ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-95-400

В.К.Мельников

О СУЩЕСТВОВАНИИ САМОПОДОБНЫХ СТРУКТУР В РЕЗОНАНСНОЙ ОБЛАСТИ

Направлено в труды Международной конференции
«Транспорт, хаос и физика плазмы», Марсель, 10–22 июля 1995 г.

1995

1 Введение

В настоящем сообщении речь идет о причинах возникновения самоподобных структур в гамильтоновых системах, близких к вполне интегрируемым. По существу, нами будет рассмотрен только случай систем с двумя степенями свободы, хотя рассматриваемая здесь конструкция допускает обобщение на некоторые другие случаи с большим числом степеней свободы.

В случае гамильтоновых систем с двумя степенями свободы решающую роль в возникновении самоподобных структур играют периодические решения с так называемым пороговым характером рождения. Это значит, что каждое из этих периодических решений отсутствует не только в невозмущенной системе, но и в возмущенной системе до тех пор, пока возмущение остается достаточно малым, и появляется только тогда, когда возмущение становится достаточно большим. Хорошо известные периодические решения, возникающие (при включении возмущения) из инвариантных торов с рациональной обмоткой и существующие при любом достаточно малом возмущении, играют при этом второстепенную роль.

С геометрической точки зрения мы сталкиваемся здесь с двумя типами периодических решений. Как будет ясно из последующего, периодические решения первого типа находятся вблизи от гомоклинических траекторий и заключены внутри своеобразных областей, образуемых пересечениями сепаратрисных поверхностей и называемых разными авторами долями, языками, хвостами и т.д. Периодические решения второго типа, хотя и могут находиться вблизи от гомоклинических траекторий, лежат вне вышеупомянутых областей.

Поскольку любое устойчивое периодическое решение эллиптического типа содержится внутри некоторого инвариантного тора, то на изоэнергетической поверхности $H = C$ можно найти сечение, в котором периодическому решению соответствует точка, а инвариантному тору будет соответствовать замкнутая кривая. Таким образом, каждому устойчивому периодическому решению эллиптического типа в некотором сечении изоэнергетической поверхности $H = C$ соответствует некая инвариантная относительно сдвига во времени область или, как иногда говорят, остров. Описываемая здесь самоподобная структура типа "острова вокруг островов" содержит инвариантные области бесконечного числа генераций и существует при некоторых, называемых критическими, значениях параметра ϵ, характеризующего величину возмущения. Множество E_γ критических значений параметра ϵ, принадлежащих интервалу $(0, \gamma)$, имеет мощность континуума при любом $\gamma > 0$. Структура этого множества в настоящее время неизвестна.

2 Вспомогательная система уравнений

В качестве исходного пункта для всех последующих рассмотрений мы используем систему Гамильтона

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{1}$$

с функцией Гамильтона $H = H(p, q, t, \omega, \epsilon)$, допускающей представление вида

$$H = H_0(p, q) + \epsilon H_1(p, q, \omega t, \omega, \epsilon) ,$$

где переменные p и q являются скалярами, а функция H_1 зависит периодически с некоторым периодом T_0 от произведения $\Theta = \omega t$. Мы будем предполагать, что при $\epsilon = 0$ поведение траекторий системы (1) в интересующей нас области изменения переменных p и q имеет вид, изображенный на рис.1. Это значит, что в точке s_0 функция H_0 имеет невырожденную седловую точку, а в точке e_0 функция H_0 имеет невырожденный локальный экстремум. Далее, точка e_0 при $\epsilon = 0$ окружена семейством замкнутых траекторий системы (1), которые отделены от других траекторий этой системы петлей сепаратрисы Γ_0, проходящей через седловую точку s_0. Наконец, о взаимном расположении траектории Γ_+, входящей в точку s_0, и траектории Γ_-, выходящей из этой точки, мы пока не делаем никаких предположений.

