ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 9596

А.Каримходжаев, Р.Н.Фаустов

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ПОЛЮСА ДВУХЧАСТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

1976

P2 - 9596

А.Каримходжаев,* Р.Н.Фаустов

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ПОЛЮСА ДВУХЧАСТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

Направлено в ТМФ

*Институт ядерной физики АН УзССР.

1. В квантовой теории поля [1] двухчастичная функция Грина при значениях полной энергии, соответствующих связанному состоянию, имеет полюсную структуру [2]. Функцию Грина можно определить как вакуумное среднее от хронологического произведения четырех гейзенберговских операторов поля /так называемая четырехвременная функция Грина/. Выделению вклада связанного состояния соответствует определенное упорядочение операторов поля по переменным полного и относительного времени.

В работе [3] было получено правильное выражение для полюсного вклада связанного состояния, однако при этом было учтено упорядочение лишь по переменной полного времени.

В работе [4] эта процедура была уточнена и проведено хронологическое упорядочение по обеим временным переменным, но только для частного способа введения полных и относительных координат, удобных для случая частиц с равными массами.

Ниже дан последовательный вывод точного выражения для полюсного вклада связанного состояния в случае параметризации координат общего вида для частиц с произвольными массами.

Показано, что на массовой поверхности связанного состояния возникают обычные амплитуды Бете-Солпитера.

2. Найдем вклад связанного состояния в двухчастичную функцию Грина:

$$G(x_a, x_b; y_a, y_b) = -i\langle 0|T\psi_a(x_a)\psi_b(x_b)\bar{\psi}_a(y_a)\bar{\psi}_b(y_b)|0\rangle, \quad /1/$$

где ψ_a, ψ_b - гейзенберговы операторы спинорных полей a и b. С этой целью рассмотрим упорядочение временных координат

$$x_a^\circ, x_b^\circ > y_a^\circ, y_b^\circ \qquad /2/$$

в определении /1/ и внесем сумму по полному набору состояний $|n\rangle$ между операторами ψ_b и $\bar\psi_a$. Тогда

$$G(x_a,x_b;y_a,y_b) = -i\sum_n \langle 0|T\psi_a(x_a)\psi_b(x_b)|n\rangle\langle n|T\bar\psi_a(y_a)\bar\psi_b(y_b)|0\rangle,$$

$$x_a^\circ, x_b^\circ > y_a^\circ, y_b^\circ.$$

Выделим вклад связанного состояния $|\mathcal{P}\rangle$, для которого полный четырехимпульс $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}$, $\mathcal{P}^2 = M^2$,

$$G(x_a,x_b;y_a,y_b) = -i\sum_{\mathcal{P},\alpha}\chi_{\mathcal{P},\alpha}(x_a,x_b)\bar\chi_{\mathcal{P},\alpha}(y_a,y_b) - $$
$$- i\sum_{n\neq\mathcal{P},\alpha}\chi_n(x_a,x_b)\bar\chi_n(y_a,y_b). \qquad /3/$$

где $\chi_{\mathcal{P},\alpha}$ и $\bar\chi_{\mathcal{P},\alpha}$ - амплитуды Бете-Солпитера:

$$\chi_{\mathcal{P},\alpha}(x_a,x_b) = \langle 0|T\psi_a(x_a)\psi_b(x_b)|\mathcal{P},\alpha\rangle, \qquad /4а/$$

$$\bar\chi_{\mathcal{P},\alpha}(y_a,y_b) = \langle\mathcal{P},\alpha|T\bar\psi_a(y_a)\bar\psi_b(y_b)|0\rangle. \qquad /4б/$$

Индекс α обозначает совокупность дополнительных квантовых чисел, характеризующих вырожденные уровни. Используя трансляционную инвариантность, можно представить амплитуды χ в виде

$$\chi_{\mathcal{P},\alpha}(x_a,x_b) = e^{-i\mathcal{P}X}\chi_{\mathcal{P},\alpha}(x), \qquad /5а/$$

$$\bar\chi_{\mathcal{P},\alpha}(y_a,y_b) = e^{+i\mathcal{P}Y}\bar\chi_{\mathcal{P},\alpha}(y), \qquad /5б/$$

