ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

95-83

Р2-95-83

С.Н.Алексеев, Н.С.Шавохина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ ЛОБАЧЕВСКОГО ДЛЯ ВИДИМОГО МИРА ПО ДВИЖЕНИЮ ПЛАНЕТ И ФОТОНОВ

Направлено в журнал «Известия ВУЗов. Физика»

1995

В работах Н.А.Черникова [1-4] было показано, что псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля в общей теории относительности Эйнштейна становится тензором, если ввести дополнительную аффинную связность, называемую фоновой. Благодаря этому теория становится полностью ковариантной. Здесь мы рассмотрим движение планет и фотонов в поле Солнца в случае, когда фоновая связность задаётся геометрией Лобачевского. Движение указанных пробных частиц происходит там, где тензор энергии-импульса материи равен нулю.

В этой области уравнение Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} = 0 \qquad (1)$$

в теории тяготения с непримитивной фоновой связностью $\check{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$. заменяется на уравнение

$$R_{\alpha\beta} = \check{R}_{\alpha\beta}\ , \qquad (2)$$

где $R_{\alpha\beta}$ - тензор Риччи для полевого метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, а $\check{R}_{\alpha\beta}$ - тензор Риччи для фоновой связности $\check{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$. В нашем случае фоновая связность совпадает с символами Кристоффеля для метрики

$$d\,\rho^2 + k^2\, sh^2\, \frac{\rho}{k}\, d\,\Omega^2 - c^2\, d\,t^2\ , \qquad (3)$$

где

$$d\,\Omega^2 = d\,\theta^2 + sin^2\,\theta\, d\,\varphi^2\ . \qquad (4)$$

В (3) и (4) ρ, θ, φ - сферические координаты, k - постоянная Лобачевского для видимого мира, c - постоянная Лобачевского для пространства скоростей, равная скорости света. В (3) входит метрика

$$d\,\rho^2 + k^2\, sh^2 \frac{\rho}{k}\, d\,\Omega^2 \tag{5}$$

пространства Лобачевского. Отметим, что фоновая связность $\check{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$ и тензор Риччи $\check{R}_{\alpha\beta}$ не зависят от скорости света c и определяются только метрикой (5).

Сферически-симметричное решение уравнений (2) в рассматриваемом здесь случае имеет следующий вид:

$$g_{\alpha\beta}\, d\, x^{\alpha}\, d\, x^{\beta} = F^2\, d\,\rho^2 + H^2\, d\,\Omega^2 - V^2\, d\, t^2\,, \tag{6}$$

где функции F, H, V зависят только от радиальной координаты ρ, причём

$$\begin{gathered} F\, V = c\,, \quad F^2 = e^{-2\alpha} \frac{sh\,(\xi + \alpha)}{sh\,(\xi - \alpha)}\,, \quad \xi = \frac{\rho}{k}\,, \\ H = k\, e^{-\alpha}\, sh\,(\xi + \alpha)\,, \quad \frac{1}{2}\, sh\, 2\,\alpha = \frac{\gamma\, M}{k\, c^2}\,. \end{gathered} \tag{7}$$

Величина

$$\rho_0 = \gamma\, M\, c^{\;2} \tag{8}$$

совпадает с радиусом Шварцшильда для центрального тела массы M. В данном случае M – масса Солнца. Решение (6) – (7) было получено Н.А.Черниковым [5] – [6]. Поэтому четырёхмерный мир с метрикой (6) – (7) мы называем миром Черникова.

Мир Черникова является аналогом мира Шварцшильда. Вдали от центрального тела метрика Черникова переходит в метрику (3).

Движение пробных тел в теории тяготения с фоновой связностью происходит по геодезическим четырёхмерного мира с метрикой $g_{\alpha\beta}\; d\, x^{\alpha}\; d\, x^{\beta}$. Уравнения геодезических в мире Черникова исследовались в работах [6], [7], [8]. В них показано, что уравнение траектории пробных тел в поле Солнца можно привести к виду

$$\left(\frac{d\,u}{d\,\varphi}\right)^2 = \{A_0 + A_1\, u + A_2\, u^2 + A_3\, u^3 + A_4\, u^4\}\; sh^4\, \alpha\,, \tag{9}$$