Однако мы предположим, что при достаточно малых $\epsilon \neq 0$ поведение решений системы (1) имеет структуру, характеризуемую следующими свойствами. Прежде всего требуем, чтобы возмущение H_1 являлось возмущением "общего положения". Это значит, что петля сепаратрисы Γ_0 при $\epsilon \neq 0$ расщепляется на устойчивую Γ_0^s и неустойчивую Γ_0^u сепаратрисные поверхности, образуемые решениями системы (1), асимптотически стремящимися при $t \to \infty$ и при $t \to -\infty$ к периодическому решению s_ϵ гиперболического типа, рождающемуся из гиперболической точки s_0 при достаточно малых $\epsilon \neq 0$. Далее, возникающие при $\epsilon \neq 0$ из кривых Γ_+ и Γ_- устойчивая $\Gamma_+(\epsilon)$ и неустойчивая $\Gamma_-(\epsilon)$ сепаратрисные поверхности пересекаются при всех достаточно малых $\epsilon \neq 0$. При этом случай, когда поверхности $\Gamma_+(\epsilon)$ и $\Gamma_-(\epsilon)$ совпадают при всех или некоторых $\epsilon \neq 0$, нами не исключается.

Возьмем теперь порождаемое системой (1) отображение Пуанкаре T , т.е. сдвиг точек на плоскости p, q вдоль траекторий системы (1) за период времени $\Delta t = \frac{T_0}{\omega}$, и рассмотрим сечение фазового пространства (p, q, t) плоскостью $t = 0$. Тогда сечение плоскостью $t = 0$ описанной выше структуры имеет вид, изображенный на рис.2. Стрелками на этом рисунке указан сдвиг точек этого сечения при применении к ним отображения Пуанкаре T. Возьмем, далее, дугу $s_\epsilon \gamma_{-1} \gamma_0$ неустойчивой ветви сепаратрисы Γ_0^u и дугу $\gamma_0 \gamma_1 s_\epsilon$ устойчивой ветви сепаратрисы Γ_0^s и рассмотрим открытую область Δ_0, ограниченную этими дугами. С помощью области Δ_0 мы определим две области F_0 и G_0 посредством равенств:

$$F_0 = T(\Delta_0) \backslash \bar{\Delta}_0, \quad G_0 = \Delta_0 \backslash T(\bar{\Delta}_0) ,$$

где черта означает замыкание в топологическом смысле, а косая черта означает, что из первого множества выбрасываются все точки, принадлежащие второму множеству. Очевидно, что F_0 есть множество точек $\zeta \in T(\Delta_0)$, которые покинули область $\bar{\Delta}_0$, а G_0 есть множество точек $\eta \in \Delta_0$, которые оказались не покрытыми областью $T(\bar{\Delta}_0)$. Поскольку отображение Пуанкаре T сохраняет площадь, мера множеств F_0 и G_0 совпадает, т.е.

$$\text{mes } F_0 = \text{ mes } G_0 > 0 .$$

Положим теперь

$$F = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(F_0), \quad G = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(G_0),$$

$$\Omega = F \cup G, \quad \mathcal{F} = \bar{F}, \quad \mathcal{G} = \bar{G}\,.$$

В силу легко проверяемых равенств

$$\mathrm{mes}\ \left(F_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T^n(G_0)\right) = 0,$$

$$\mathrm{mes}\ \left(G_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(F_0)\right) = 0$$

нетрудно убедиться в справедливости равенства $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Множество $Z = \mathcal{F} = \mathcal{G}$ мы будем называть в дальнейшем сепаратрисной зоной. Очевидно, что $Z = \bar{\Omega}$.

3 Периодические решения параболического типа

В наших условиях сепаратрисную зону пересекает бесконечное число периодических решений системы (1) с пороговым характером рождения и разными периодами, являющимися целыми кратными величины $\frac{T_0}{\omega}$. Более точно, справедливо следующее утверждение, характеризующее некоторые основные свойства этих решений.

В случае "общего положения" существует бесконечная последовательность положительных величин $\epsilon_m > 0$, $m = 1, 2, \ldots$, $\epsilon_m \to 0$, если $m \to \infty$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. При $\epsilon = \epsilon_m$ гамильтонова система (1) имеет периодическое решение $p = p_m(t,\omega)$, $q = q_m(t,\omega)$ параболического типа с периодом $T_m = \frac{T_0}{\omega}\kappa_m$, где κ_m — целое число, $\kappa_m \to \infty$, если $m \to \infty$. Это периодическое решение при $t = 0$ пересекает определенную выше область Ω и не существует при любом $\epsilon \in (0, \epsilon_m)$. Периодические решения этого типа мы назовем периодическими решениями первой генерации.

