ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-95-133

С.Н.Алексеев, Н.С.Шавохина

КВАНТОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ ТИПА БОРНА—ИНФЕЛЬДА, ИЛИ МЕМБРАН

Направлено в журнал «Известия вузов. Физика»

1995

1. *Поля типа Борна-Инфельда и гипермембраны.* В начале 30-х годов Борн [1], а затем Борн и Инфельд [2] ввели в рассмотрение нелинейные электромагнитные поля с характерной нелинейностью. В начале 60-х годов Черников и Барбашов [3], [4] исследовали нелинейное скалярное поле φ типа Борна – Инфельда, зависящее от двух переменных t и x, и показали, что если действие S поля φ выбрать в виде

$$S = \lambda \iint \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2} (\varphi_t)^2 + a^2 (\varphi_x)^2} \; d\, c\, t\, d\, x \,, \tag{1}$$

то поле подчиняется уравнению минимальных поверхностей

$$- \varphi_{tt} + c^2 \varphi_{xx} + a^2 [- (\varphi_x)^2 \varphi_{tt} + 2 \varphi_t \varphi_x \varphi_{tx} - (\varphi_t)^2 \varphi_{xx}] = 0 \tag{2}$$

в трёхмерном пространстве Минковского. Сама минимальная поверхность записывается в виде

$$y = a\, \varphi(t, x) \,. \tag{3}$$

В этих формулах a – размерная постоянная, подобранная так, чтобы величина $a\,\varphi$ имела размерность длины, λ – размерная постоянная, подобранная так, чтобы величина S имела размерность действия.

Действие S для нелинейного скалярного поля типа Борна-Инфельда φ, зависящего от переменных $x^1, \dots, x^n$, где $x^1 = ct$, имеет вид

$$S = \lambda \int \sqrt{1 - a^2 \eta^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta} \; d\, x^1 \dots d\, x^n \,. \tag{4}$$

Здесь $\varphi_\alpha = \partial_\alpha \varphi$, $\eta^{\alpha\beta}$ – кометрический тензор пространства Минковского M_n. Действие (4) пропорционально площади гиперповерхности [5]

$$x^{n+1} = a\, \varphi\, (x^1, \dots, x^n) \tag{5}$$

в пространстве Минковского M_{n+1} с метрикой

$$d\, s^2 = - (d\, x^1)^2 + (d\, x^2)^2 + \dots + (d\, x^n)^2 + (d\, x^{n+1})^2 \,. \tag{6}$$

Поверхность (5) можно интерпретировать как мировую поверхность $(n - 1)$ – мерной мембраны. Такую мембрану будем называть гипермембраной. Её движение задаётся уравнением минимальной гиперповерхности.

2. *Метод Черникова-Барбашова квантования полей типа Борна-Инфельда.* Минимальная поверхность (3) записывается в виде [4]

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(\xi,\ \tau)\ , \quad \mathbf{r} = \{ct,\ x,\ y\}\ . \tag{7}$$

Она удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{r}_{\xi\xi} - \mathbf{r}_{\tau\tau} = 0 \tag{8}$$

и нелинейным условиям

$$\mathbf{r}_{\alpha}^{2} = \mathbf{r}_{\beta}^{2} = 0\ , \quad \alpha = \xi - \tau,\quad \beta = \xi + \tau. \tag{9}$$

Уравнение (8) решается методом Даламбера и Фурье. Имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(\alpha) + \mathbf{r}_2(\beta)\ , \tag{10}$$

где

$$\mathbf{r}_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{d\,k}{\sqrt{2\,k}}\ [\mathbf{a}^+(k)\ e^{-ik\alpha} + \mathbf{a}^-(k)\ e^{ik\alpha}\ ]\ ,$$

$$\mathbf{r}_2(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{d\,k}{\sqrt{2\,k}}\ [\mathbf{a}^+(k)\ e^{ik\beta} + \mathbf{a}^-(k)\ e^{-ik\beta}\ ]\ . \tag{11}$$

Операторы $\mathbf{a}$ подчиняются коммутационным соотношениям

$$[a_t^-\,(k)\ a_t^+\,(m)] = -\,\delta(k - m)\ ,$$

$$[a_x^-\,(k)\ a_x^+\,(m)] = \delta(k - m)\ , \quad [a_y^-\,(k)\ a_y^+\,(m)] = \delta(k - m)\ . \tag{12}$$

Здесь a_t, a_x, a_y – компоненты вектора $\mathbf{a}$.