где введены переменные полных /центра масс/ и относительных координат

$$X = \eta_a x_a + \eta_b x_b, \qquad x = x_a - x_b,$$
$$Y = \eta_a y_a + \eta_b y_b, \qquad y = y_a - y_b,$$
$$\eta_a + \eta_b = 1, \qquad /6/$$
$$x_a = X + \eta_b x, \qquad x_b = X - \eta_a x,$$
$$y_a = Y + \eta_b y, \qquad y_b = Y - \eta_a y.$$

Очевидно, что указанное в неравенстве /2/ упорядочение по времени можно записать с помощью функции $\theta\{\min[x_a^\circ, x_b^\circ] - \max[y_a^\circ, y_b^\circ]\}$. Анализируя на максимум и минимум зависимость /6/ временной координаты x_i° от относительного времени x° и полного времени X°, найдем

$$\min[x_a^\circ, x_b^\circ] = X^\circ - \eta_a|x^\circ| \quad \text{при} \quad x^\circ > 0,$$
$$\min[x_a^\circ, x_b^\circ] = X^\circ - \eta_b|x^\circ| \quad \text{при} \quad x^\circ < 0,$$
$$\max[x_a^\circ, x_b^\circ] = X^\circ + \eta_b|x^\circ| \quad \text{при} \quad x^\circ > 0,$$
$$\max[x_a^\circ, x_b^\circ] = X^\circ + \eta_a|x^\circ| \quad \text{при} \quad x^\circ < 0.$$

Воспользовавшись свойством абсолютного значения, для любых значений переменных относительных x и полных X координат получим, что минимальной формой будет:

$$\min[x_a^\circ, x_b^\circ] = X^\circ - \frac{1}{2}|x^\circ| - \frac{\eta_a - \eta_b}{2}x^\circ,$$

а максимальной -

$$\max[x_a^\circ, x_b^\circ] = X^\circ + \frac{1}{2}|x^\circ| + \frac{\eta_b - \eta_a}{2}x^\circ. \qquad /7/$$

Тогда выражение /3/ в общем случае упорядочения $x^\circ_a, x^\circ_b > y^\circ_a, y^\circ_b$ можно записать с помощью введения соответствующей θ-функции:

$$G(x_a, x_b; y_a, y_b) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_\alpha \int d^4\mathcal{P}\, \chi_{\mathcal{P},\alpha}(x)\bar{\chi}_{\mathcal{P},\alpha}(y) \times$$

$$\times\, \theta(\mathcal{P}^\circ)\delta(\mathcal{P}^2 - M^2)\, e^{-\mathcal{P}(X-Y)}\theta\{X^\circ - Y^\circ - \frac{1}{2}|x^\circ| - \frac{1}{2}|y^\circ| - \frac{\eta_a-\eta_b}{2}(x^\circ - y^\circ)\} + \ldots, \qquad /8/$$

где суммирование по α идет по всем вырожденным связанным состояниям с массой M и,как показано выше,

$$\theta\{X^\circ - Y^\circ - \frac{1}{2}|x^\circ| - \frac{1}{2}|y^\circ| - \frac{\eta_a - \eta_b}{2}(x^\circ - y^\circ)\} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{при } x^\circ_a, x^\circ_b > y^\circ_a, y^\circ_b, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \qquad /9/$$

