$$

где n_0 — число атомов вещества в единице объема, z — число электронов в атоме, а $d\sigma_{M(B)}/d\varepsilon$ — соответственно моттовское и борновское выражения для сечения рассеяния релятивистского электрона тяжелой частицей как функция энергии ε, передаваемой электрону в системе его покоя. Они были впервые точно рассчитаны в работах [3] путем численного интегрирования выражения (1) для нескольких значений заряда Z и скорости $\beta = V/c$ тяжелой заряженной частицы (иона). Эти расчеты продемонстрировали важность учета моттовских поправок (МП) к формуле Бете — Блоха при анализе данных об энергетических потерях релятивистских тяжелых ионов в веществе. Однако выражение для МП в интегральной формуле (1) крайне неудобно для практического применения, и поэтому при анализе конкретных экспериментальных данных [4] обычно пользуются приближенными аналитическими выражениями для МП типа полученных в работе [5].

Недостаток этих приближенных выражений состоит в ограниченности области их применимости, грубо оцениваемой соотношением $Z/\beta \leq 100$, и по существу неопределеннной точности. К тому же неправильное пороговое (при $\beta \to 0$) поведение этих выражений не позволяет пользоваться ими при вычислении полных пробегов релятивистских тяжелых ионов в веществе.

Поэтому задача получения простых в обращении и вместе с тем точных выражений для МП является достаточно актуальной.

Цель настоящей работы — показать, что интегрирование в формуле (1) может быть выполнено аналитически, а выражение для МП может быть представлено в виде достаточно быстро сходящегося ряда величин, билинейных по моттовским парциальным амплитудам, легко вычисляемого с помощью ЭВМ. Переходя в выражении (1) от интегрирования по переданной электрону энергии ε к интегрированию по углу ϑ его рассеяния ионом в с.ц.м. (по существу в системе покоя иона) перепишем (1) в виде

$$\Delta_M(-\frac{d\overline{E}}{dx}) = \frac{\pi z n_0}{m_e} \lim_{\vartheta_0 \to 0} \int_{\vartheta_0}^{\pi} [\omega_M(\vartheta) - \omega_B(\vartheta)] \sin^2\vartheta/2 \sin\vartheta\, d\vartheta, \qquad (2)$$

где

$$\begin{aligned}
\omega_B(\vartheta) &= \eta^2(1-\beta^2\sin^2\vartheta/2)/\sin^4\vartheta/2,\\
\omega_M(\vartheta) &= \xi^2|F_M(\vartheta)|^2/\sin^2\vartheta/2 + |G_M(\vartheta)|^2/\cos^2\vartheta/2,\\
F_M(\vartheta) = \sum_l F_M{}^{(l)}P_l(x),\ G_M(\vartheta) &= \sum_l G_M{}^{(l)}P_l(x),\ x=\cos\vartheta,\\
F_M{}^{(l)} &= lC_M{}^{(l)} - (l+1)C_M{}^{(l+1)},\\
G_M{}^{(l)} &= l^2C_M{}^{(l)} + (l+1)^2C_M{}^{(l+1)}, \qquad (3)\\
C_M{}^{(l)} = \exp\left[-i\pi(\rho_l-l)\right]\frac{\Gamma(\rho_l-i\eta)}{\Gamma(\rho_l+1+i\eta)}&,\ \eta = Z\alpha/\beta, \xi=\eta\sqrt{1-\beta^2},\\
\rho_l &= \sqrt{l^2-Z^2\alpha^2},\quad \alpha=1/137,
\end{aligned}$$

m_e— масса электрона.

Для дальнейшего вместо оригинального [1] выражения для $G(\vartheta)$, приведенного выше, удобно использовать несколько иное, выражающее его через $F(\vartheta)$. Записывая

$$G_M(\vartheta) = \sum[l^2C_M{}^{(l)} + (l+1)^2C_M{}^{(l+1)}]P_l(x) \equiv \sum(l+1)^2C_M{}^{(l+1)}[P_l(x)+P_{l+1}(x)] \qquad (4)$$

и учитывая соотношение [6]

$$(l+1)[P_l(x)+P_{l+1}(x)] = \cot\vartheta/2\,[P_{l+1}{}^{(1)}(x) - P_l{}^{(l)}(x)], \qquad (5)$$

элементарно получаем

$$G_M(\vartheta) = \cot\vartheta/2\sum[lC_M{}^{(l)} - (l+1)C_M{}^{(l+1)}]P_l{}^{(1)}(x) = -\cot\vartheta/2\,F'(\vartheta), \qquad (6)$$

и как следствие

$$\omega_M(\vartheta) = [\xi^2|F(\vartheta)|^2 + |F'(\vartheta)|^2]/\sin^2(\vartheta/2). \qquad (7)$$

Введем величины

$$G_Z{}^{(l)} = \frac{\Gamma(l-i\eta)}{\Gamma(l+1+i\eta)}, \qquad (8)$$

получаемые из $C_M{}^{(l)}$ заменой $\rho_l \to l$ и отвечающие приближению Зоммерфельда — Мауэ — Фарри [7] в теории eZ-рассеяния и соответствующие им величины

$$\begin{aligned}
F_Z{}^{(l)} &= lC_Z{}^{(l)} - (l+1)C_Z{}^{(l+1)},\\
F_Z(\vartheta) = \sum F_Z{}^{(L)}P_l(x) &= \frac{\Gamma(1+i\eta)}{\Gamma(1-i\eta)}(\sin\vartheta/2)^{2i\eta}, \qquad (9)\\
\omega_Z(\vartheta) &= (\xi^2+\eta^2\cot^2\vartheta/2)/\sin^2\vartheta/2 \equiv \omega_B(\vartheta).
\end{aligned}$$

