СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 9509

В.Н.Стрельцов

О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТАТИКЕ

1976

P2 - 9509

В.Н.Стрельцов

О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТАТИКЕ

Summary

It is noted that some recently discussed difficulties connected with the relativistic formulation of statics are a direct consequence of the use of a 3-force and the conventional definition of the length of a moving scale.

In particular, basing on the transformation formulae it is shown that for a 3-force the relativistic law of action and reaction equality is not performed. It should be stressed that the paradoxes connected with appearing a torque when transitting from one reference frame to another (e.g., in the case of a right-angled level) are due to the application of the Lorentz contraction formula.

The difficulties indicated are naturally overcome using the Minkowski 4-force and the definition of relativistic length based on the measuring procedure which directly uses a clock and light signals (analogous to the radar method), and it has as a consequence the increase of the longitudinal dimensions of fast-moving objects.

Both considered definitions of length are analyzed from the point of view of the relativity principle. The conventional definition is argued to be unsatisfied with this principle.

В течение последних десяти лет некоторые вопросы специальной теории относительности, и в том числе проблема релятивистской формулировки статики, снова стали предметом дискуссии. Это объясняется общей неудовлетворенностью предложенным еще в девятисотых годах решением некоторых "парадоксов" специальной теории относительности, а появляющиеся до самого последнего времени работы свидетельствуют о том, что здесь все еще нет полной ясности.

Отмеченная выше проблема непосредственно связана с вопросами определения релятивистской силы и релятивистского вращательного момента, последний из которых, очевидно, тесно связан также с определением понятия релятивистской длины.

Указанный круг вопросов, касающийся релятивистской формулировки статики, и будет предметом нашего последующего рассмотрения.

1. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СИЛА

До самого последнего времени в задачах релятивистской механики очень часто применяется нерелятивистское выражение для 3-силы

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad /1.1/$$

В рамках специальной теории относительности при переходе от одной инерциальной системы отсчета K° к другой (K) указанная величина должна подчиняться следующей формуле преобразования:

$$\vec{f} = \frac{\gamma^{-1}\vec{f}^\circ + \vec{V}[(\vec{V}\vec{f}^\circ)(1-\gamma^{-1}) + (\vec{f}^\circ\vec{v}^\circ)\beta^2]/V^2}{1 + (\vec{V}\vec{v}^\circ)/c^2}, \qquad /1.2/$$

где $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\beta = V/c$, $\vec{V}$ - скорость движения K°-системы относительно K, $\vec{f}^\circ$ и $\vec{v}^\circ$ - сила и скорость, измеренные в K°, c - скорость света.

Здесь необходимо подчеркнуть, что уже само определение понятия инерциальной системы отсчета накладывает жесткие ограничения на выбор выражения для релятивистской силы. Именно, если в какой-либо инерциальной системе /например, в K° / силы нет, то она не должна возникать и при переходе к любой другой системе отсчета.

Можно однако, привести пример, когда это условие для величины $\vec{f}$ не выполняется. Классическим аналогом такого примера может служить известный опыт, иллюстрирующий закон равенства действия и противодействия. В этом опыте два человека стоят на разных тележках /или в лодках/ и держат веревку, натягивая которую они приводят в движение навстречу друг другу указанные тележки /лодки/.

Итак, рассмотрим две силы $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$, которые в K°-системе уравновешивают друг друга

$$\vec{f}^\circ_1 + \vec{f}^\circ_2 = 0. \qquad /1.3/$$

Пусть при этом для простоты $f^\circ_{1z} = f^\circ_{2z} = 0$, а ось $O^\circ X^\circ$ K°-системы скользит по оси OX K-системы.

На основании /1.2/, например, для y-составляющих сил в K-системе, будем иметь

$$f_y = f_{1y} + f_{2y} = \frac{\gamma^{-1} f^\circ_{1y}}{1 + (V v^\circ_{1x})/c^2} + \frac{\gamma^{-1} f^\circ_{2y}}{1 + (V v^\circ_{2x})/c^2}. \qquad /1.4/$$

Отсюда, с учетом /1.3/, получим

$$f_y = \frac{f^\circ_{1y}\beta}{\gamma(1+\beta\beta^\circ_{1x})(1+\beta\beta^\circ_{2x})}(\beta^\circ_{2x} - \beta^\circ_{1x}). \qquad /1.4a/$$

Легко видеть, что требуемое равенство $f_y = 0$ будет выполняться только в одном частном случае, когда $v^\circ_{2x} = v^\circ_{1x}$.

