СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 9435

В.А.Матвеев, Б.А.Маградзе

КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНЫЕ ВЕРШИННЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА МАСС

1976

Р2 - 9435

В.А.Матвеев, Б.А.Маградзе*

КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНЫЕ ВЕРШИННЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА МАСС

* Институт математики АН ГрССР

Введение

Обнаруженные в экспериментах по глубоконеупругому взаимодействию лептонов с адронами масштабные закономерности привели к задаче изучения автомодельных асимптотик в квантовой теории поля [1].

Наиболее полным образом эта проблема была исследована в работах [1], где были найдены достаточные для существования автомодельной асимптотики условия на спектральные функции в представлении Дайсона-Йоста-Лемана (ДЙЛ) для матричных элементов коммутатора токов. Одним из важных результатов этих работ явилось обоснование взаимосвязи автомодельного поведения и характера сингулярностей коммутатора локальных токов на световом конусе [2].

Отметим, что автомодельному поведению формфакторов глубоко неупругих процессов соответствует, в некотором смысле, исчезновение в поведении коммутатора токов вблизи светового конуса размерных динамических параметров [3].

Это обстоятельство позволяет привлечь идею о приближенной инвариантности при масштабных преобразованиях $x_\mu \to \lambda x_\mu$, присущей взаимодействию частиц на малых расстояниях.

В последние годы обсуждалась возможность расширения свойств инвариантности взаимодействий частиц на малых расстояниях до полной конформной группы, включающей в себя, кроме неоднородной группы Лоренца и масштабных преобразований, также специальные конформные преобразования, оставляющие инвариантным световой конус $x^2=0$ /4/. В работе /5/ были исследованы автомодельные решения уравнений масштабной и конформной инвариантностей для одночастичных матричных элементов произведения локальных токов, согласующиеся с требованиями причинности, спектральности и полиномиальной ограниченности. Рассмотрение проводилось для случая скалярных и сохраняющихся векторных токов и частиц с нулевой массой. Перечислены все решения задачи, а также найдены соответствующие им весовые функции в представлении ДЙЛ. В работе использовалось унитарное неприводимое представление (УНП) конформной группы, полученное в работе /6/, соответствующее безмассовой частице со спином $J=0$.

Однако наиболее серьезная проблема состоит в учете нарушения конформной симметрии, в частности, спонтанного нарушения симметрии, связанного с вырождением вакуума. В последнее время как одна из возможностей учета нарушения обсуждалось представление реальных векторов состояний через суперпозицию векторов, образующих базис неприводимого представления конформной группы с непрерывной массой /8/. Напомним, что спектр оператора квадрата массы p^2 для унитарных представлений конформной группы либо заполняет вещественную полуось $0 \le p^2 < \infty$, либо состоит из точки $p^2=0$ /7/. УНП конформной группы с $p^2 > 0$, которое при ограничении группой Вейля остается неприводимой, было получено в работе /8/. Заметим, что размерность состояний в этом представлении фиксирована значением $\ell=2$.

В настоящей работе мы изучили представления конформной группы с $p^2 \geq 0$ и с произвольной размерностью ℓ в формализме обобщенного свободного квантованного поля и применили их для построения вершинных функций.

В частности, в работе найдены решения уравнений конформной инвариантности, удовлетворяющие требованиям спектральности и причинности. Однако, нами найдены лишь частные решения и следствия конформной инвариантности, не противоречащие общим требованиям квантовой теории поля, общая же задача представляет собой сложную проблему, требующую дальнейших исследований.

Обобщенное "свободное" поле

Обобщенное свободное поле, имеющее c – числовой коммутатор, применявшееся в ряде работ при изучении теоретико-полевых моделей, а также для проверки полноты системы аксиом локальной квантовой теории поля /9/, представляет собой, по-видимому, основу для построения вершинных функций в конформно-инвариантной теории поля. В случае непрерывного спектра масс обобщенное свободное эрмитовое поле $\psi_\alpha(x)$ с размерностью α может быть представлено суперпозицией независимых свободных полей с различными массами:

$$\psi_\alpha(x)=\int d^4p\,(a_+(p)e^{ipx}+a_-(p)e^{-ipx})=\int_0^\infty dp^2\,(p^2_+)^\alpha\,\varphi(x p^2)$$

$$\varphi(x p^2)=\int_{p^2}\frac{d\vec{p}}{2p_0}\{b_+(p)e^{ipx}+b_-(p)e^{-ipx}\}$$

$$a_\pm(p)=(p^2_+)^\alpha\, b_\pm(\vec{p}\,p^2) \qquad (p^2_+)^\alpha=\begin{cases}\dfrac{(p^2)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} & p^2>0\\ 0 & p^2<0\end{cases} \qquad (1.1)$$

Здесь $b_\pm(p)$ –операторы рождения и уничтожения частицы с массой $p^2 \geq 0$, действие операторов $b_+(p)$ на вакуум порождает вектора состояний, принадлежащие фоковскому пространству одночастичных состояний непрерывной массы, α – произвольный параметр.