2. В некоторой окрестности этого периодического решения существует сохраняющая площадь нелинейная замена переменных $(p,q) \to (u,v)$ вида

$$\begin{aligned} p &= p_m(t,\omega) + S_{11}^{(m)}(t,\omega)u + S_{12}^{(m)}(t,\omega)v + \ldots, \\ q &= q_m(t,\omega) + S_{21}^{(m)}(t,\omega)u + S_{22}^{(m)}(t,\omega)v + \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

такая, что в новых переменных исходная система Гамильтониана (1) имеет вид

$$\dot{u} = -\frac{\partial H^{(m)}}{\partial v}, \quad \dot{v} = \frac{\partial H^{(m)}}{\partial u} \tag{3}$$

с функцией Гамильтона $H^{(m)}$ вида

$$\begin{aligned} H^{(m)} = -\frac{c_m}{2}v^2 + \frac{1}{6}(f_m u^3 + 3g_m u^2 v + 3h_m u v^2 + \\ + k_m v^3) + \hat{H}^{(m)} + (\epsilon - \epsilon_m)(r_m u + s_m v + \hat{h}^{(m)})\,, \end{aligned} \tag{4}$$

где функция $\hat{H}^{(m)}$ не содержит членов ниже четвертого порядка по u и v, а функция $\hat{h}^{(m)}$ не содержит членов ниже второго порядка по этим же переменным, т.е.

$$\hat{H}^{(m)} \sim O((|u| + |v|)^4), \quad \hat{h}^{(m)} \sim O((|u| + |v|)^2)\,,$$

величины $c_m, f_m, g_m, h_m, k_m, r_m$ и s_m не зависят от времени t, а замена переменных (2) является периодической по времени t с тем же самым периодом $T_m = \frac{T_0}{\omega}\kappa_m$. Точками в равенствах (2) обозначены нелинейные по u и v члены.

Это утверждение нуждается в нескольких пояснениях. Прежде всего, гарантируемые теоремой Биркгофа [1] периодические решения, которые при $t = 0$ пересекают окрестность гомоклинической точки, не подходят для нашей цели, поскольку каждое из этих решений, по–видимому, возникает из замкнутой кривой невозмущенной системы (1) и существует при всех значениях параметра ϵ, принадлежащих некоторой окрестности точки $\epsilon = 0$. Каждое из этих решений принадлежит, по–видимому, к гиперболическому или эллиптическому типу и возможность получения из этих решений периодических решений параболического типа представляется в настоящее время довольно туманной. И, наконец, ни одно их этих периодических решений ни при каких значениях времени t не попадает в пучок траекторий, выходящих при $t=0$ из определенной выше области Ω.

Доказательство существования интересующих нас периодических решений параболического типа базируется на структуре пересечений множеств F_0 и $F_n = T^n(F_0)$ или G_0 и $G_{-n} = T^{-n}(G_0)$ при достаточно больших значениях целого числа n. Возникающая здесь конструкция напоминает по структуре подковы Смейла [2], хотя и является значительно более сложной. Поскольку наименьшие целые числа $m_0 > 0$ и $n_0 > 0$, для которых пересечения $F_0 \cap F_{m_0}$ и $G_0 \cap G_{-n_0}$ не пусты, зависят от ϵ и удовлетворяют условию $m_0 \to \infty$, $n_0 \to \infty$, если $\epsilon \to 0$, то любое из получаемых таким образом периодических решений может существовать только при значениях параметра ϵ, превышающих некоторое пороговое значение. Наконец, согласно хорошо известной теореме Пуанкаре периодическое решение может появиться или исчезнуть только в случае, когда собственные значения соответствующей матрицы монодромии равны плюс единице, т.е. периодическое решение в момент появления или исчезновения обязано принадлежать к параболическому типу.

Мы предположим теперь снова, что рассматриваемая нами исходная система (1) находится в "общем положении" в том смысле, что входящие в функцию Гамильтона $H^{(m)}$ вида (4) величины c_m, f_m и r_m отличны от нуля, т.е.

$$c_m \neq 0,\; f_m \neq 0,\; r_m \neq 0, \quad m = 1, 2, \ldots$$

В этом случае масштабное преобразование вида

$$u = \mu^2 \left(\frac{c_m}{f_m}\right)^{1/3} x, \quad v = \mu^3 y\,,$$

$$\epsilon = \epsilon_m - \frac{\mu^4}{r_m}(c_m^2 f_m)^{1/3}\,, \tag{5}$$

определяющее переход от старых пространственных переменных u, v к новым пространственным переменным x, y и от старого малого параметра ϵ к новому малому параметру μ, преобразует исходную гамильтонову систему (3) в систему вида

$$\dot{x} = -\mu(c_m^2 f_m)^{1/3}\frac{\partial K^{(m)}}{\partial y}, \quad \dot{y} = \mu(c_m^2 f_m)^{1/3}\frac{\partial K^{(m)}}{\partial x}$$