Таким образом, мы получили, что некоторая взаимодействующая совокупность, покоящаяся в K°-системе, поскольку $\vec{f}^\circ = 0$, должна прийти в движение по отношению к K-системе, поскольку с точки зрения K указанная совокупность будет испытывать действие силы $\vec{f} \neq 0$. Такой результат, являющийся прямым следствием использования в качестве силы величины $\vec{f}$ *, нельзя, конечно, считать удовлетворительным.

В этой связи следует также упомянуть пример, приведенный Меллером в его монографии "Теория относительности" /2/. Он касается скопления пыли, покоящегося относительно инерциальной системы K°. Полагая далее, что указанное скопление разделяется движущейся воображаемой поверхностью на части 1 и 2, в системе K будем иметь $\vec{f}_1 \neq 0$. Таким образом, мы вынуждены допустить, что для поддержания постоянной скорости части 1 скопления требуется реальная физическая сила. Но это, как отмечает Меллер, означает отказ от самых фундаментальных основ экспериментальной физики Галилея и возврат к философии Аристотеля, которая утверждает, что для поддержания постоянной скорости требуется сила.

Последний известный факт, на который мы хотим обратить внимание, заключается в том, что величины $\vec{f}$ и 3-ускорение подчиняются различным формулам преобразования. Это, в свою очередь, приводит к необходимости введения продольной и поперечной масс, хотя, по определению, масса частицы в специальной теории относительности является скалярной величиной и не преобразуется при переходе от одной системы отсчета к другой.

Все отмеченные выше трудности являются прямым следствием нарушения требования ковариантности, поскольку используемая величина $\vec{f}$ /как и 3-ускорение/ не является тензорной величиной.

---

* К слову сказать, именно указанная причина лежит, например, также в основе "парадокса" пружины в специальной теории относительности /1/.

Этому требованию, а следовательно, и принципу относительности удовлетворяет сила Минковского

$$F_i = \frac{dp_i}{d\tau} \qquad /1.5/$$

/$i = 1,2,3,4$, p_i - 4-вектор импульса, а τ - собственное время/, которая является 4-вектором.

Следует подчеркнуть аналогию между последней формулой, которую можно переписать в виде

$$F_i = m\frac{du_i}{d\tau}\,, \qquad /1.5а/$$

где u_i - 4-скорость, и релятивистским выражением для импульса

$$p_i = m\frac{dx_i}{d\tau}\,. \qquad /1.6/$$

При этом интересно отметить, что если использование /1.6/ в теории относительности /вместо нерелятивистского $\vec{p} = m\vec{v}$/ общепринято, то в случае силы очень часто еще продолжают пользоваться нековариантной величиной /1.1/.

Чтобы устранить указанную непоследовательность, а вместе с тем и избежать трудностей, подобных рассмотренным выше, следует единственно пользоваться 4-вектором силы /1.5/, которую мы будем также называть релятивистской силой * .

2. *РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ВРАЩАТЕЛЬНЫЙ МОМЕНТ*

Как уже отмечалось, определение релятивистского момента сил, с одной стороны, тесно связано с уже рассмотренным вопросом определения релятивистской

---

* Очевидно, что при этом плотность релятивистской силы в единице объема должна представлять собою 4-тензор второго ранга.

силы, а с другой стороны, - с определением понятия релятивистской длины.

2.1. Что касается первого вопроса, то использование 3-силы при вычислении вращательного момента и в этом случае приводит к трудностям, подобным рассмотренным выше.

Возьмем в качестве примера некоторое тело, на которое действуют, скажем, две силы $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$. Причем в системе отсчета, где данное тело покоится, момент сил $\vec{N}^\circ = 0$. После перехода к другой системе отсчета с учетом формул преобразования /1.2/ в общем случае* будем иметь, что $\vec{N} \neq 0$. Если теперь мы снова воспользуемся величиной F_i вместо $\vec{f}$, то все же не сможем устранить отмеченную трудность.