При масштабных и специальных конформных преобразованиях поле $\psi_\alpha(x)$ преобразуется следующим образом:

$$[\psi_\alpha(x), D] = -i(d + x^\mu \partial_\mu)\psi_\alpha(x)$$
$$[\psi_\alpha(x), K_\mu] = -i(2d x_\mu + 2x_\mu x_\nu \partial^\nu - x^2 \partial_\mu)\psi_\alpha(x) . \quad (I.2)$$

(D и K_μ – генераторы соответствующих преобразований).

Запишем определяющие представления коммутационных соотношений вторично-квантованных операторов $b_\pm(p)$ с генераторами конформной группы J в виде:

$$[b^+(p), J] = O_J(p\tfrac{\partial}{\partial p})b^+(p) \qquad J = P_\mu, M_{\mu\nu}, D \quad K_\mu$$
$$[b^-(p), J] = O_{\bar J}(p\tfrac{\partial}{\partial p})b^-(p) .$$

В частности, для дифференциальных операторов масштабного и специального конформного преобразований имеем:

$$O_D = O_{\bar D} = i(\ell + p_\mu \partial_p^\mu)$$
$$O_{K_\mu} = -O_{\bar K_\mu} = p_\mu(\partial_p^\nu \partial_\nu^p - \frac{\beta}{p^2}) - 2(\ell + p^\nu \partial_\nu)\partial_\mu^p , \quad (I.3)$$

где $-\ell = -2\alpha + d - 4 \qquad \beta = 4\alpha(2 + \alpha - d)$.

В регулярном случае, когда в выражении для дифференциальных операторов (I.3), соответствующих специальным конформным преобразованиям, отсутствует сингулярный член $\frac{\beta}{p^2}$, имеем $+\ell = d$, т.е. размерности локального поля и одночастичного состояния с непрерывной массой противоположны.

Полагая далее $\ell = +d$, найдем из требования конформной инвариантности точный вид коммутаторов операторов $a_\pm$, $b_\pm$:

$$[a_-(p), a_+(p')] = (p_+^2)^{d-2}\delta(p-p')$$
$$[b_-(p\ell), b_+(p'\ell')] = \theta(p^2)(p^2)^{2-\ell}\delta(p-p')\Gamma(\ell-1)\delta_{\ell\ell'}$$
$$\ell = -d \qquad \ell > 1 . \quad (I.4)$$

Отсюда находим точный вид перестановочных соотношений локального поля:

$$[\psi_\ell(x), \psi_\ell(0)] = \int d^4p\, \varepsilon(p_0)(p_+^2)^{\ell-2} e^{-ipx} =$$
$$= \begin{cases} -i\pi^2 4^\ell \varepsilon(x_0)(x_+^2)^{-\ell} & \ell \neq 2, 3, \ldots n \\ -\dfrac{i\pi^2 16}{\Gamma(\ell-1)}(-\Box)^{\ell-2}\dfrac{\varepsilon(x_0)\delta(x^2)}{x^2} & \ell = 2, 3, \ldots n . \end{cases}$$

Появляющиеся здесь сингулярные выражения следует понимать в терминах обобщенных функций /10/. Кроме того, найдем

$$[\varphi(x m^2), \varphi(x' m'^2)] = -i(2\pi)^3 D(x-x' m^2)\delta(m^2-m'^2)(m^2)^{2-d}\Gamma(d-1)$$
$$[\varphi(x m^2), \dot\varphi(x' m'^2)] = i(2\pi)^3 \delta(\vec x - \vec x')\delta(m^2-m'^2)(m^2)^{2-d}\Gamma(d-1) .$$

Заметим, что обобщенное скалярное поле, преобразующееся по неприводимому представлению группы Вейля, изучалось в работе /11/. Размерность одночастичного состояния была фиксирована значением $\ell = 2$, что эквивалентно требованию эрмитовой самосопряженности генераторов масштабного и специального конформного преобразований. Однако, если определить скалярное произведение с нормой $d\mu(p) = (p_+^2)^{\ell-2} d^4p$, то генераторы конформных преобразований оказываются самосопряженными при произвольных размерностях $\ell \geq 1$.

2. Матричные элементы тока

Применим требования конформной инвариантности к матричному элементу локального скалярного тока между одночастичными состояниями с импульсами p и p' :

$$F(z_1 z_2 z_3 \ell \ell') = \langle p\ell | X(0) | p'\ell' \rangle \qquad p^2 \geq 0 \quad p'^2 \geq 0,$$

где $z_1 = p^2$ $z_2 = p'^2$ $z_3 = 2(p \cdot p')$. Предположим, что ток $X(x)$ имеет размерность d и преобразуется по неприводимому унитарному представлению конформной группы

$$[X(x), J] = i O_J(x \partial_x) X(x) ,$$

J - генератор конформной группы, дифференциальные операторы O_p и O_{k_μ} даются соотношениями (I.2), а одночастичные состояния строятся как результат действия оператора рождения $b_+(p\ell)$ на конформно-инвариантный вакуум $|0\rangle$:

$$|\ell \vec{p} p^2 \rangle = b_+(p\ell)|0\rangle \qquad p^2 \geq 0 \quad \ell > 1 .$$

Требование инвариантности матричных элементов $\langle p | X(x) | p' \rangle$ относительно преобразований конформной группы приводит к системе дифференциальных уравнений:

$$\{ O_J(p') + O_J(p) + O_J(x) \} \langle p | X(x) | p' \rangle \Big|_{x=0} = 0$$