с функцией $K^{(m)}$ вида

$$K^{(m)} = K_0(x, y) + \mu K_1^{(m)}(x, y, \omega t, \omega, \mu),$$

где K_0 не зависит от индекса m и имеет стандартный вид

$$K_0 = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}x^3 - x\,, \tag{6}$$

а $K_1^{(m)}$ зависит периодически от величины $\Theta = \omega t$ с периодом $\tau_m = T_0 \kappa_m$. Далее, совершим масштабное преобразование времени

$$t \to \mu(c_m^2 f_m)^{1/3} t\,. \tag{7}$$

В результате наша исходная гамильтонова система (1) примет свой окончательный вид

$$\dot{x} = -\frac{\partial \hat{K}^{(m)}}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial \hat{K}^{(m)}}{\partial x} \tag{8}$$

с функцией Гамильтона $\hat{K}^{(m)}$ вида

$$\hat{K}^{(m)} = K_0(x, y) + \mu K_1^{(m)}(x, y, \omega' t, \omega, \mu)\,, \tag{9}$$

где

$$\omega' = \frac{\omega}{\mu(c_m^2 f_m)^{1/3}}$$

4 Критические значения параметра ϵ и соответствующая им самоподобная структура

В случае "общего положения" полученная система Гамильтона (8) обладает теми же самыми свойствами, что и исходная система (1). Это значит, что в случае "общего положения" существующая у полученной нами системы (8) при $\mu = 0$ петля сепаратрисы, аналогичная петле Γ_0 у исходной системы (1) при $\epsilon = 0$, при всех достаточно малых $\mu \neq 0$ расщепляется на устойчивую и неустойчивую сепаратрисные поверхности, обладающие всеми указанными ранее свойствами.

Однако существующие у системы (8) при $\mu = 0$ аналогичные Γ_+ и Γ_- асимптотические траектории при всех достаточно малых $\mu \neq 0$ порождают аналогичные $\Gamma_+(\epsilon)$ и $\Gamma_-(\epsilon)$ устойчивую и неустойчивую сепаратрисные поверхности и факт их пересечения (или совпадения) может быть строго доказан без каких–нибудь дополнительных предположений.

На основе сказанного выше для любого $m = 1, 2, ...$ существует бесконечная последовательность положительных величин $\mu_{m,n} > 0$, $n = 1, 2, ...$, $\mu_{m,n} \to 0$, если $n \to \infty$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. При $\mu = \mu_{m,n}$ гамильтонова система (8) имеет периодическое по времени $t' = \mu(c_m^2 f_m)^{1/3} t$ решение $x = x_{m,n}(t', \omega')$, $y = y_{m,n}(t', \omega')$ параболического типа с периодом $T_{m,n} = \frac{T_0}{\omega'} \kappa_m \kappa_n'$, где κ_n' — целое число, $\kappa_n' \to \infty$, если $n \to \infty$. Это периодическое решение при $t' = 0$ пересекает аналогичную области Ω область Ω_m, входящую в сепаратрисную зону Z_m новой гамильтоновой системы. Это периодическое решение не существует при любом $\mu \in (0, \mu_{m,n})$. Все эти периодические решения мы назовем периодическими решениями второй генерации.

2. В некоторой окрестности этого периодического решения существует аналогичная (2) сохраняющая площадь нелинейная замена переменных такая, что в новых переменных полученная в результате замены система Гамильтона обладает функцией Гамильтона, которая имеет аналогичную (4) структуру. Более того, совершив после этого аналогичную (5) и (7) замену пространственных переменных, времени и малого параметра $\mu \to \nu$, мы в результате получим аналогичную (8) систему Гамильтона с аналогичной (9) функцией Гамильтона. При этом в случае "общего положения" невозмущенная часть полученной функции Гамильтона имеет стандартный вид (6).