Чтобы проиллюстрировать последнее замечание, рассмотрим, например, обсуждаемый до последнего времени в литературе /см., в частности,[3-5] / так называемый парадокс прямоугольного рычага Льюиса-Толмена[6] .

Возьмем для этого покоящийся в K°-системе угольник с плечами ℓ°_x и ℓ°_y, который испытывает действие двух сил F°_y и F°_x, приложенных соответственно к первому и второму плечам. Будем считать, что угольник находится в равновесии в собственной системе отсчета K°, т.е. крутящий момент

$$N^\circ_{xy} = \ell^\circ_x F^\circ_y - \ell^\circ_y F^\circ_x = 0. \qquad /2.1/$$

В K-системе, относительно которой угольник движется, на основании формул преобразования для компонент силы F_i и, в частности, с учетом формулы лоренцева сокращения

$$\ell^L_x = \ell^\circ_x \gamma^{-1} \qquad /2.2/$$

будем иметь

$$N_{xy} = \ell^L_x F_y - \ell_y F_x = (\ell^\circ_x \gamma^{-1}) F^\circ_y - \ell^\circ_y (F^\circ_x \gamma) = \qquad /2.3/$$
$$= -\beta^2 \ell^\circ_x F^\circ_y \gamma \neq 0\,.$$

---

* При условии, что $\vec{v}^\circ \neq 0$, а силы направлены под произвольными углами по отношению к своим плечам.

Последний результат указывает на появление крутящего момента при переходе к К-системе, что, очевидно, находится в противоречии с принципом относительности.

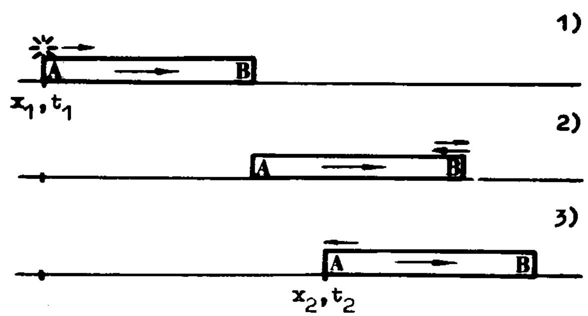
Здесь следует сразу подчеркнуть, что отмеченная трудность непосредственным образом связана с определением величины ℓ, входящей наряду с F_i в выражение для тензора N_{ik} вращательного момента, т.е. с важнейшим вопросом определения понятия длины в специальной теории относительности.

2.2а. Сначала коснемся в этой связи определения релятивистской длины, которое не приводит к отмеченному парадоксу. Указанное определение [7,8] базируется на измерительной процедуре с непосредственным использованием часов и световых сигналов и является аналогом радиолокационного метода измерения расстояний.

В этом случае, чтобы измерить длину некоторого покоящегося стержня AB, наблюдатель, находящийся около одного из его концов /например, A/, посылает в момент времени t_1° луч света. Свет отражается от другого конца B стержня* и возвращается назад в A в момент времени t_2°. /Здесь t_1° и t_2° измеряются по одним и тем же часам/. При этом длина данного покоящегося стержня будет определяться величиной

$$\ell_x^\circ = c(t_2^\circ - t_1^\circ)/2 = c\Delta t^\circ/2. \qquad /2.4/$$

С точки зрения некоторой другой системы отсчета К, относительно которой данный стержень движется вдоль оси OX, наш мысленный опыт будет выглядеть так, как это показано на *рисунке*. Отметим при этом, что



* Скажем, от укрепленного там зеркала.

момент посылки светового сигнала t_1 /соответствующий t_1°/ и момент его возвращения t_2 /соответствующий t_2°/ измеряются по двум разным часам К-системы, синхронизированным обычным способом и отстоящим друг от друга на расстояние $\Delta x = x_2 - x_1 = 2\ell_x^\circ \beta\gamma$.