$J = p_\mu \; M_{\mu\nu} \; D \; k_\mu$. Используя выражения для дифференциальных операторов O_J , выпишем уравнения масштабной и конформной

инвариантностей для величины F :

$$(d - \ell - \ell')F - 2z_1 F_1 - 2z_2 F_2 - 2z_3 F_3 = 0$$
$$z_1 F_{11} - (z_2 + z_3)F_{33} - 2z_2 F_{23} + (\ell - 1)F_1 - \ell' F_3 = 0$$
$$z_2 F_{22} - (z_1 + z_3)F_{33} - 2z_1 F_{13} + (\ell' - 1)F_2 - \ell F_3 = 0 \qquad (2.I)$$

(d - размерность тока, ℓ и ℓ' - размерности состояний, $F_1 = \frac{dF}{dz_1}$ и т.д. Удобно решать систему (2.I), переходя к фурье-образу величины F по переменным z_i . Система уравнения для $\widetilde{F}$ уже первого порядка:

$$(d + 6 - \ell - \ell')\widetilde{F} + 2u_1 \widetilde{F}_1 + 2u_2 \widetilde{F}_2 + 2u_3 \widetilde{F}_3 = 0$$
$$u_1^2 \widetilde{F}_1 - (u_3^2 + 2u_2 u_3)\widetilde{F}_2 - u_3^2 \widetilde{F}_3 + [u_1(3 - \ell) + u_3(\ell' - 4)]\widetilde{F} = 0 \qquad (2.2)$$
$$u_2^2 \widetilde{F}_2 - (u_3^2 + 2u_1 u_3)\widetilde{F}_1 - u_3^2 \widetilde{F}_3 + [u_2(3 - \ell') + u_3(\ell - 4)]\widetilde{F} = 0$$

$$F(z) = \int du \, e^{i u_i z_i} \widetilde{F}(u_1 u_2 u_3) . \qquad (2,2')$$

Решив систему (2.2) для величины $\widetilde{F}$, подставив найденное решение в формулу обращения (2.2') и интегрируя по переменной u_3 , находим следующие выражения для искомой функции $\widetilde{F}$:

$$F(z_1 z_2 z_3) = \int dw_1 dw_2 (1 + w_1)_\pm^{d_1} (1 + w_2)_\pm^{d_2} (w_1 w_2 - 1)_\pm^{\lambda - 2} \cdot \qquad (2.3')$$
$$\cdot \{ C_1 (z_3 + w_1 z_1 + w_2 z_2)_+^{-\lambda} + C_2 (z_3 + w_1 z_1 + w_2 z_2)_-^{-\lambda} \} \quad \lambda \neq 3, 2, 1, \dots -K$$

$$F(z_1 z_2 z_3) = c \int dw_1 dw_2 (1 + w_1)_\pm^{d_1} (1 + w_2)_\pm^{d_2} (w_1 w_2 - 1)_\pm^{\lambda - 2} \cdot \qquad (2.3'')$$
$$\cdot \, i^{\lambda - 2} \delta^{(\lambda - 1)}(z_3 + w_1 z_1 + w_2 z_2) \quad \lambda = 3, 2, 1$$

$$F(z_1 z_2 z_3) = \int dw_1 dw_2 (1 + w_1)_\pm^{d_1} (1 + w_2)_\pm^{d_2} (w_1 w_2 - 1)_\pm^{\lambda - 2} \cdot \qquad (2.3''')$$
$$\cdot \{ C_1 (z_3 + w_1 z_1 + w_2 z_2)^{(-\lambda)} \mathcal{E}(z_3 + w_1 z_1 + w_2 z_2) +$$
$$+ C_2 (2 - \lambda)(1 - \lambda)(z_3 + w_1 z_1 + w_2 z_2)^{-\lambda} \} \quad \lambda = 0, -1, \dots -K ,$$

где $\lambda = \frac{\ell+\ell'-d}{2}$, $d_1 = \frac{d-2+\ell-\ell'}{2}$, $d_2 = \frac{d-2+\ell'-\ell}{2}$ $(1+w_i)_{\pm}^{d_i}$ означает произвольную линейную комбинацию обобщенных функций $(1+w_i)_{+}^{d_i}$ и $(1+w_i)_{-}^{d_i}$ /10/, C_1 и C_2 – произвольные константы.

Рассмотрим решение (2.3) при некоторых частных значениях параметров ℓ, ℓ', d.

I. $\ell=2$ $\ell'=1$ $d=3$. Из формулы (2.3''') при $C_1=0$ следует:

$$F = C_2 \int dw_1 dw_2 (1+w_1)\delta'(w_1 w_2 - 1) = const \qquad (2.4)$$

Заметим, что это решение связано с током $J(x) = \psi_\ell(x)\psi_{\ell'}(x)$, где $\ell=2$ $\ell'=1$, а соответствующий коммутатор токов определяется выражением:

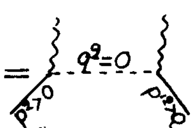
$$[J(\tfrac{x}{2}), J(-\tfrac{x}{2})] = -16 i\pi^2 \frac{\varepsilon(x_0)\delta(x^2)}{x^2}\psi_{\ell'}(\tfrac{x}{2})\psi_{\ell'}(-\tfrac{x}{2}) - 4i\pi^2\varepsilon(x_0)\delta(x^2)\psi_\ell(-\tfrac{x}{2})\psi_\ell(\tfrac{x}{2}),$$