Аналогично условиям Лоренца в электродинамике [6], условия (9) выполняются в среднем для векторов физических состояний, то есть

$$<A'\,|\ :{r'_1}^2:\ |\ A> = 0\ ,\ <A'\,|\ :{r'_2}^2:\ |\ A> = 0\ . \tag{13}$$

Для фурье-образов имеем

$$<A'\,|\ :b_1(p):\ |\ A> = 0\ ,\ <A'\,|\ :b_2(p):\ |\ A> = 0\ , \tag{14}$$

где операторы b равны

$$b_1^+(p) = -\frac{1}{4}\int_0^p d\,q\,\sqrt{p^2 - q^2}\ \ \mathbf{a}^-\left(\frac{p - q}{2}\right)\mathbf{a}^-\left(\frac{p + q}{2}\right) + \frac{1}{4}\int_p^\infty d\,q\,\sqrt{q^2 - p^2}\ \ \mathbf{a}^+\left(\frac{q - p}{2}\right)\mathbf{a}^-\left(\frac{p + q}{2}\right)\ , \tag{15a}$$

$$b_2(p) = -\frac{1}{4}\int_0^p d\,q\,\sqrt{p^2 - q^2}\ \ \mathbf{a}^-\left(\frac{q - p}{2}\right)\mathbf{a}^-\left(-\frac{p + q}{2}\right) + \frac{1}{4}\int_p^\infty d\,q\,\sqrt{q^2 - p^2}\ \ \mathbf{a}^+\left(\frac{p - q}{2}\right)\mathbf{a}^-\left(-\frac{p + q}{2}\right)\ , \tag{15b}$$

$$b_1(-p) = b_1^+\,(p)\ , \quad b_2(-p) = b_2^+(p)\ . \tag{16}$$

Операторы b подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$[b_1(p)\ b_1(q)] = (p - q)\ b_1(p + q),$$

$$[b_2(p)\ b_2(q)] = (p - q)\ b_2(p + q), \tag{17}$$

$$[b_1(p)\ b_2(q)] = 0\ ,$$

задающим алгебру Ли.

3. *Обобщение метода Черникова – Барбашова.* Метод Черникова-Барбашова квантования минимальных двумерных поверхностей или струн при распространении его на минимальные поверхности более высоких размерностей, или мембран, требует обобщения. В качестве параметров на минимальной поверхности мы выбираем декартовы координаты объемлющего пространства Минковского. Координатная сетка на поверхности теперь не является ни ортогональной, ни изотропной, как этого требует метод Черникова-Барбашова. Квантование минимальных поверхностей в неортогональных координатах приводит к указанному в названии этого пункта обобщению. Результаты модифицированного метода квантования струны должны совпадать с результатами исходного метода, то есть с результатами второго пункта.

Изложим суть модифицированного метода Черникова-Барбашова. Имеем нелинейное скалярное поле $\varphi = \varphi(t,x)$. Ему соответствует минимальная поверхность (3). Дифференциальное уравнение (2), которому она удовлетворяет, разделим на две части: линейную –

$$-\,\varphi_{tt} + \varphi_{xx} \tag{18}$$

и нелинейную –

$$D(\varphi) = -\,(\varphi_x)^2\ \varphi_{tt} + 2\ \varphi_t\ \varphi_x\ \varphi_{tx} - (\varphi_t)^2\ \varphi_{xx}\ . \tag{19}$$