Записывая

$$\begin{aligned}
\omega_M(\vartheta) &= \omega_Z(\vartheta) + \lambda(\vartheta)/\sin^2\vartheta/2,\\
\lambda(\vartheta) &= \xi^2[2\Re(\Delta F(\vartheta)F_Z^*(\vartheta)) + |\Delta F(\vartheta)|^2] + 2\Re[\Delta F'(\vartheta)F_Z'^*(\vartheta)] + |\Delta F'(\vartheta)|^2,\\
\Delta F(\vartheta) &= F_M(\vartheta) - F_Z(\vartheta) \qquad (10)
\end{aligned}$$

и замечая, что логарифмически расходящиеся на нижнем пределе в (2) вклады от $\omega_Z(\vartheta)$ и $\omega_B(\vartheta)$ взаимно сокращаются в силу (9), получим окончательно

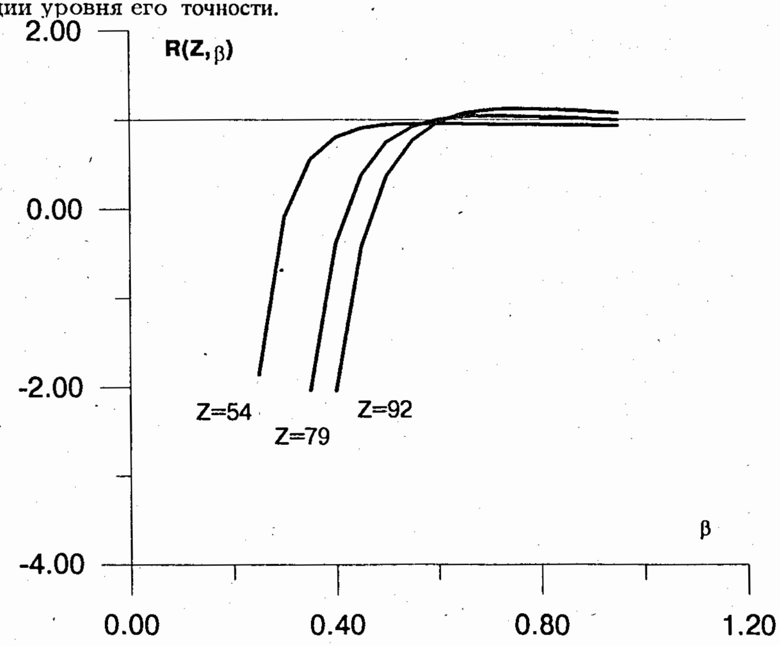
$$\Delta_M\left(-\frac{d\overline{E}}{dx}\right) = \frac{\pi z n_0}{m_e}\int_0^\pi \lambda(\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta \equiv \frac{2\pi Z n_0}{m_e}\sum_{l=0}^{L}\frac{[l(l+1)+\xi^2]}{2l+1}[|F_M^{(l)}|^2 - |F_Z^{(l)}|^2], \qquad (11)$$

где использовано соотношение ортогональности функций Лежандра

$$\int P_l^{(m)}(\cos\vartheta)P_l^{(n)}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\delta_{ll'}. \qquad (12)$$

Нетрудно убедиться, что члены ряда (11) асимптотически ведут себя как l^{-2} и ряд абсолютно сходится.

Техническим вопросам выбора рационального метода численного суммирования ряда (11), а также сравнению результатов расчетов энергетических потерь тяжелых ионов с учетом МП с имеющимися экспериментальными данными будет посвящена отдельная публикация. Здесь же мы приведем лишь сравнение точного (11) результата для МП с приближенным [5], для демонстрации уровня его точности.



На рисунке представлено отношение R приближенного аналитического результата для МП к точному как функция от β для трех значений $Z = 54,\ 79,\ 92$. Видно, что приближенное значение для МП при малых β становится отрицательным, в то время как точное, как показывают расчеты, всегда остается положительным.

Авторы благодарят С. Р. Геворкяна, Э. А. Кураева, М. П. Рекало, В. М. Тер-Антоняна за многочисленные полезные обсуждения вопросов, затронутых в работе.

Литература

[1] N.F.Mott, Proc.Roy.Soc. **A124**,425 (1929).

[2] H.Bethe, J.Ashkin 1953 in Experimental Nuclear Phisics 1, editid by E.Segre (Wiley, New York) Chap.2.

[3] S.H.Morgan, P.B.Ebly, Nucl.Instrum.Methods **106**, 429 (1973).

[4] C.Scheidenberger, H.Geissel, H.H.Mikkelsen et.al, **GSI 95-1, ISSN 0174-0814**, Scientific Report 155 (1995).

[5] S.P.Ahlen, Phys.Rev. **A17**, 1236, (1978).

[6] И.С.Градштейн, И.М.Рыжик,"Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений", Физматгиз, Москва (1963).

[7] W.H.Furry, Phys.Rev. **46**, 391, (1934).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 августа 1996 года.