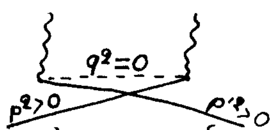
одночастичные матричные элементы которого легко вычислить:

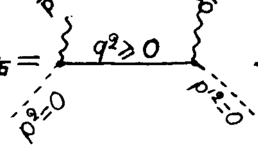
$$\langle p\ell|[J(\tfrac{x}{2}), J(-\tfrac{x}{2})]|p'\ell\rangle = -8i\pi^2\varepsilon(x_0)\delta(x^2)\cos\frac{(p+p')x}{2} - 32 i\pi^3\frac{\varepsilon(x_0)\delta(x^2)}{(x^2)^2}\delta(p-p') \quad \ell=2 \qquad (2.5)$$

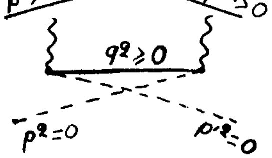
$$\langle p\ell'|[J(\tfrac{x}{2}), J(-\tfrac{x}{2})]|p'\ell'\rangle = -32 i\pi^2\frac{\varepsilon(x_0)\delta(x^2)}{x^2}\cos\frac{(p+p')x}{2} - 16 i\pi^2\frac{\varepsilon(x_0)\delta(x^2)}{x^2}2p_0\delta(\vec{p}-\vec{p}\,'). \quad \ell'=1$$

Очевидно, что эти решения соответствуют борновским вкладам в матричный элемент произведения токов с трехточечной вершиной, заданной решением (2.4):

$\langle p\,\ell=2|J(x)J(0)|p'\ell\rangle_Б =$ 

$+$ 

$\langle p\,\ell'=1|J(x)J(0)|p'\ell'\rangle_Б =$ 

$+$ 

II. $d=2$ $\ell=\ell'=2$; в этом случае приходим к решению

$$F(p^2 p'^2 p\cdot p') = \frac{c}{p\cdot p'}\int dw_1 dw_2\, \delta(w_1 w_2 - 1)\delta\left(w_1\frac{p^2}{2pp'} + w_2\frac{p'^2}{2pp'} + 1\right) =$$

$$= \frac{const}{\sqrt{(pp')^2 - p^2p'^2}} = \frac{2\,const}{\sqrt{(t-(m+m')^2][t-(m-m')^2}} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{2\,const}{t} \quad t=(p-p')^2.$$

III. $d=3$ $\ell=\ell'=2$; учтя формулу (2.3') и полагая для простоты $p^2=p'^2$, после некоторых вычислений получим выражение:

$$F(p^2 p\cdot p') = \frac{1}{\sqrt{(pp')+p^2}}\left\{C_1\int_\alpha^1 \frac{dk(K(k)-E(k))}{\sqrt{(1-k^2)(k^2-\alpha^2)}} + C_2\int_0^\alpha \frac{dk(K(k)-E(k))}{\sqrt{(1-k^2)(\alpha^2-k^2)}}\right\},$$

где $K(k)$ и $E(k)$ – полные элиптические интегралы, $\alpha = \sqrt{\frac{pp'-p^2}{pp'+p^2}}$.

При больших значениях переданного импульса $t=(p-p')^2$, ведущий в асимптотике член формфактора (2.5), помимо степенной зависимости от t, имеет и логарифмическую поправку:

$$F_{acc} = \frac{C_1}{\sqrt{t}}\left\{\ln\left[\left(\frac{4}{e}\right)^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\right] + \frac{1}{8}(\pi+1)\ln\frac{t}{4p^2}\right\} + \frac{C_2}{\sqrt{t}}\left\{\frac{1}{8}\ln\frac{4t}{p^2}\ln\frac{t}{p^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{e}{4}\ln\frac{4t}{p^2} + const\right\}.$$

3. Матричные элементы произведений токов

Изучим теперь следствия масштабной и конформной инвариантностей для матричных элементов произведений двух скалярных локальных токов между одночастичными состояниями:

$$f(x p p') = \langle p|X(x)X(0)|p'\rangle \qquad p^2 \geq 0 \quad p'^2 \geq 0.$$

Вследствие лоренцовской инвариантности, $f(xpp')$ зависит от шести переменных, которые мы выбираем в следующем виде:

$$x^2 \quad z_1 = x(p+p') \quad z_2 = x(p-p') \quad w = x^2 p\cdot p' \quad \eta = \frac{p^2x^2}{2} \quad \xi = \frac{p'^2x^2}{2}.$$

Используя явные выражения (I.2),(I.3) для дифференциальных операторов O_J , выпишем уравнения масштабной и конформной инвариантностей для матричных элементов $\langle p|X(x)X(0)|p'\rangle$:

$$\{2(d-\ell)+x_\mu\partial^\mu - p_\mu\partial_p^\mu - p'_\mu\partial_{p'}^\mu\} f(xpp')=0 \tag{3.I}$$

$$\{2dx_\mu+2x_\mu x_\nu\partial^\nu - x^2\partial_\mu + 2i(\ell+p^\nu\partial_\nu)\partial_\mu^p + ip_\mu(\frac{\ell}{p^2} - \partial^\nu\partial_\nu^p)$$
$$- 2i(\ell+p'^\nu\partial'_\nu)\partial_\mu^{p'} - ip'_\mu(\frac{\ell}{p'^2} - \partial^\nu\partial'_\nu)\} f(xpp')=0. \tag{3.2}$$