Приравниваем нулю линейную часть (18) и решаем её методом Фурье. Имеем

$$\varphi(t,\ x) = \tag{20}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\ k}{\sqrt{2\ \omega}} \ [a^+(k)\ e^{i(\omega t-kx)} + a^-(k)\ e^{-i(\omega t-kx)}] \ ,$$
где
$$-\ \omega^2 + k^2 = 0\ , \quad \omega > 0, \quad k = \pm\ \omega\ . \tag{21}$$
Считаем, что имеется линейное скалярное квантованное поле (20). Операторы a^+ и a^- подчиняются коммутационным соотношениям
$$[a^+(k)\ a^+(m)] = 0,\ [a^-(k)\ a^-(m)] = 0, \qquad [a^-(k)\ a^+(m)] = \delta(k - m). \tag{22}$$
Полагаем, что скорость света $c = 1$. Метрика M_3 имеет вид
$$d\ s^2 = -\ d\ t^2 + d\ x^2 + d\ y^2\ . \tag{23}$$
Метрика, индуцированная на поверхности (3), имеет вид
$$d\ \sigma^2 = -\ \ d\ t^2 + d\ x^2 + a^2\ (\varphi_t\ d\ t + \varphi_x\ d\ x)^2\ . \tag{24}$$
Квадрат нормы вектора $N(\omega,\ k)$, касательного к поверхности (3), равен
$$N^2 = -\ \ \omega^2 + k^2 + (\ \varphi_t\ \omega + \varphi_x\ k)^2\ . \tag{25}$$
Перепишем (20) в виде
$$\varphi(t,\ x) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{d\ k}{\sqrt{2\ k}} \ [a^+(k)\ e^{ik(t-x)} + a^-(k)\ e^{-ik(t-x)}] \ +$$
$$+ \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{d\ k}{\sqrt{2\ k}} \ [a^+(-k)\ e^{ik(t+x)} + a^-(-k)\ e^{-ik(t+x)}]\ . \tag{26}$$

Подставляя (26) в нелинейную часть (19), получаем
$$\sqrt{2\pi}\ \ D =$$
$$= \{ \int_0^{\infty} \frac{k^2\ d\ k}{\sqrt{2\ k}} \ [a^+(k)\ e^{ik(t-x)} + a^-(k)\ e^{-ik(t-x)}\ ]\ \}(\varphi_t + \varphi_x)^2$$
$$+ \{ \int_0^{\infty} \frac{k^2\ d\ k}{\sqrt{2\ k}} [a^+(-k)\ e^{ik(t+x)} + a^-(-k)\ e^{-ik(t+x)}\ ]\ \}(\varphi_t - \varphi_x)^2. \tag{27}$$
Далее считаем, что вектор $N(\omega,k)$ касается поверхности (3), является изотропным и по-прежнему удовлетворяет условиям (21). Перечисленные условия выполняются, если
$$(\varphi_t\ \omega + \varphi_x\ k)^2 = 0\ . \tag{28}$$
С учётом (21) это означает

$$(\varphi_t + \varphi_x)^2 = 0\ , \quad (\varphi_t - \varphi_x)^2 = 0\ . \tag{29}$$
На классическом уровне условия (29) дают только тривиальные решения. Поэтому, как и в пункте 2, будем считать, что дополнительные нелинейные условия удовлетворяются только в среднем для векторов физических состояний, а именно:
$$\langle\ A'\ |\ :(\varphi_t + \varphi_x)^2:\ |\ A\ \rangle = \langle\ A'\ |\ :(\varphi_t - \varphi_x)^2:\ |\ A\ \rangle = 0\ , \tag{30}$$
где двоеточие, как и в пункте 2 означает нормальное произведение операторов. При выполнении (30) нелинейная часть уравнения (2) также обращается в нуль в среднем для допустимых векторов физических состояний.

Операторы $(\varphi_t - \varphi_x)$ и $(\varphi_t + \varphi_x)$ равны

$$\varphi_t - \varphi_x = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\mu}\ d\ \mu\ [\ a^+(\mu)\ e^{i\mu(t-x)} - a^-(\mu)\ e^{-i\mu(t-x)}],$$
$$\varphi_t + \varphi_x = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\mu}\ d\ \mu\ [\ a^+(-\mu)\ e^{i\mu(t+x)} - a^-(\mu)\ e^{-i\mu(t+x)}]. \tag{31}$$