На основании принципа относительности совокупность физических событий, служащих для определения некоторого физического понятия /в данном случае - длины/ в одной инерциальной системе отсчета, должна иметь эквивалентный смысл и для любой другой инерциальной системы отсчета. Поэтому будем определять длину данного стержня в К-системе, где он движется в соответствии с /2.4/, следующим выражением:

$$\ell_x = c(t_2 - t_1)/2 = c\Delta t/2. \qquad /2.5/$$

Подчеркнем, что введенное таким образом определение понятия релятивистской длины действительно не выделяет какие-либо системы отсчета перед другими, поскольку наблюдатели различных систем могут пользоваться одним и тем же световым сигналом для измерения длины данного стержня.

Привлекая далее формулу релятивистского замедления времени, найдем

$$\ell_x = \ell_x^\circ \gamma. \qquad /2.6/$$

А это означает, что предложенная процедура измерения длины свидетельствует в пользу удлинения, а не сокращения продольных размеров быстродвижущихся тел.

Отметим, что введенная таким образом величина ℓ_x на языке четырехмерного представления будет соответствовать нормальному сечению мировой полосы стержня.

2.2б. Подставив в выражение /2.3/ формулу /2.6/ вместо /2.2/, получим:

$$N_{xy} = (\ell_x^\circ\gamma)F_y^\circ - \ell_y^\circ(F_x^\circ\gamma) = 0, \qquad /2.7/$$

т.е. как того и требует логика вещей, рычаг будет находиться в равновесии и с точки зрения К-системы.

Подчеркнем, что вообще релятивистское условие равновесия системы, находящейся под действием момента сил, должно определяться уравнением

$$N_{ik} = \ell_i F_k - \ell_k F_i = 0, \qquad /2.8/$$

описывающим вместе с тем релятивистские законы сохранения углового момента и движения центра тяжести.

Уравнение /2.8/ наряду с уравнением

$$F_i = 0, \qquad /2.9/$$

описывающим релятивистские законы сохранения импульса и энергии, полностью определяют состояние равновесия в релятивистской статике.

2.2в. В связи с результатами п. 2.2а,следует отметить, что подход, в котором используется измененная формула преобразования для длины, обсуждался в ряде работ/3,4, 9, 10/, особенно в рамках так называемой асинхронной формулировки/11-13, 5/*.

Среди указанных работ необходимо особо выделить работу/10/, в которой, в частности, критикуется общепринятая процедура вычисления энергии и импульса

*Упомянем также работу/14/, в которой анализируются различные возможности определения длины, соответствующие различным выборам пространственно-подобных поверхностей, и делается вывод, что нельзя предпочесть какую-либо поверхность перед другими. В то же время в работе отмечается, что при вычислении импульса электромагнитного поля заряда во всех случаях, кроме интегрирования по поверхностям, ортогональным мировым линиям, импульс покоящегося заряда оказывается отличным от нуля /в этой связи см. также/15/, где указывается, что отмеченный факт уже по сути дела однозначно определяет выбор поверхности интегрирования, а следовательно, и выбор определения длины/.

Вместе с тем мы хотим подчеркнуть, что, поскольку длина стержня определяется пространственно-подобным вектором, то в одной из систем отсчета временная компонента данного вектора должна обращаться в нуль. Поэтому уже из соображений рациональности следует выбирать определение длины так, чтобы указанная система совпадала с системой покоя стержня.

электромагнитного поля заряда в различных системах отсчета S и S', связанная с интегрированием по пространственным объемам при $t=\mathrm{const}$ и $t'=\mathrm{const}$,соответственно. Поскольку таким образом интегрирование производится по разным гиперповерхностям, то результаты вычислений должны относиться к различным совокупностям физических величин /событий/. Это замечание автор, естественно, относит и к общепринятому определению длины.

Хотя данное утверждение само по себе правильно, его нельзя считать полностью обоснованным. Ниже мы отчасти поясним сказанное, но прежде коснемся следующего вопроса.

Почему рассмотренное выше /п. 2.2а/ определение релятивистской длины, дающее простое и естественное решение целого ряда существующих парадоксов, все еще не может занять место общеизвестного определения, связанного с лоренцевым сокращением движущегося масштаба?