Подчеркнем, что размерности тока d и одночастичного состояния ℓ здесь произвольны. Как и в работе [5], удобно ввести представление:

$$f(xpp')=(-x^2-i\varepsilon x_0)^{\ell-d} e^{iz_2/2}\phi(z_1 z_2 w \eta \zeta), \tag{3.3}$$

удовлетворяющее уравнению масштабной инвариантности (3.I). Величина $\phi(z_1 z_2 w\eta\zeta)$ зависит от безразмерных переменных и вследствие эрмитовости токов характеризуется следующим свойством:

$$\phi^*(z_1 z_2 w \eta \zeta) = \phi(-z_1 z_2 w \zeta \eta).$$

После подстановки представления (3.3) в уравнение конформной инвариантности (3.2), условие линейной независимости векторов x, p, p' выражается как система независимых дифференциальных уравнений для функции ϕ :

$$z_2(\phi_{11}+\phi_{22}+\frac{\phi}{4})+2z_1\phi_{12}+2w\phi_{23}+2\eta(\phi_{41}+\phi_{42})-2\zeta(\phi_{51}+\phi_{52})+2\ell\phi_2=0$$
$$\phi_{11}+\phi_{22}+\frac{\phi}{4}+2\phi_{12}+2(z_1-z_2)\phi_{13}+2(w+\zeta)\phi_{33}+4\zeta\phi_{35}+2\ell\phi_3-2\eta\phi_{44}-2(\ell-1)\phi_4-\frac{\ell}{2\eta}\phi=0$$
$$\phi_{11}+\phi_{22}+\frac{\phi}{4}-2\phi_{12}+2(z_1+z_2)\phi_{13}+2(w+\eta)\phi_{33}+4\eta\phi_{34}+2\ell\phi_3-2\zeta\phi_{55}-2(\ell-1)\phi_5-\frac{\ell}{2\zeta}\phi=0. \tag{3.4}$$

Ограничимся значением параметра $\ell=0$ и выпишем наиболее простые частные решения системы (3.4). Например, для решений, зависящих лишь от трех переменных $z_1\ \eta\ \zeta$,система (3.4) значительно упрощается и можно найти причинные и спектральные решения борновского типа:

$$f(xpp')=\begin{cases}(-x^2-ix_0\varepsilon)^{\ell-d}e^{\frac{i(p-p')x}{2}}\cos\frac{1}{2}(p+p')x \\ (-x^2-ix_0\varepsilon)^{\ell-d}e^{\frac{i(p-p')x}{2}}\cos\frac{1}{2}(p+p')x\ \frac{(p^2p'^2x^4)^{2-\ell}}{2-\ell} \\ (-x^2-ix_0\varepsilon)^{\ell-d}e^{\frac{i(p-p')x}{2}}\cos\frac{1}{2}(p+p')x\ \ln p^2p'^2x^4. \quad \ell=2.\end{cases}$$

Первое из этих решений соответствует борновскому приближению матричного элемента $\langle p|X(x)X(0)|p'\rangle$ с током $X(x)=:\psi^2(x):$ (см.2.5). Решить систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами в общем виде невозможно. Однако при $\ell=0$ коэффициенты уравнений (3.4) линейны по переменным, и,следовательно, мы можем использовать преобразование Фурье для величины $\phi(z_1z_2w\eta\zeta)$:

$$\phi(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5)=\int du\, \exp iu_ix_i\, \tilde\phi(u_1 u_2 u_3 u_4 u_5)$$
$$w=z_3 \qquad \eta=z_4 \qquad \zeta=z_5,$$

после чего получим уравнения для фурье-образа :

$$(u_1^2+u_2^2-\frac{1}{4})\tilde\phi_2+2u_1u_2\tilde\phi_1+2u_2u_3\tilde\phi_3+2u_4(u_1+u_2)\tilde\phi_4-2u_5(u_1-u_2)\tilde\phi_5+(10-2\ell)u_2\tilde\phi=0$$
$$u_1u_3(\tilde\phi_1-\tilde\phi_2)+u_3^2\tilde\phi_3+(u_3^2+2u_3u_5)\tilde\phi_5-u_4^2\tilde\phi_4=\frac{1}{2}[i(u_1+u_2)^2-\frac{i}{4}+(2\ell-10)u_3+(6-2\ell)u_4]\tilde\phi$$
$$u_1u_3(\tilde\phi_1+\tilde\phi_2)+u_3^2\tilde\phi_3+(u_3^2+2u_3u_4)\tilde\phi_4-u_5^2\tilde\phi_5=\frac{1}{2}[i(u_1-u_2)^2-\frac{i}{4}+(2\ell-10)u_3+(6-2\ell)u_5]\tilde\phi. \tag{3.5}$$