Операторы $(\varphi_t - \varphi_x)^2$ и $(\varphi_t + \varphi_x)^2$ запишутся в виде следующих двойных интегралов:
$$(\varphi_t - \varphi_x)^2 = -\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sqrt{\mu\ \nu}\ d\ \mu\ d\ \nu [a^+(\mu)\ a^+(\nu)\ e^{i(\mu+\nu)(t-x)} +$$
$$+\ a^-(\mu)\ a^-(\nu)\ e^{-i(\mu+\nu)(t-x)} - a^+(\mu)\ a^-(\nu)\ e^{i(\mu-\nu)(t-x)} -$$
$$-\ a^-(\mu)\ a^+(\nu)\ e^{-i(\mu-\nu)(t-x)}]\ ,$$
$$(\varphi_t + \varphi_x)^2 = -\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sqrt{\mu\ \nu}\ d\ \mu\ d\ \nu [a^+(-\mu)\ a^+(-\nu)\ e^{i(\mu+\nu)(t+x)} +$$
$$+\ a^-(-\mu)\ a^-(-\nu)\ e^{-i(\mu+\nu)(t+x)} - a^+(-\mu)\ a^-(-\nu)\ e^{i(\mu-\nu)(t+x)} -$$
$$-\ a^-(-\mu)\ a^+(-\nu)\ e^{-i(\mu-\nu)(t+x)}]\ , \tag{32}$$
С учётом равенства
$$a^-(\mu)\ a^+(\nu) = a^+(\nu)\ a^-(\mu) + \delta\ (\mu - \nu)$$
из (32) получаем

$$(\varphi_t - \varphi_x)^2 = :(\varphi_t - \varphi_x)^2: +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{\mu \nu}\ \delta(\mu - \nu)\ e^{-i(\mu-\nu)(t-x)}\ d\mu\, d\nu , \tag{33}$$

$$(\varphi_t + \varphi_x)^2 = :(\varphi_t + \varphi_x)^2: +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{\mu \nu}\ \delta(\mu - \nu)\ e^{-i(\mu-\nu)(t+x)}\ d\mu\, d\nu .$$

После замены переменных

$$\mu + \nu = p , \qquad - \mu + \nu = q \tag{34}$$

получаем

$$:(\varphi_t - \varphi_x)^2: = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d p\ [b_1^+(p)\ e^{ip(t-x)} + b_1^-(p)\ e^{-ip(t-x)}] ,$$

$$:(\varphi_t + \varphi_x)^2: = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d p\ [b_2^+(p)\ e^{ip(t-x)} + b_2^-(p)\ e^{-ip(t-x)}] , \tag{35}$$

где операторы b равны

$$b_1^+(p) = - \frac{1}{4} \int_0^p d q \sqrt{p^2 - q^2}\ a^+ \left(\frac{p - q}{2}\right) a^+ \left(\frac{p + q}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_p^\infty d q \sqrt{q^2 - p^2}\ a^+ \left(\frac{p + q}{2}\right) a^- \left(\frac{q - p}{2}\right) ,$$

$$b_1^-(p) = - \frac{1}{4} \int_0^p d q \sqrt{p^2 - q^2}\ a^- \left(\frac{p - q}{2}\right) a^- \left(\frac{p + q}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_p^\infty d q \sqrt{q^2 - p^2}\ a^+ \left(\frac{q - p}{2}\right) a^- \left(\frac{p + q}{2}\right) ,$$

$$b_2^+(p) = - \frac{1}{4} \int_0^p d q \sqrt{p^2 - q^2}\ a^+ \left(\frac{- p + q}{2}\right) a^+ \left(\frac{- p - q}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_p^\infty d q \sqrt{q^2 - p^2}\ a^+ \left(\frac{- p - q}{2}\right) a^- \left(\frac{p - q}{2}\right) ,$$

$$b_2^-(p) = - \frac{1}{4} \int_0^p d q \sqrt{p^2 - q^2}\ a^- \left(\frac{- p + q}{2}\right) a^- \left(\frac{- p - q}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_p^\infty d q \sqrt{q^2 - p^2}\ a^+ \left(\frac{p - q}{2}\right) a^- \left(\frac{- p - q}{2}\right) , \tag{36}$$

Операторы b_1 удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[b_1^+(p)\ b_1^+(q)] = - (p - q)\ b_1^+(p + q),$$

$$[b_1^-(p)\ b_1^-(q)] = + (p - q)\ b_1^-(p + q),$$

$$[b_1^+(p)\ b_1^-(q)] = - (p + q)\ b_1^+(p - q), \tag{37}$$

$$[b_1^-(p)\ b_1^+(q)] = + (p + q)\ b_1^-(p - q),$$

Таким же коммутационным соотношениям удовлетворяют операторы b_2. Операторы b_1 и b_2 коммутируют.

Между операторами b и аналогичными операторами, введёнными в пункте 2, имеется следующее взаимно однозначное соответствие:

$$b_1^-(p) \Leftrightarrow b_1^+(p) , \qquad b_1^+(p) \Leftrightarrow b_1(p) ,$$

$$b_2^+(p) \Leftrightarrow b_2^+(p) , \qquad b_2^-(p) \Leftrightarrow b_2(p) , \tag{38}$$

Здесь справа – операторы из пункта 2, слева – операторы (36).

