

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



Б-447

12/11-75  
P2 - 9416

1262/2-76

В.Б.Беляев, Б.Ф.Иргазиев

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КАДЫШЕВСКОГО  
МЕТОДОМ БЕЙТМАНА

**1975**

P2 - 9416

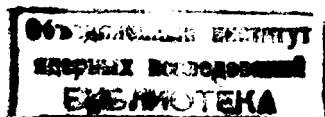
В.Б.Беляев, Б.Ф.Иргазиев\*

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КАДЫШЕВСКОГО  
МЕТОДОМ БЕЙТМАНА

*Направлено в ЯФ*

---

\* НИИЯФ МГУ



Описание ядерной системы при помощи NN-потенциалов, содержащих отталкивание на малых расстояниях, требует учета релятивистских эффектов. Действительно, из-за отталкивания волновая функция двух нуклонов в S-состоянии должна быстро исчезать в отталкивающей области, что эквивалентно возникновению в функции компонент с большими импульсами относительного движения частиц. Таким образом, даже в системе, энергия связи которой много меньше массы нуклона, в принципе могут проявиться релятивистские эффекты. Как будет установлено ниже, такие эффекты, действительно, вполне ощутимы.

В настоящее время существуют две формулировки релятивистской квантовой задачи двух тел. Одна из них, развитая в работах <sup>/1/</sup>, основана на возможности введения релятивистского аналога оператора Мёллера. В этой формулировке на взаимодействие двух частиц, кроме требования достаточно быстрого убывания при увеличении аргумента, никаких ограничений не накладывается. Последнее обстоятельство в будущем, по-видимому, позволит использовать в этом подходе феноменологические потенциалы.

Вторая формулировка <sup>/2/</sup>, более популярная и получившая значительное развитие, существенным образом исходит из теоретико-полевой идеи, состоящей в том, что взаимодействие между частицами возникает путем обмена квантами поля /электромагнитного, мезонного и др./, что сразу же приводит в концептуальном ослож-

нениям. В самом деле, основным уравнением этого подхода является уравнение Бете-Солпитера, которое в системе ц.м. сталкивающихся частиц имеет вид

$$M(p, q, \mathcal{P}) = V(p, q, \mathcal{P}) + \int d^4 k V(p, k, \mathcal{P}) G(k, \mathcal{P}) M(k, q, \mathcal{P}), \quad /1/$$

где

$$\mathcal{P} = p_1 + p_2 = \{0, \sqrt{s}\}, \quad p = \frac{1}{2}(p_1 - p_2),$$

$$G(k, p) = \frac{-i(2\pi)^2}{(k + \frac{p}{2} - m)(-k + \frac{p}{2} - m)}$$

Здесь, по определению,  $V(p, q, \mathcal{P})$  - сумма всех неприводимых диаграмм Фейнмана, соответствующих обмену различным числом мезонов; и если бы такую сумму можно было найти, то  $V$  представляло бы вполне определенную функцию, определяемую лишь тремя параметрами: константой  $g_{\pi N}$  - взаимодействия и массами нуклона и мезона. Использование феноменологических потенциалов в уравнении /1/ было бы, строго говоря, непоследовательным.

Поскольку вычислить  $V$  точно мы не можем, то приходится искать аргументы, оправдывающие приближенное вычисление  $V(p, q, \mathcal{P})$ . Одним из таких аргументов является предположение о том, что при вычислении функции  $V_{NN}$  можно ограничиться ближайшими диаграммами, так как вклад от диаграмм высокого порядка соответствует взаимодействию на малых расстояниях, куда нуклоны не проникают из-за сильного отталкивания, порождаемого обменом  $\rho$ - $\omega$ - и  $\phi$ -мезонами.

Однако и после этой упрощающей гипотезы уравнение Бете-Солпитера /1/ все еще трудно разрешимо, поскольку оно является /после отделения парциальных волн/ двумерным интегральным уравнением\*. В связи

\* Кроме того, как было показано в работе /3/, это уравнение для случая взаимодействия двух нуклонов имеет однозначные решения только в определенной области значений констант связи  $g_{\pi N}$ .

с этим много попыток /4/ было предпринято с целью развить трехмерную формулировку релятивистской задачи двух тел. Как выяснилось, все варианты трехмерных уравнений движения можно получить из уравнения /1/ следующим образом. Запишем уравнение /1/ в виде

$$M = V + VGM, \quad /2/$$

тогда легко убедиться, что уравнение /2/ эквивалентно системе уравнений

$$M = W + WgM, \quad /3/$$

$$W = V + V(G-g)W. \quad /4/$$

Представление уравнения /2/ в виде системы /3/ и /4/ позволяет выбрать функцию  $g$  таким образом, чтобы уравнение /3/ стало трехмерным. Кроме того, потребовав для  $M$  выполнения условия релятивистской унитарности, для  $g$  получим условие /5/:

$$g - g^+ = \frac{2i}{(2\pi)^2} \frac{m}{\sqrt{m^2 + q^2}} \delta(q'^2 - k'^2). \quad /5/$$