Таким образом, мы нашли процедуру, позволяющую получить бесконечную последовательность гамильтоновых систем различных генераций. Согласно KAM-теории [3,4] исходная гамильтонова система (1) при любом $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$, $\epsilon^* > 0$, имеет инвариантные торы, получающиеся из замкнутых траекторий системы (1) с $\epsilon = 0$. На следующем шагу мы получаем новую гамильтонову систему (8), имеющую инвариантные торы при всех $\mu \in (0, \mu_m^*)$, где $\mu_m^* > 0$. Это значит, что исходная гамильтонова система (1) имеет инвариантные торы, расположенные вблизи от периодического решения $p = p_m(t, \omega)$, $q = q_m(t, \omega)$, при всех

$\epsilon \in (\epsilon_m, \epsilon_m^*)$, где

$$\epsilon_m^* = \epsilon_m - \frac{(\mu_m^*)^4}{r_m}(c_m^2 f_m)^{1/3} > \epsilon_m .$$

Более того, новая гамильтонова система (8) имеет инвариантные торы, расположенные вблизи от периодического решения $x = x_{m,n}(t', \omega')$, $y = y_{m,n}(t', \omega')$ второй генерации, при всех $\nu \in (0, \nu_{m,n}^*)$, где ν — новый малый параметр, а $\nu_{m,n}^* > 0$, т.е. при всех $\mu \in (\mu_{m,n}, \mu_{m,n}^*)$, где $0 < \mu_{m,n} < \mu_{m,n}^*$. Следовательно, наша исходная гамильтонова система (1) имеет инвариантные торы, лежащие вблизи от произвольно взятого периодического решения второй генерации при значениях параметра ϵ, принадлежащих соответствующим образом выбранному интервалу вида $(\epsilon_{m,n}, \epsilon_{m,n}^*)$, где $0 < \epsilon_{m,n} < \epsilon_{m,n}^*$. Мы можем повторить эту процедуру бесконечно много раз. В результате мы получим две бесконечные последовательности положительных величин $\epsilon_{m_1,...,m_n}$ и $\epsilon_{m_1,...,m_n}^*$, $n = 1, 2, ...$, со следующими свойствами:

1. Для любой системы положительных целых чисел $m_1, ..., m_n$ справедливо неравенство $0 < \epsilon_{m_1,...,m_n} < \epsilon_{m_1,...,m_n}^*$.

2. Для любой системы целых положительных чисел $m_1, ..., m_n$ имеем $\epsilon_{m_1,...,m_n,\ell} \to \epsilon_{m_1,...,m_n}$, если $\ell \to \infty$.

Положим теперь $\epsilon_{m_1}' = \epsilon_{m_1}^*$ и рассмотрим интервал $\delta_1 = (\epsilon_{m_1}, \epsilon_{m_1}')$. Величину ϵ_{m_1,m_2} мы назовем подходящей, если $\epsilon_{m_1,m_2} \in \delta_1$, т.е. $\epsilon_{m_1} < \epsilon_{m_1,m_2} < \epsilon_{m_1}'$. В силу второго свойства последовательности $\epsilon_{m_1,...,m_n}$ таких величин существует бесконечное множество. Пусть величина ϵ_{m_1,m_2}' удовлетворяет условию $\epsilon_{m_1,m_2} < \epsilon_{m_1,m_2}' < \min(\epsilon_{m_1}', \epsilon_{m_1,m_2}^*)$, и рассмотрим интервал δ_2 вида $\delta_2 = (\epsilon_{m_1,m_2}, \epsilon_{m_1,m_2}')$. Очевидно, что $\delta_2 \subset \delta_1$. Далее, величину ϵ_{m_1,m_2,m_3} мы назовем подходящей, если $\epsilon_{m_1,m_2,m_3} \in \delta_2$, т.е. $\epsilon_{m_1,m_2} < \epsilon_{m_1,m_2,m_3} < \epsilon_{m_1,m_2}'$, и возьмем величину ϵ_{m_1,m_2,m_3}' так, чтобы выполнялось неравенство $\epsilon_{m_1,m_2,m_3} < \epsilon_{m_1,m_2,m_3}' < \min(\epsilon_{m_1,m_2}', \epsilon_{m_1,m_2,m_3}^*)$. Возьмем, наконец, интервал δ_3 вида $\delta_3 = (\epsilon_{m_1,m_2,m_3}, \epsilon_{m_1,m_2,m_3}')$. Очевидно, что $\delta_3 \subset \delta_2$. Повторяя эту процедуру бесконечно много раз, мы получим новую бесконечную последовательность величин $\epsilon_{m_1}, \epsilon_{m_1,m_2}, ..., \epsilon_{m_1,m_2,...,m_n}, ...$, которая содержит только подходящие члены первоначальной последовательности и бесконечную последовательность вложенных друг в друга интервалов $\delta_1 \supset \delta_2 \supset ... \delta_n \supset ....$ Рассмотрим теперь предел вида