4. *Квантование полей* φ (t, x, y)*. или мембран.* Такие поля представляются трёхмерными минимальными поверхностями

$$z = a\ \varphi\ (t, x, y) \tag{39}$$

в пространстве Минковского с метрикой

$$d s^2 = - d t^2 + d x^2 + d y^2 + d z^2 . \tag{40}$$

Уравнение поля совпадает с уравнением

$$- \varphi_{tt} + \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + a^2 D(\varphi) = 0 , \tag{41}$$

где нелинейная часть D (φ) равна

$$D(\varphi) = - \varphi_{tt} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + \varphi_{xx} (- \varphi_t^2 + \varphi_y^2) + \varphi_{yy} (- \varphi_t^2 + \varphi_x^2) +$$

$$+ 2\ \varphi_{tx}\ \varphi_t\ \varphi_x + 2\ \varphi_{ty}\ \varphi_t\ \varphi_y - 2\ \varphi_{xy}\ \varphi_x\ \varphi_y . \tag{42}$$

Метрика, индуцированная на поверхности (39), равна

$$-dt^2+dx^2+dy^2+a^2(\varphi_t\,dt+\varphi_x\,dx+\varphi_y\,dy)^2 . \qquad (43)$$

Квадрат нормы вектора $N(\omega,k_1,k_2)$, касательного к поверхности (39), имеет вид

$$N^2=-\omega^2+(k_1)^2+(k_2)^2+(\varphi_t\,\omega+\varphi_x\,k_1+\varphi_y\,k_2)^2 . \qquad (44)$$

Далее применяем метод, изложенный в пункте 3. Решение уравнения Даламбера представляем в виде интеграла Фурье

$$\varphi(t,x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_1\,dk_2}{\sqrt{2\omega}}\,[\,a^+(k)\,e^{i(\omega t-k_1x-k_2y)}+ a^-(k)\,e^{-i(\omega t-k_1x-k_2y)}\,] , \qquad (45)$$

где

$$\omega^2=k_1^2+k_2^2,\qquad \omega>0 . \qquad (46)$$

Коммутационные соотношения для a^+ и a^- аналогичны (21).

Полагаем, что N^2 из (44) в среднем для векторов физических состояний равняется нулю. С учётом (46) и (44) это даёт

$$\langle A'\ |:\ (\varphi_t\,\omega+\varphi_x\,k_1+\varphi_y\,k_2)^2\ :|\ A\rangle=0 . \qquad (47)$$

Подставляя (45) в (42), получаем

$$D(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_1\,dk_2}{\sqrt{2\omega}}\,[\,a^+(k)\,e^{i(\omega t-k_1x-k_2y)}+ a^-(k)\,e^{-i(\omega t-k_1x-k_2y)}\,]\,(\omega\,\varphi_t+k_1\,\varphi_x+k_2\,\varphi_y)^2 . \qquad (48)$$

Из (47) и(48) следует, что

$$\langle A'\ |:\ D(\varphi)\ :|\ A\rangle=0 . \qquad (49)$$

Чтобы вычислить N^2 , запишем интеграл

$$\omega\,\varphi_t+k_1\,\varphi_x+k_2\,\varphi_y=$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dm_1\,dm_2}{\sqrt{2\mu}}\,[\,a^+(m)\,e^{i(\mu t-m_1x-m_2y)}- a^-(m)\,e^{-i(\mu t-m_1x-m_2y)}\,]\,(\omega\,\mu+k_1\,m_1+k_2\,m_2) , \qquad (50)$$

где подобно (46)

$$\mu^2=m_1^2+m_2^2,\qquad \mu>0 , \qquad (51)$$

и ещё один такой же интеграл с заменой μ, m_1, m_2 на ν, n_1, n_2.