где

$$u = k\; cth\, \frac{\rho}{k}\,. \tag{10}$$

Коэффициенты A для планет равны

$$\begin{aligned} A_0 &= (\varepsilon^2\, Q^2 - 1)\; c^2\, Q^2\, \mu^{-2} + k^{-2} - k^2\, \beta^2\,, \\ A_1 &= 2\,(2\,\varepsilon^2\, Q^2 - 1)\; c^2\, Q^2\, \mu^{-2}\, \beta\,, \\ A_2 &= -1 + 6\,\varepsilon^2\, Q^{-4}\, \mu^{-2}\, c^2\, \beta^2 + k^{-4}\, \beta^4\,, \\ A_3 &= 2\,(2\,\varepsilon^2\, Q^2 + 1)\; c^2\, Q^2\, \mu^{-2}\, \beta^3\,, \\ A_4 &= (\varepsilon^2\, Q^2 + 1)\; c^2\, Q^2\, \mu^{-2}\, \beta^3\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь и далее

$$Q = e^{-\alpha}\,, \qquad \beta = k\; th\, \alpha\,, \tag{12}$$

величина α определена в (7). Первые интегралы движения ε и μ имеют смысл удельной энергии и удельного момента планеты.

Для фотонов коэффициенты A равны

$$\begin{aligned} A_0 &= Q^4\, b^{-2} + k^{-2} - k^{-4}\, \beta^2\,, & A_1 &= 4\, Q^4\, b^{-2}\, \beta\,, \\ A_2 &= -1 + 6\, Q^4\, b^{-2}\, \beta^2\,, & A_3 &= 4\, Q^4\, b^{-2}\, \beta^3\,, \\ A_4 &= Q^4\, b^{-2}\, \beta^4 + \beta^2 + k^{-2}\, \beta^4\,, \end{aligned} \tag{13}$$

где b – прицельный параметр фотона, равный

$$b = \lim_{m \to 0} \frac{\mu}{\varepsilon\, c}\,. \tag{14}$$

Здесь m – масса пробного тела.

В пределе $k \to \infty$ отсюда получаются известные результаты для мира Шварцшильда [9].

Решение уравнения (9) сводится к эллиптическим функциям [10]. В тех же приближениях, что и в случае Шварцшильда [9], это уравнение решается в элементарных функциях. Приближённое решение имеет следующий вид:

$$u = \frac{1 + e\cos\nu\varphi}{p}\ , \qquad (15)$$

где фокальный параметр p, эксцентриситет e и частота ν равны

$$p = -2\ \frac{A_2}{A_1}\ ,\quad e = \sqrt{1 + 2p\ \frac{A_0}{A_1}}\ ,\quad \nu = ch^2\alpha\sqrt{-A_2}\ . \qquad (16)$$

В поле Солнца $A_2 < 0$. При $k \to \infty$ из (16) следуют значения p, e, ν для траекторий частиц в поле Шварцшильда, а именно: для планет –

$$p \to p_0 = \frac{\mu^2}{\gamma M}\ ,\ e \to \sqrt{1 + (\varepsilon - 1)\frac{p_0}{\rho_0}}\ ,\ \nu \to = 1 - 3\ \frac{\rho_0}{p_0}\ , \qquad (17)$$

для фотонов –

$$p \to p_0 = \frac{b^2}{2\rho_0}\ ,\ e \to e_0 = \frac{b}{2\rho_0},\quad \nu \to \nu_0 = 1\ . \qquad (18)$$

Итак, формулы (6),(7) дают модель солнечной системы, а формулы (15), (16) описывают траектории планет и фотонов в этой модели. Все эти формулы содержат постоянную Лобачевского k для видимого мира. С другой стороны, в астрономии хорошо изучены параметры планет [11] и получены экспериментальные данные по отклонению луча света, проходящего мимо Солнца [12]. Всё это позволяет оценить постоянную Лобачевского k .

Для планет солнечной системы $e < 0$ и значения ρ конечны. В (15) u равно (10). Поскольку $0 < th\ \frac{\rho}{k} < 1$ для всех значений угла φ , то из (15) следует, что

$$k > \frac{p}{1 + e\cos\nu\varphi}\ . \qquad (19)$$

Между фокальным параметром, большой полуосью и эксцентриситетом эллиптической траектории планеты существует следующая связь: $p = a(1 - e^2)$ [11]. Отсюда при $\nu\varphi = \pi$ для всех планет получаем

$$k > a(1 + e)\ . \qquad (20)$$

Для Плутона имеем [11] $a \sim 6\cdot10^9$ *км* и $e \sim 0{,}25$. Из (20) получаем следующую численную оценку для k:

$$k > 10^{10}\ \text{км}\ . \qquad (21)$$

Эта оценка величины k согласуется с оценкой, которую получил сам Лобачевский из данных по наблюдениям годичного параллакса звёзд. По оценке Лобачевского k не меньше расстояния от Солнца до ближайшей звезды, т. е. $k \geqslant 10^{14}$ *км*.