Применим далее хорошо известный метод [12] решения линейной системы в частных производных первого порядка. Опуская выкладки, выпишем результат:

$$\tilde{\varphi}=u_3^{1-\ell}(u_3^2-u_4u_5)^{\ell-3}e^{\frac{i}{2u_3}(u_1^2-u_2^2+\frac{1}{4})}F\left\{\frac{u_1}{u_3},\frac{[u_3(u_1+u_2-\frac{1}{2})+u_4(u_2-u_1-\frac{1}{2})][u_3(u_2-u_1+\frac{1}{2})+u_5(u_1+u_2+\frac{1}{2})]}{[u_3(u_1+u_2+\frac{1}{2})+u_4(u_2-u_1+\frac{1}{2})][u_3(u_2-u_1-\frac{1}{2})+u_5(u_1+u_2-\frac{1}{2})]}\right\}. \tag{3.6}$$

Классическое общее решение (3.6) по-видимому, полностью не исчерпывает всех решений системы (3.5); могут существовать обобщенные и особые решения, которые нами не рассматривались.

Очевидно, принципы причинности и спектральности накладывают на функцию φ определенные граничные условия, которые из-за сложности не учитывались при получении решения (3.6). В следующем параграфе мы дадим анализ решения (3.6) с точки зрения этих общих требований.

4. Причинность и спектральность

Наиболее компактно требования принципов причинности и спектральности выражаются в представлении ДИЛ для матричного элемента коммутатора токов. Выпишем соответствующее интегральное представление для матричного элемента произведений токов, полученное в работе [5] с учетом масштабной инвариантности

$$f(xpp')=C(-x^2+i\varepsilon x_0)^{\ell-d}e^{ix(p-p')/2}\left\{\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{|u_0|+|\vec{u}|\le\frac{(p+p')_0}{2}}du\,e^{iux}\,\psi_6(upp')\right\}. \tag{4.1}$$

С другой стороны, безразмерная функция $\varphi(z_1z_2w\eta\xi)$, определяющая решение уравнений конформной инвариантности в системе Брейта, в силу (4.1) и размерного анализа, может быть записана в виде:

$$\varphi(z_1z_2w\eta\xi)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mu\,e^{i\mu x a}\,\psi_6\left(\mu^2\mu_0\mu_3\,\frac{\eta}{w}\,\frac{\xi}{w}\right)$$

$$|\mu_0|+\sqrt{\mu_3^2+\mu_\perp^2}\le 1\qquad a=\frac{(p+p')_0}{2}\qquad \mu_k=\frac{u_k}{a}. \tag{4.2}$$

Удобно ввести новый набор независимых переменных:

$$z_1'=z_1=2ax_0$$

$$z_2'=\frac{1}{\sqrt{w^2-4\eta\xi}}[(\eta-\xi)z_1-(\eta+\xi+w)z_2]=2ax_3$$

$$z_3'=z_1^2-\frac{[(\eta-\xi)z_1-(\eta+\xi+w)z_2]^2}{(w^2-4\eta\xi)}-2(\eta+\xi+w)=4a^2x_\perp^2$$

$$z_4'=\frac{\eta}{w}\qquad z_5'=\frac{\xi}{w},$$

в которых интеграл (4.2) принимает следующий вид:

$$\varphi=\frac{1}{8\pi^2}\int d\mu_0d\mu_3d\mu_\perp^2\,e^{\frac{i}{2}(\mu_0z_1'-\mu_3z_2')}J_0\left(\frac{\sqrt{z_3'}\mu_\perp}{2}\right)\psi_6(\mu_\perp^2\mu_0\mu_3\,z_4'z_5')$$

$$|\mu_0|+\sqrt{\mu_3^2+\mu_\perp^2}\le 1. \tag{4.3}$$

Сформулируем вначале требование причинности для матричного элемента коммутатора токов:

$$\langle p|[X(\tfrac{x}{2}),X(-\tfrac{x}{2})]|p'\rangle=(-x^2+i\varepsilon x_0)^{\ell-d}\varphi(z_1z_2w\eta\xi)-(-x^2-i\varepsilon x_0)^{\ell-d}\varphi(-z_1-z_2w\eta\xi)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{i\pi}{\Gamma(\ell-d)}\varepsilon(x_0)(x^2)^{\ell-d}\left(\varphi(z_1z_2w\eta\xi)+\varphi(-z_1-z_2w\eta\xi)\right)+[-\theta(-x^2)x^2]^{\ell-d}\left(\varphi(z_1z_2w\eta\xi)-\varphi(-z_1-z_2w\eta\xi)\right)\\ \qquad \ell-d\ne-2\cdots-n\\ \dfrac{i\pi(-\square)^{d-\ell-2}\frac{\varepsilon(x_0)\delta(x^2)}{x^2}}{\Gamma(d-\ell)\Gamma(d-\ell-1)\,4^{d-\ell-2}}\cdot\left(\varphi(z_1z_2w\eta\xi)+\varphi(-z_1-z_2w\eta\xi)\right)+\\ \qquad+2\pi(-\square)^{d-\ell-2}\frac{1}{x^4}\left(\varphi(z_1z_2w\eta\xi)-\varphi(-z_1-z_2w\eta\xi)\right)\\ \qquad \ell-d=-2,\cdots-n.\end{cases} \tag{4.4}$$