Перемножив их, перейдём к полярным координатам:

$$\begin{aligned} m_1&=\mu\cos\alpha, & n_1&=\nu\cos\beta, & k_1&=\omega\cos\gamma,\\ m_2&=\mu\sin\alpha, & n_2&=\nu\sin\beta, & k_2&=\omega\sin\gamma. \end{aligned} \qquad (52)$$

В предположении угловой независимости в пространстве импульсов с помощью замены (34) получается следующий результат:

$$\begin{aligned} 64\,\pi^2\,\omega^{-2}\,N^2 = {}&\int_0^{\pi} d\alpha\,[1-\cos(\alpha-\gamma)]^2\times\\ &\times\int_0^{\infty}dp\,[\,B_1^+(p)\,e^{ip(t-x\cos\alpha-y\sin\alpha)}+\text{сопр}]\,+\\ &+\int_0^{\pi} d\alpha\,[1+\cos(\alpha-\gamma)]^2\times\\ &\times\int_0^{\infty}dp\,[\,B_2^+(p)\,e^{ip(t+x\cos\alpha+y\sin\alpha)}+\text{сопр}] . \end{aligned} \qquad (53)$$

Здесь операторы B отличаются от соответствующих операторов (36) заменой $(p^2-q^2)^{1/2}$ на $(p^2-q^2)^{3/2}$. Они удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} &[B_1^+(p)\ B_1^+(q)]=-(p-q)^3\,B_1^+(p+q),\\ &[B_2^+(p)\ B_2^+(q)]=-(p-q)^3\,B_2^+(p+q),\\ &[B_1^+(p)\ B_2^+(q)]=0 . \end{aligned} \qquad (54)$$

Отсюда следует, что

$$[B(p)[B(q)B(r)]]+[B(q)[B(r)B(p)]]+[B(r)[B(p)B(q)]]=$$
$$[(q-r)^3(p-q-r)^3+(r-p)^3(q-r-p)^3+(p-q)^3(r-p-q)^3]\,B(p+q+r). \qquad (55)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что полином, стоящий в правой части (55) обращается в нуль при любом из условий:

1) $q-r=0$, 2) $p-q-r=0$, 3) $r-p=0$, 4) $q-r-p=0$, 5) $p-q=0$, 6) $r-p-q=0$. (56)

Операторы B образуют алгебру, которую мы называем алгеброй Черникова - Барбашова для мембран .

5. *Гипермембраны произвольной размерности.* Скалярным нелинейным полям типа Борна-Инфельда, зависящим от n переменных, соответсвуют минимальные гиперповерхности (5) в пространстве Минковского M_{n+1} или кратко - гипермембраны. Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, получаем операторы B_1^+, B_2^+ и эрмитовски сопряжённые к ним операторы B_1^-, B_2^-, аналогичные

операторам B_1^+, B_2^+ и B_1^-, B_2^- . Операторы B получаются из операторов b (36) заменой $(p^2 - q^2)^{1/2}$ на $(p^2 - q^2)^{(2n-3)/2}$. Они удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[B_1^+(p)\ B_1^+(q)] = -\ (p - q)^{(2n-3)}\ B_1^+(p + q)\ ,$$

$$[B_2^+(p)\ B_2^+(q)] = -\ (p - q)^{(2n-3)}\ B_2^+(p + q)\ , \qquad (57)$$

$$[B_1^+(p)\ B_2^+(q)] = 0\ .$$

Отсюда следует, что

$$[B(p)[B(q)B(r)]] + [B(q)[B(r)B(p)]] + [B(r)[B(p)B(q)]] = \\ = P(p,\ q,\ r)\ B(p+q+r)\ , \qquad (58)$$

где

$$P(p,\ q,\ r) = (q-r)^{2n-3}\ (p-q-r)^{2n-3} + \\ + (r-p)^{2n-3}\ (q-r-p)^{2n-3} + (p-q)^{2n-3}\ (r-p-q)^{2n-3}\ . \qquad (59)$$

Последний полином обращается в нуль при любом из условий (56).

Операторы B образуют алгебру. Её мы называем общей агеброй Черникова – Барбашова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Born M.// Proc. Roy. Soc. A. – 1934 – V. 143. № A 849, p. 410.
2. Born M. , Infeld L.// Proc. Roy. Soc. A. – 1934 – V. 144. № A 852, p. 425.
3. Барбашов Б.М., Черников Н.А.// – 1966 – Т. 50, вып. 5, с. 1296. Препринт ОИЯИ Р-2311, Дубна, 1965.
4. Barbashov B.M., Cherhikov N.A.// Soviet Physics (JETP) – 1966 – V. 23, 5, p. 861.
5. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. – М.: Гостехиздат, 1948.
6. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 марта 1995 года.