Фотон в рассматриваемой модели, как и в мире Шварцшильда, совершает инфинитное движение. В мире Шварцшильда траекторией луча света служит одна из ветвей гиперболы, в фокусе которой находится Солнце. Отклонение луча света 2δ определяется как меньший угол между асимптотами гиперболы [9]. Согласно формуле Эйнштейна (см., например, [9]) отклонение луча света равно

$$2\delta = 4\rho_0 / b = 1'',75 = 8{,}488\ 10^{-6}\ \text{рад}\ . \qquad (22)$$

Эта теоретическая величина отклонения хорошо согласуется с его экспериментальным значением $2\delta_0 \cong 1'',70$ [9], [12].

В мире Черникова траектории фотонов определяются формулами (15), (16), где A берутся из (13). Поскольку при $\rho \to \infty$ имеем $th\frac{\rho}{k} \to 1$, то из (15) получаем

$$k \cong \frac{p}{1 + e\cos\nu\varphi_\infty}\ , \qquad (23)$$

где $\varphi_\infty = \frac{\pi}{2} + \delta$. Пренебрегая в (16) и (13) величинами $o(\frac{1}{k})$ и учитывая, что $\cos\nu\varphi_\infty = -\sin\delta = -\delta + \delta^3/3!$, получаем

$$k \cong \frac{b^2}{2\rho_0 - b(\delta - \delta^3/3!)}\ .$$

Так как $2\rho_0 = b\,\delta$, то окончательно имеем

$$k \cong \frac{48\ b}{(2\ \delta)^3}\ . \qquad (24)$$

Прицельный параметр b полагают равным радиусу Солнца [9], [12], т. е. $b = 7\cdot 10^5$ *км*. Считаем, что отклонение луча определено из астрономических наблюдений и равно $2\delta = 1''{,}70$, тогда из (24) получаем

$$k \cong 10^{23}\ \text{км}\ . \qquad (25)$$

Первое наблюдение эффекта Эйнштейна отклонения луча света было произведено 29 мая 1919 года и дало результат $2\delta = 1''{,}65$, что находится в прекрасном согласии с теоретическими расчётами (22). Затем угол отклонения во время полных солнечных затмений измерялся неоднократно. Обработка данных наблюдений приводит к значению для 2δ, равному $1''{,}70$, а также позволяет сделать вывод, что отклонение не зависит от расстояния до звезды, откуда приходит луч [12].

В настоящее время стандартной моделью Вселенной считается однородная изотропная открытая космологическая модель Фридмана [13], пространственная часть которой имеет геометрию Лобачевского. Эту модель Фок называет [9] моделью Фридмана-Лобачевского. В этой модели метрика удовлетворяет уравнениям Эйнштейна и её можно записать в виде

$$- c^2\, d\, t^2 + \frac{a^2(t)}{k^2}\,[d\,\rho^2 + k^2\, sh^2\, \frac{\rho}{k}\,(d\,\theta^2 + sin^2\,\theta\, d\,\varphi^2)], \qquad (26)$$

где $a(t)$ – масштабный фактор. В настоящее время по астрономическим наблюденим $a \cong 10^{23}$ *км* [14], [16].

При определении постоянной k мы считали, что на пространственной бесконечности метрика мира Черникова имеет вид (3). И в (4), и в (26) время t является координатным глобальным временем. Чтобы совместить мир Черникова и мир Фридмана – Лобачевского, мы должны потребовать, чтобы в настоящий момент глобального времени на пространственной бесконечности их метрики совпадали. Это означает, что метрики (3) и (26) при $t = T$, где

T – возраст Вселенной, должны совпадать. Это сразу же даёт, что на данном этапе эволюции Вселенной имеем

$$a \cong k \cong 10^{23}\ \text{км}\ . \qquad (27)$$

Этот теоретический результат полностью согласуется с оценкой постоянной Лобачевского k (25), полученной на основе опытных данных.