Как и в работе [5], для выполнения причинности достаточно потребовать:

$$\varphi(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5) = \varphi(-z_1 - z_2\, z_3 z_4 z_5) \qquad (4.5)$$

$$z_3 = w \quad z_4 = \eta \quad z_5 = \zeta .$$

Учитывая также условие эрмитовости токов:

$$\varphi^*(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5) = \varphi(-z_1\, z_2 z_3 z_5 z_4)$$

для функции F , определяющей решение (3.6), находим следующие свойства симметрии:

$$F(\alpha,\beta) = \tilde{F}(-\alpha \tfrac{1}{\beta})$$

$$(-1)^{1-\ell} F^*(\alpha,\beta) = F(-\alpha\, \beta) \qquad (4.5')$$

$$\alpha = \frac{u_1}{u_3}$$

$$\beta = \frac{[u_3(u_1+u_2-\frac{1}{2}) + u_4(u_2-u_1-\frac{1}{2})][u_3(u_2-u_1+\frac{1}{2}) + u_5(u_1+u_2+\frac{1}{2})]}{[u_3(u_1+u_2+\frac{1}{2}) + u_4(u_2-u_1+\frac{1}{2})][u_3(u_2-u_1-\frac{1}{2}) + u_5(u_1+u_2-\frac{1}{2})]} .$$

Ограничимся для простоты значениями параметров $d=3$ и $\ell=2$ и рассмотрим фурье-образ коммутатора токов (4.4) (с учетом условия (4.5)):

$$f(qpp') = \int d^4x\, e^{iqx} \langle p | [\chi(\tfrac{x}{2}), \chi(-\tfrac{x}{2})] | p' \rangle =$$

$$= 2i\pi \int d^4x\, \varepsilon(x_0)\delta(x^2) e^{iqx} \varphi\left(z_1 = (p+p')x \;\; z_2 = (p-p')x \;\; w = pp'x^2 \;\; \eta = \frac{p^2x^2}{2} \;\; \zeta = \frac{p'^2x^2}{2}\right) =$$

$$= 2i\pi \int d^4x\, \varepsilon(x_0)\delta(x^2) e^{iqx} \int du_1 du_2 du_3 \frac{du_4' du_5'}{w^2} e^{iu_1z_1 + iu_2z_2 + iu_4'(\frac{\eta}{w}) + iu_5'(\frac{\zeta}{w}) + iu_3 w} \cdot \tilde{\varphi}(u_1 u_2 u_3 \tfrac{u_4'}{w} \tfrac{u_5'}{w}) ,$$

где $u_4' = u_4 w$ $u_5' = u_5 w$. Используя явный вид решения (3.6), переходя под интеграл по переменным u_i к пределу $x^2 \to 0$ и интегрируя по u_4' и u_5' , получим

$$\tilde{f}(qpp') = \frac{i\pi^3}{2} \int du_1 du_2 du_3 \frac{e^{\frac{i}{2u_3}(u_1^2 - u_2^2 + \frac{1}{4})}}{u_3} F\left\{\frac{u_1}{u_3}, \frac{u_2^2 - (u_1+\frac{1}{2})^2}{u_2^2 - (u_1-\frac{1}{2})^2}\right\} J(pp'q\, u_1 u_2) ,$$

где $J = \int d^4x\, \varepsilon(x_0)\delta(x^2) e^{i(q + u_1(p+p') + u_2(p-p'))x}$.

Заметим, что указанный предельный переход возможен, если решение $\varphi(z_1 z_2 w \eta \zeta)$ не имеет особенностей по переменной $w = x^2 pp'$ в нуле.

Очевидно, что интеграл по переменной u_3 может быть взят независимо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du_3}{u_3} e^{\frac{i}{2u_3}(u_1^2 - u_2^2 + \frac{1}{4})} F\left\{\frac{u_1}{u_3}, \frac{4u_2^2 - (2u_1+1)^2}{4u_2^2 - (2u_1-1)^2}\right\} = \Psi(u_1 u_2) . \qquad (4.6)$$

Вычислив типичный J и учитывая формулу (4.6), окончательно приходим к выражению:

$$\tilde{f}(qpp') = -\pi^5 \int du_1 du_2\, \varepsilon(q_0 + (p+p')_0 u_1 + (p-p')_0 u_2)\, \delta[q^2 + (p+p')^2 u_1^2 + (p-p')^2 u_2^2 + 2q(p+p')u_1 + 2q(p-p')u_2 +$$
$$+ 2(p^2 - p'^2) u_1 u_2]\, \Psi(u_1 u_2) , \qquad (4.7)$$

которое после замены переменных принимает стандартную форму представления ДИЛ:

$$\tilde{f}(qpp') = \frac{\pi^5}{2(p+p')_0 p_z} \int du_0' du_3'\, \varepsilon(q_0 - u_0')\delta[(q_0-u_0')^2 - (q_z - u_3')^2 - q_\perp^2]\, \Psi\left(-\frac{u_0'}{(p+p')_0} + \frac{(p-p')_0 u_3'}{(p+p')_0 2p_z}, -\frac{1}{2p_z} u_3'\right) ,$$