3. Введем фурье-образы функции Грина G и амплитуд χ в импульсном представлении с учетом трансляционной инвариантности:

$$G(x_a, x_b; y_a, y_b) = \frac{1}{(2\pi)^{12}}\int d^4p_a d^4p_b d^4q_a d^4q_b \times$$

$$\times\, e^{-ip_a x_a - ip_b x_b + iq_a y_a + iq_b y_b}\,\delta^4(\mathcal{P} - Q)\, G(\mathcal{P}, p, q), \qquad /10а/$$

$$\chi_{\mathcal{P},\alpha}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ipx}\chi_{\mathcal{P},\alpha}(p), \qquad /10б/$$

$$\bar{\chi}_{\mathcal{P},\alpha}(y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\, e^{iqy}\bar{\chi}_{\mathcal{P},\alpha}(q), \qquad /10в/$$

где переменные полного и относительного импульсов определены следующим образом:

$$\mathcal{P} \doteq p_a + p_b, \qquad p = \eta_b p_a - \eta_a p_b,$$

$$Q = q_a + q_b, \qquad q = \eta_b q_a - \eta_a q_b,$$

$$\eta_a + \eta_b = 1, \qquad /11/$$

$$p_a = \eta_a\mathcal{P} + p, \qquad q_a = \eta_a Q + q,$$

$$p_b = \eta_b\mathcal{P} - p, \qquad q_b = \eta_b Q - q.$$

В дальнейшем, для упрощения записи, опускаем индекс α и суммирование по нему. Преобразуем выражение /8/ с помощью соотношения

$$\theta(\mathcal{P}^\circ)\delta(\mathcal{P}^2 - M^2) = (2\mathcal{P}^\circ)^{-1}\,\delta(\mathcal{P} - E(\vec{\mathcal{P}})),$$

где $E(\vec{\mathcal{P}}) = \sqrt{\vec{\mathcal{P}}^2 + M^2}$, и представления /1/

$$\theta(y^\circ) = -\frac{1}{2\pi i}\int dk^\circ \frac{1}{k^\circ + i\epsilon}\, e^{-ik^\circ y^\circ}. \qquad /12/$$

Делая замену переменной интегрирования $k^\circ \to \mathcal{P}^\circ - E(\vec{\mathcal{P}})$, найдем вклад связанного состояния:

$$G(x_a, x_b; y_a, y_b) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4\mathcal{P}\,\chi_{\mathcal{P}}(x)\bar{\chi}_{\mathcal{P}}(y)}{2E(\vec{\mathcal{P}})[\mathcal{P}^\circ - E(\vec{\mathcal{P}}) + i\epsilon]} \times$$

$$\times\, e^{-i\mathcal{P}(X-Y)}\, e^{\frac{i}{2}(\mathcal{P}^\circ - E(\vec{\mathcal{P}}))[|x^\circ| + |y^\circ| + (\eta_a - \eta_b)(x^\circ - y^\circ)]} + \ldots. \qquad /13/$$

Введем новые амплитуды:

$$\chi'_{\mathcal{P}}(x) = e^{\frac{i}{2}(\mathcal{P}^\circ - E(\vec{\mathcal{P}}))[|x^\circ| + (\eta_a - \eta_b)x^\circ]}\,\chi_{\mathcal{P}}(x), \qquad /14/$$

$$\bar{\chi}'_{\mathcal{P}}(y) = e^{\frac{i}{2}(\mathcal{P}^\circ - E(\vec{\mathcal{P}}))[|y^\circ| - (\eta_a - \eta_b)y^\circ]}\,\bar{\chi}_{\mathcal{P}}(y).$$

Из определения /14/ видно, что амплитуды $\chi'_{\mathcal{P}}(x)$ и $\bar{\chi}'_{\mathcal{P}}(y)$ на массовой поверхности $\mathcal{P}^\circ = E(\vec{\mathcal{P}})$ совпадают с амплитудами Бете-Солпитера $\chi_{\mathcal{P}}(x)$ и $\bar{\chi}_{\mathcal{P}}(y)$. Определим фурье-образы амплитуд

$$\chi'_{\mathcal{P}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p\, e^{-ipx}\, \chi'_{\mathcal{P}}(p),$$

$$\bar{\chi}'_{\mathcal{P}}(y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p\, e^{iqy}\, \bar{\chi}'_{\mathcal{P}}(q). \qquad /15/$$