$$\epsilon_{m_1,...,m_n,...} = \lim_{n \to \infty} \epsilon_{m_1,...,m_n} .$$

Полученное таким образом значение $\epsilon = \epsilon_c$ параметра ϵ мы назовем критическим. В силу того что $\epsilon_c \in (\cap_{n=1}^{\infty}\delta_n)$ при $\epsilon = \epsilon_c$, наша исходная гамильтонова система (1) имеет инвариантные торы всех генераций. Сечение плоскостью $t = 0$ получившейся в результате картины изображено на рис. 3.

Возьмем теперь множество E_γ критических значений параметра ϵ, принадлежащих интервалу вида $(0,\gamma)$, где $\gamma > 0$. Из конструкции, примененной для нахождения критических значений параметра ϵ, непосредственно следует, что множество E_γ при любом $\gamma > 0$ имеет мощность континуума. Возможны следующие три ситуации:

1. Множество E_γ содержит некоторый интервал, заключенный внутри интервала $(0,\gamma)$.
2. Множество E_γ плотно в некотором интервале, лежащем внутри интервала $(0,\gamma)$.
3. Множество E_γ нигде не плотно в интервале $(0,\gamma)$.

В настоящее время неизвестно, какая из этих возможностей имеет место в действительности.

5 Существование самоподобной структуры в резонансной области

Рассмотрим теперь гамильтонову систему

$$\dot{I} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} \tag{10}$$

с функцией Гамильтона $\mathcal{H}$ вида

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(I) + \epsilon\mathcal{H}_1(I,\varphi) ,$$

где $I = (I_1, I_2)$ и $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, а функция $\mathcal{H}_1$ зависит периодически с периодом 2π от угловых переменных φ_1 и φ_2. Точка $I' = (I_1', I_2')$ определяет резонансную область системы (10), если найдутся целые числа m_1 и m_2 такие, что в точке $I = I'$ выполняются соотношения:

$$\operatorname{grad} \mathcal{H}_0 \neq 0, \quad m_2\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_1} - m_1\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_2} = 0 .$$

Предположим для определенности, что в некоторой окрестности резонансной точки I' справедливо неравенство $\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_2} \neq 0$. Тогда изоэнергетическая поверхность $\mathcal{H} = C$, проходящая через точку I', в некоторой окрестности этой точки может быть представлена в виде

$$I_2 + H(I_1, \varphi_1, \varphi_2, \epsilon) = 0 ,$$

а вытекающая из (10) система уравнений принимает вид

$$\frac{dI_1}{d\varphi_2} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_1}, \quad \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{\partial H}{\partial I_1} , \tag{11}$$

где функция H допускает представление

$$H = H_0(I_1) + \epsilon H_1(I_1, \varphi_1, \varphi_2, \epsilon) .$$

При этом в резонансной точке справедливо равенство $\frac{dH_0}{dI_1} = \frac{m_1}{m_2}$. Таким образом, система (11) в этом случае описывает разрушение инвариантного тора с рациональной обмоткой. Ныне хорошо известная картина была впервые описана в работе [5] и имеет вид, изображенный на рис. 4.

Изложенные выше результаты с незначительными изменениями могут быть применены для построения самоподобной структуры в сепаратрисной зоне, образованной благодаря расщеплению сепаратрисных поверхностей, лежащих в резонансной области. Следует отметить, что в том случае, если мы возьмем две произвольные резонансные области описанной выше структуры, то либо сепаратрисные поверхности одной резонансной области пересекаются с сепаратрисными поверхностями другой резонансной области, либо между этими резонансными областями имеется инвариантная поверхность, отделяющая одну резонансную область от другой. Таким образом, в случае пересечения сепаратрисных поверхностей одной резонансной области с сепаратрисными поверхностями другой резонансной области решения из одной резонансной области могут со временем попадать в другую резонансную область и обратно. Однако это не обязательно приводит к образованию стохастического слоя, поскольку возникающие здесь самоподобные структуры препятствуют образованию стохастического слоя.