Оставляя в стороне исторический аспект рассматриваемой проблемы, такое положение, по нашему мнению, следует прежде всего связывать с тем, что общепринятое определение основывается на конкретной эйнштейновской процедуре измерения длины движущегося стержня/16/, согласно которой, в частности, необходимо произвести засечки одновременного положения концов данного /движущегося/ стержня. Что же касается цитированных выше работ/3-5, 9-13/, где используется измененная формула преобразования для длины, то в них процедура измерения величин, входящих в упомянутую формулу, вообще не обсуждается/за исключением/12/ /.

Но в рамках любой последовательной физической теории некоторую величину можно считать определенной, если только указан конкретный рецепт ее связи с физическими объектами, т.е. конкретные операции, с помощью которых измеряется данная величина. Рассмотренная в п.2.2а процедура измерения длины,основанная на непосредственном использовании часов и световых сигналов, как раз дает такой рецепт для определения величин ℓ_x° и ℓ_x. Только после этого "формула удлинения" /2.4/ приобретает физический смысл.

Что же касается выбора между двумя рассмотренными определениями длины, то мы оставляем в стороне сказанное, например, в подстрочном примечании на стр. 10, *а проанализируем оба указанных определения с точки зрения принципа относительности.

Согласно этому принципу, комплекс физических событий, служащих для определения некоторой величины /в данном случае - длины/ в одной системе отсчета, должен служить для определения указанной величины и с точки зрения любой другой системы отсчета. Этому требованию удовлетворяют физические события - процессы регистрации отправки и возвращения светового сигнала. В то же время процессы засечки одновременного в некоторой системе отсчета положения концов измеряемого стержня этому требованию не удовлетворяют, поскольку во всех других системах отсчета эти события будут не одновременны , а следовательно не смогут служить для измерения длины данного стержня наблюдателям других систем отсчета.

На языке четырехмерного представления рассмотренное в п. 2.2а определение релятивистской длины соответствует измерениям на поверхности, ортогональной мировой полосе стержня, тогда как в рамках общепринятого определения выбор указанной поверхности обусловлен системой отсчета. Именно поэтому из двух данных определений лишь первое удовлетворяет принципу относительности, поскольку зависит только от элементов мировой полосы стержня. В то же время общепринятое определение, зависящее от выбора системы отсчета, этому принципу не удовлетворяет.

---

* Или тот факт, что в случае использования общепринятого определения, например, для обеспечения равновесия движущегося прямоугольного рычага /п.2.1/ необходимо привлекать гипотезу (ad hoc) импульса потока упругой энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.А.Матвеев. Сб. "Некоторые вопросы физики космоса", М., 1974, стр. 194.*
2. *К.Мёллер. Теория относительности. М., Атомиздат, 1975, стр. 83.*
3. *H.Arzeliès. Nuovo Cim., 35, 783, 1965.*
4. *J.W.Butler. Amer. J.Phys., 38, 360, 1970.*
5. *Ø.Grøn. Nuovo Cim., 17B, 141, 1973; Lett. Nuovo Cim., 13, 441, 1975.*
6. *G.N.Lewis, R.C.Tolman. Phil.Mag., 18, 510, 1909.*
7. *В.Н.Стрельцов. Препринт ОИЯИ, Р2-3482, Дубна, 1967; Сообщ. ОИЯИ, Р2-5555, п. II и Р2-5626, п. 2.1, Дубна, 1971.*
8. *V.N.Strel'tsov. Preprint JINR, E2-7805, Dubna, 1974.*
9. *F.Rohrlich. Nuovo Cim., 45B, 76, 1966.*
10. *A.Gamba. Amer. J.Phys., 35, 83, 1967.*
11. *G.Cavalleri, G.Salgarelli. Nuovo Cim., 62A, 722, 1969.*
12. *S.Pahor, J.Strnad. Nuovo Cim., 20B, 105, 1974.*
13. *G.Cavalleri, G.Spavieri, G.Spinelli. Nuovo Cim., 25B, 348, 1975.*
14. *И.В.Полубаринов. Сообщ. ОИЯИ, Р2-7532, Дубна, 1973.*
15. *В.Н.Стрельцов. Сообщ. ОИЯИ, Р2-7435, Дубна, 1973.*
16. *А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М., Наука, 1965, т. I, стр. 7.*

*Рукопись поступила в издательский отдел
30 января 1976 года.*