Используя определения /14/ и /15/, выражение /13/ можем записать в виде

$$G(x_a, x_b; y_a, y_b) = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4\mathcal{P}\, d^4p\, d^4q\, e^{-i\mathcal{P}(X-Y) - ipx + iqy} \times \qquad /16/$$

$$\times \frac{\chi'_{\mathcal{P}}(p)\, \bar{\chi}'_{\mathcal{P}}(q)}{2E(\vec{\mathcal{P}})[\mathcal{P}^\circ - E(\vec{\mathcal{P}}) + i\epsilon]} + \ldots .$$

Это означает, что в импульсном представлении функция Грина $G(\mathcal{P}, p, q)$, определенная фурье-преобразованием /10а/, имеет полюс при $\mathcal{P}^\circ = E(\vec{\mathcal{P}}) = \sqrt{\vec{\mathcal{P}}^{\,2} + M^2}$, соответствующий наличию связанного состояния:

$$G(\mathcal{P}, p, q) = \frac{\chi'_{\mathcal{P}}(p)\, \bar{\chi}'_{\mathcal{P}}(q)}{2E(\vec{\mathcal{P}})[\mathcal{P}^\circ - E(\vec{\mathcal{P}}) + i\epsilon]} + \qquad /17/$$

+ регулярные члены при $\mathcal{P}^\circ = E(\vec{\mathcal{P}})$.

Покажем теперь, что амплитуды $\chi'_{\mathcal{P}}(p)$ и $\bar{\chi}'_{\mathcal{P}}(q)$ точно совпадают на массовой поверхности с амплитудами Бете-Солпитера $\chi_{\mathcal{P}}(p)$ и $\bar{\chi}_{\mathcal{P}}(q)$. Подставляя равенства /10б/ и /14/ в обратное фурье-преобразование

$$\chi'_{\mathcal{P}}(p) = \int d^4x\, e^{ipx}\, \chi'_{\mathcal{P}}(x) \qquad /18/$$

и используя формулу

$$e^{iA|x^\circ|} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-i\alpha x^\circ} \left[\frac{1}{A + \alpha + i\epsilon} + \frac{1}{A - \alpha + i\epsilon}\right], \qquad /19/$$

получим

$$\chi'_{\mathcal{P}}(p) = -\frac{1}{(2\pi)^5\, i} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int d^4k \int d^4x\, \chi_{\mathcal{P}}(k) \left[\frac{1}{\frac{\mathcal{P}^\circ - E(\vec{\mathcal{P}})}{2} + \alpha + i\epsilon} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\frac{\mathcal{P}^\circ - E(\vec{\mathcal{P}})}{2} - \alpha + i\epsilon}\right] e^{i(\vec{k} - \vec{p})\vec{x}}\, e^{-i[k^\circ - p^\circ + \alpha - \frac{\mathcal{P}^\circ - E(\vec{\mathcal{P}})}{2}(\eta_a - \eta_b)]x^\circ} . \qquad /20/$$

Интегрируя по x и снимая интегрирование по переменной k, с помощью δ-функции находим:

$$\chi'_{\mathcal{P}}(p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \left[\frac{1}{\frac{\mathcal{P}^\circ - E(\vec{\mathcal{P}})}{2} + \alpha + i\epsilon} + \frac{1}{\frac{\mathcal{P}^\circ - E(\vec{\mathcal{P}})}{2} - \alpha + i\epsilon}\right] \times$$

$$\times\, \chi_{\mathcal{P}}\left(p^\circ + \frac{\mathcal{P}^\circ - E(\vec{\mathcal{P}})}{2}(\eta_a - \eta_b) - \alpha, \vec{p}\right). \qquad /21/$$