Красное смещение в спектрах галактик, установленное Хабблом [15], даёт следующую линейную связь

$$v = H\, r \qquad (28)$$

между скоростью v удаления тел от наблюдателя и расстоянием r до наблюдаемого объекта, если рассматривать красное смещение как результат эффекта Допплера. Величина H в (28) называется постоянной Хаббла. В настоящее время она считается равной [16]

$$H = 75\ \text{км}\ /\ \text{с}\cdot\text{Мпс} = 3\cdot 10^{-18}\ \text{с}^{-1}. \qquad (29)$$

Как показал Фок [9], формула (28) справедлива как для малых, так и для больших в астрономическом смысле расстояний. Максимально достижимое расстояние r в настоящее время равно масштабному фактору a (27). Подставляя в (28) формулы (27) и (29), получаем

$$c = H\, k \qquad (30)$$

связь между двумя постоянными Лобачевского и постоянной Хаббла. В (30) k является постоянной Лобачевского для видимого мира, а скорость света c играет роль постоянной Лобачевского в пространстве скоростей. Подчеркнём, что формула (30) получена без привлечения новых гипотез и что её вывод существенно опирается на экспериментальные данные. Формуле (30) можно придать следующий смысл: в одной и той же системе координат максимальная скорость удаления тел c и максимальное расстояние, на которое они могут удалиться, связаны линейным законом Хаббла, поскольку в настоящее время максимальное расстояние удаления тел r равно $a \cong k$ и найдены объекты, для которых скорость удаления v сравнима со скоростью света c [16].

Создатель неевклидовой геометрии Лобачевский считал, что его геометрия может проявиться на больших астрономических расстояниях или в "тесной сфере молекулярных притяжений". Действительно, геометрия Лобачевского реализуется как в стандартной модели Вселенной, так и в релятивистской физике микромира. Характерная для геометрии Лобачевского постоянная в первом случае равна k, во втором равна c. Здесь мы получили связь между этими двумя физическими постоянными Лобачевского.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников Н.А. - ЭЧАЯ, т 18, вып. 5, 1987, с 1000.
2. Черников Н.А. - Сообщение ОИЯИ Р2-90-399, Дубна, 1990.
3. Chernikov N.A. - Acta Phys. Pol. B, 1992, v 23, №2, p 115.
4. Chernikov N.A. - Acta Phys. Pol. B, 1992, v 23, №12, p 1.
5. Черников Н.А. - Препринты ОИЯИ Р2-92-443, Р2-92-549, Дубна, 1992. Изв. ВУЗов, Математика, 1994, № 2, с. 254.
6. Черников Н.А. - ЭЧАЯ, т 23, вып. 5, 1992,с 1155.
7. Алексеев С.Н., Шавохина Н.С. - Сообщение ОИЯИ Р2-93-263, Дубна, 1993.
8. Алексеев С.Н., Шавохина Н.С. - Сообщение ОИЯИ Р2-93-276, Дубна, 1993.
9. Фок В.А. - Теория пространства времени и тяготения. М.: ГИФМЛ, 1961.
10. Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н. - Курс современного анализа. М.: ГТТИ, 1934.
11. Шаронов В.В. - Природа планет. М.: ГИФМЛ, 1958.
12. Михайлов А.А. - УФН, т LIX, вып. 1, 1956, с 51.
13. Friedman A7 - ZS. f. Phys. **10**, 377, 1922.
14. Гриб А.А., Мостепаненко В.М., Фролов В.М. - ТМФ, т 33, № 1, 1977, с 42.
15. Hubble E.P. - Proc. Nat. Acad., **15**, 168, 1929.
16. Зельдович Я.Б.,Новиков И.Д. - Строение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 февраля 1995 года.

Алексеев С.Н., Шавохина Н.С. Р2-95-83

Определение постоянной Лобачевского
для видимого мира по движению планет и фотонов

На основе экспериментальных данных получены численные оценки для постоянной Лобачевского *k* в рамках теории тяготения с фоновой связностью. Обсуждается связь между постоянной Хаббла и двумя постоянными Лобачевского: *k* — для видимого мира и *c* — для пространства скоростей.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова и Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1995

Перевод авторов

Alekseev S.N., Shavokhina N.S. P2-95-83

Estimation of the Lobachevsky Constant
for Visible World on the Basis of Planet and Photon Motion Data

On the basis of the experimental data the numerical quantity of the Lobachevsky constant *k* for visible world is obtained in the framework of the gravity theory with a background connection. A relation is established between the Hubble constant and two Lobachevsky constants *k* and *c*, the latter being the velocity of light. It plays the role of the Lobachevsky constant for the velocity space.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics and at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1995