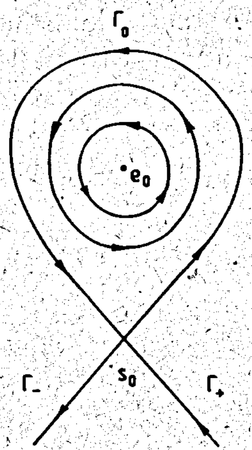

Рис.1

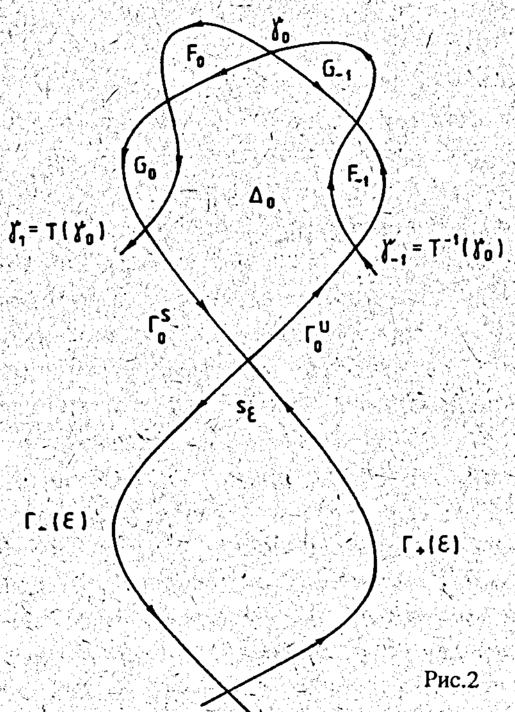

Рис.2

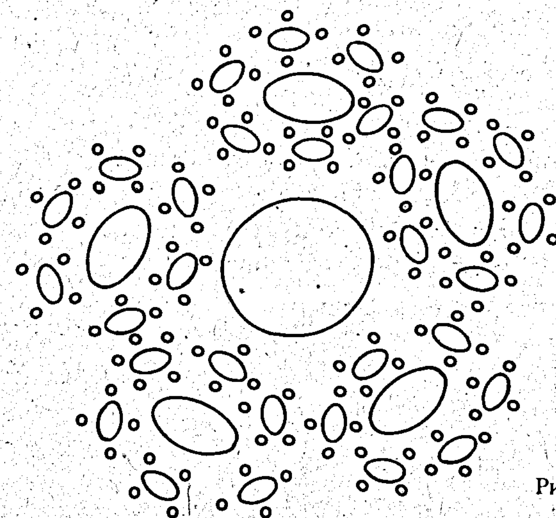

Рис.3

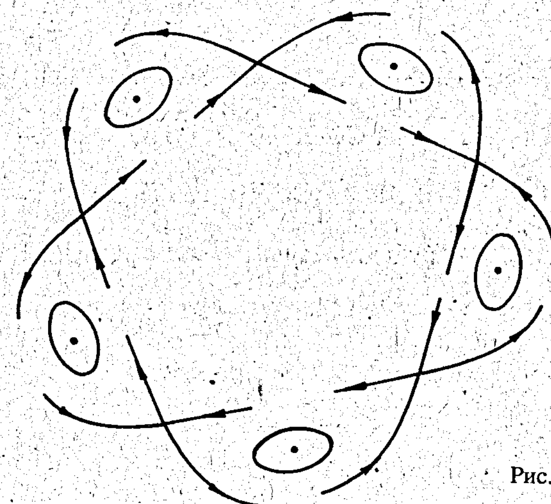

Рис.4

6 Заключение

В заключение нелишне отметить, что существенная часть результатов этой работы была получена еще в 1969 году, но по ряду причин работа не была завершена и опубликована. Приглашение весной прошлого года посетить Курантовский институт и выступить на семинаре с докладом стимулировало продолжение исследований в этой области. Пользуюсь случаем поблагодарить проф. G. Zaslavsky за приглашение и финансовую поддержку этого визита, а также проф. Y.Ichikawa и J.S.P.S. за финансовую поддержку.

Литература

[1] Birkhoff G.D. — Memoriae Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei, 1935, s.3, v.1, p.85.

[2] Smale S. — The Mathematics of Time, Springer–Verlag, 1980.

[3] Колмогоров А.Н. — ДАН СССР, 1954, т.98, N 4, с.527.

[4] Арнольд В.И. — УМН, 1963, т.XVIII, вып.5, с.13.

[5] Мельников В.К. — Труды Московск. матем. об–ва, 1963, т.12, с.3.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 сентября 1995 года.