Если в соотношении /21/ перейти на массовую поверхность, т.е. устремить $\mathcal{P}^\circ \to E(\vec{\mathcal{P}})$ и воспользоваться известными /1/ представлениями

$$\frac{1}{\alpha + i\epsilon} = -\pi i\, \delta(\alpha) + P\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

$$\frac{1}{\alpha - i\epsilon} = \pi i\, \delta(\alpha) + P\left(\frac{1}{\alpha}\right), \qquad /22/$$

то непосредственно видно, что

$$\chi'_{\mathcal{P}}(p) \to \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\delta(\alpha)\chi_{\mathcal{P}}(p^{o}-\alpha, p) = \chi_{\mathcal{P}}(p),$$

$$\mathcal{P}^{o} \to E(\vec{\mathcal{P}}).$$

Таким же образом можно показать, что

$$\bar{\chi}'_{\mathcal{P}}(q) \to \chi_{\mathcal{P}}(q) \qquad \text{при} \quad \mathcal{P}^{o} \to E(\vec{\mathcal{P}}).$$

В результате выражение /17/ для полюсного вклада связанных состояний в двухчастичную функцию Грина принимает знакомый вид:

$$G(\mathcal{P}, p, q) = \frac{\sum_{\alpha} \chi_{\mathcal{P},\alpha}(p)\bar{\chi}_{\mathcal{P},\alpha}(q)}{2E(\vec{\mathcal{P}})[\mathcal{P}^{o} - E(\vec{\mathcal{P}}) + i\epsilon]} + \qquad /23/$$

$$+ \text{ регулярные члены при } \mathcal{P}^{o} \to E(\vec{\mathcal{P}}), \quad E(\vec{\mathcal{P}}) = \sqrt{\vec{\mathcal{P}}^{2} + M^{2}}.$$

4. Рассмотрим уравнение Бете-Солпитера для двухчастичной функции Грина в импульсном пространстве в операторной форме:

$$G = S_a S_b + S_a S_b K G,$$

или

$$(S_a^{-1} S_b^{-1} - K)G = 1, \qquad /24/$$

где S - фурье-образ полной одночастичной функции Грина спинорного поля, K - фурье-образ ядра, включающего в себя все двухчастично-неприводимые диаграммы.

Если имеется связанное состояние с массой M, то согласно представлению /23/ функция Грина имеет полюс при $\mathcal{P}^{o} = E(\vec{\mathcal{P}})$. Приравнивая вычеты в этом полюсе в обеих частях уравнения /24/, с учетом линейной независимости амплитуд χ найдем уравнение для амплитуды Бете-Солпитера в операторной форме:

$$S_a^{-1} S_b^{-1} \chi = K\chi,$$

которое в более подробной записи имеет вид

$$S_a^{-1}(p_a) S_b^{-1}(p_b)\chi_{\mathcal{P},\alpha}(p) = \int dp' K(\mathcal{P}, p, p')\chi_{\mathcal{P},\alpha}(p'), \quad \mathcal{P}^{2} = M^{2},$$

где

$$S_a^{-1}(p) = \gamma_a \cdot p - m_a - M_a(p),$$

массовый оператор $M_a(p)$ нормирован условием

$$M_a(p)|_{\gamma_a \cdot p = m_a} = 0,$$

а импульсы p_a, p_b согласно параметризации /11/ равны

$$p_a = \eta_a \mathcal{P} + p, \quad p_b = \eta_b \mathcal{P} - p, \quad \eta_a + \eta_b = 1.$$

В заключение авторы выражают благодарность проф. А.Н.Тавхелидзе за привлечение их внимания к рассмотренной выше проблеме и полезные обсуждения.

Литература

1. *Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Наука, 1973.*
2. *N.Nakanishi. Supp. Prog. Theor. Phys., No 43 (1969).*
3. *S.Mandelstam. Proc. Roy. Soc., 233A, 248 (1955).*
4. *D.Lurie, A.J.Macfarlane, Y.Takahashi. Phys.Rev., 140B, 1091 (1965).*

Рукопись поступила в издательский отдел
9 марта 1976 года.