где

$$u_0' = -(p+p')_0 u_1 - (p-p')_0 u_2$$

$$u_3' = -2p_z u_2 .$$

Вследствие спектральности носитель функции Ψ должен быть сосредоточен в области

$$|u_3'| + |u_0'| \le \frac{(p+p')_0}{2}$$

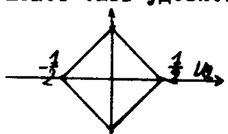
или

$$\left|u_1+\frac{(p-p')_0}{(p+p')_0}u_2\right|+\left|\frac{2p_z}{(p+p')_0}\right||u_2|\leqslant\frac{1}{2}. \qquad (4.8)$$

Пересечение множеств (4.8) при произвольных импульсах p и p' определяется неравенством

$$|u_1|+|u_2|<\frac{1}{2}, \qquad (4.9)$$

которое легко может быть удовлетворено:



Таким образом, спектральное и причинное решения уравнений масштабной и конформной инвариантностей для фурье-образа матричного элемента коммутатора скалярных токов в случае $d=3$, $\ell=2$ имеют следующий вид:

$$f(qpp')=\int\limits_{|u_1|+|u_2|<\frac{1}{2}}du_1du_2\,\varepsilon(q_0+(p+p')_0u_1+(p-p')_0u_2)\,\delta[q^2+(p+p')^2u_1^2+(p-p')^2u_2^2+2(p^2-p'^2)u_1u_2+2q(p+p')u_1+2q(p-p')u_2]\,\Psi(u_1u_2).$$

$\Psi(-u_1u_2)=\Psi(u_1u_2)$ причинность

$\Psi^*(u_1u_2)=\Psi(u_1u_2)$ эрмитовость

Альтернативное выражение для матричного элемента произведений токов имеет вид:

$$f(xpp')=(-x^2-i\varepsilon x_0)^{\ell-d}e^{\frac{ix^2}{2}}\int du\, e^{iu_iz_i}u_3^{1-\ell}(u_3^2-u_4u_5)^{\ell-3}e^{\frac{i}{x_0}(u_1^2-u_2^2+\frac{1}{4})}F(\alpha,\beta),$$

где α и β даются в формулах (4.5'), а $F(\alpha,\beta)$ удовлетворяет требованиям

$$F(\alpha,\beta)=F(-\alpha,\tfrac{1}{\beta})$$

$$(-1)^{1-\ell}F^*(\alpha,\beta)=F(-\alpha,\beta)$$

$$F(\alpha,\beta)=0 \qquad \beta\leqslant 0 \quad \ell=2 \quad d=3.$$

Последнее свойство следует из условия (4.9).

Авторы выражают глубокую благодарность А.Н.Тавхелидзе за обсуждения работы и ценные замечания, Э.Вицореку, В.Р.Гарсеванишвили, Д.Робашику, А.А.Хелашвили за полезные дискуссии.

Литература:

I. Н.Н.Боголюбов, В.С.Владимиров, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ, I2, 305, I972.

2. T.D.Bjorken. Phys.Rev., 179, 1547, 1969.
H.Leutwyler, J.Stern. Nucl.Phys., B20, 77, 1970.
R.A.Brandt. Phys.Rev., P1-2808, 1970.

3. В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе. Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра. ЭЧАЯ, т.2, вып. I, 7, I970.
A.N.Tavkhelidze. Deep-Inelastic Lepton-Hadron Interactions. Proceedings of the Coral Gables Conference, Gordon and Breach, 1970, T.D.Lee. CERN-Preprint, 73-15, 1973.

4. E.Cunnigham. Proc. Ind. Math.Soc., 8, 77, 1909.
Bateman, Proc. Ind. Math. Soc., 8, 223, 1910.

5. V.A.Matveev, D.Robashik, A.N.Tavkhelidze, E.Wieczorek. JINR Preprint, E2-7726, Dubna, 1974.

6. G.Mack, T.Todorov. Preprint IC/71/139 Trieste (1971).

7. G.Mack, A.Salam. Ann. of Phys., 53, 174 (1969).

8. J.Mickelson, J.Niederle. Journal of Mathematical Physics. January 1972, v. 13, No. 1.

9. O.W.Greenberg. Ann. of Phys., (No. 4) 16, 158 (1961), J.F.Dell-Antonio. Math.Phys., 2, 759 (1961), A.L.Licht. Nuovo Cim., 21, 346 (1961).

I0. В.С.Владимиров. Методы теории функции многих комплексных переменных. М., Наука, I964.
И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов. Обобщенные функции и действие над ними. вып. I, М., Физматгиз, I958.
В.С.Владимиров. Уравнения математической физики, М., Наука, I97I.

II. J.Lukiershi, K.Sienkiwicz. T.Math.Phys., vol. 15, No. 3, March, 1974; J.Lukiershi. Preprint No. 279, Wroclaw, Feb., 1974.

I2. Ф.Трикоми. Лекции по уравнениям в частных производных. М., ИЛ, 1957.

I3. Дао Вонг Дык. Масштабное преобразование и асимптотическое поведение формфакторов. Препринт ОИЯИ, Р2-8238, Дубна, 1974.

I4. Р.П.Зайков. Конформно-инвариантное разложение трехточечной и четырехточечной функций. Препринт ОИЯИ, Р2-82I2, Дубна, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел

5 января 1976 года