Никаких других ограничений на функцию  $g$  не накладывается, поэтому она может быть выбрана бесконечным числом способов. Обычно выбирают 2 семейства таких функций. Первое семейство имеет вид

$$g(\mathcal{P}, k) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds}{s - W - i\epsilon} f(s, W) \delta^+ \left[ \left( \frac{\mathcal{P}'}{2} + k \right)^2 + m^2 \right] \times \\ \times \delta^+ \left[ \left( \frac{\mathcal{P}'}{2} - k \right)^2 + m^2 \right] = -\frac{\delta(k_0)}{4(2\pi)^3} \cdot \frac{f(4E_k, W)}{E_k \left( E_k^2 - \frac{W}{4} - i\epsilon \right)},$$

$$\mathcal{P}' = \sqrt{\frac{s}{W}} \mathcal{P}, \quad /6/$$

$\delta^+$  - содержит только положительные энергии в аргументе. Второе семейство:

$$g(\mathcal{P}, k) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-W}^{\infty} \frac{ds}{4m^2 s - W - i\epsilon} f(s, W) \delta^+ \left[ \left( \frac{\mathcal{P}}{2} + k \right)^2 + m^2 \right] \times$$

$$\times \delta^+ \left[ \left( \mathcal{P}' - \frac{\mathcal{P}}{2} - k \right)^2 + m^2 \right] = -\frac{\delta(k_0 + \sqrt{W}/2 - E_k)}{4(2\pi)^3} \cdot \frac{f(4E_k^2, W)}{E_k(E_k - \frac{W}{4} - i\epsilon)},$$

$$E_k = \sqrt{k^2 + m^2}. \quad /7/$$

Как следует из /6/ и /7/, функции  $g$  задаются с точностью до произвольной функции  $f$ . Для удовлетворения /5/ требуется лишь, чтобы выполнялось условие  $f(W, W)=1$ . Из конструкции  $g$  следует, что если интересоваться достаточно низкими ( $E < 2m$ ) энергиями в NN-рассеянии, то уравнение /4/, по-видимому, можно решать итерациями, в результате чего возникает замкнутая схема решения задачи.

Если теперь в /6/ положить  $f=1$ , то из /3/ получим уравнение Логанова-Тавхелидзе. Функция /7/ при

$$f(s, W) = \frac{\sqrt{s} + \sqrt{W}}{2\sqrt{s}}$$

приводит к уравнению Кадышевского\* (К), которое после простого преобразования принимает вид

$$A(\vec{k}, \vec{k}', Z) = \tilde{V}_\rho(\vec{k}, \vec{k}') + \int \frac{\tilde{V}_\rho(\vec{k}, \vec{q}) A(\vec{q}, \vec{k}', Z)}{Z - 2E_q + i\epsilon} \cdot \frac{d\vec{q}}{\sqrt{1 + \frac{q^2}{m^2}}}. \quad /8/$$

\* Следует отметить, что уравнение /8/ было первоначально получено из гамильтоновой формулировки квантовой теории поля, а не из теории Бете-Солпитера.

Нашей целью будет исследовать применимость метода Бейтмана к решению уравнения /8/. Параллельно будем решать нерелятивистское уравнение Липпмана-Швингера /Л.Ш./ с нерелятивистским пределом потенциала  $\tilde{V}$  для выяснения роли релятивистского описания в различных случаях.

Отделяя угловые переменные в /8/, получим:

$$A_\rho(k, k', Z) = \tilde{V}_\rho(k, k') + 4\pi \int_0^\infty \frac{\tilde{V}_\rho(k, q, Z) A(q, k', Z)}{Z - 2E_q + i\epsilon} \frac{q^2 dq}{\sqrt{1 + \frac{q^2}{m^2}}}, \quad /9/$$

где

$$\tilde{V}_\rho(k, k') = \frac{1}{2} \int_0^\pi \tilde{V}(k, k') P_\rho(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad /10/$$

Амплитуда на массовой поверхности  $f_\rho(k)$  связана с  $A_\rho$  соотношением

$$f_\rho(k) = -2\pi^2 m A_\rho(k, k, 2k_0). \quad /11/$$

В случае короткодействующих потенциалов функция  $\tilde{V}_\rho(k, k')$  обычно оказывается достаточно плавной функцией своих аргументов, поэтому так же, как и в нерелятивистском случае, применим к ней разложение Бейтмана<sup>16</sup>:

$$\tilde{V}_\rho(k, k') \rightarrow \tilde{V}_\rho^N(k, k') = \sum_{i,j=1}^N \tilde{V}_\rho(k, s_i) [d^{-1}]_{ij} \tilde{V}_\rho(s_j, k'),$$

$$d_{ij} = \tilde{V}_\rho(s_i, s_j). \quad /12/$$

Для функции  $A_\rho^N$  получаем:

$$A_\rho^N(k, k', Z) = \sum_{i,j=1}^N [C^{-1}(Z)]_{ij} \tilde{V}_\rho(k, s_i) \tilde{V}_\rho(s_j, k'), \quad /13/$$

где

$$C_{ij}(Z) = \tilde{V}_\rho(s_i, s_j) + 4\pi \int_0^\infty \frac{\tilde{V}_\rho(k, s_i) \tilde{V}_\rho(k, s_j)}{2E_k - Z - i\epsilon} \frac{k^2 dk}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2}}}. \quad /14/$$

Парциальную гармонику волновой функции связанного состояния в импульсном представлении найдем из уравнения

$$\Psi_{\ell}(k, E) = \frac{4\pi}{E - 2E_k} \int_0^{\infty} \tilde{V}_{\ell}(k, k') \Psi_{\ell}(k', E) \frac{k'^2 dk'}{\sqrt{1 + \frac{k'^2}{m^2}}}. \quad /15/$$

Энергия связи определяется соотношением  $\epsilon = E - 2m$ . Используя /12/ в /15/, для  $\Psi_{\ell}$  получим выражение

$$\Psi_{\ell}^N(k, E) = \frac{\sum_{i=1}^N A_i \tilde{V}_{\ell}(k, s_i)}{E - 2E_k}, \quad /16/$$

в котором коэффициенты  $A_i$  определяются из решения системы алгебраических уравнений:

$$[I + 4\pi d^{-1} J(E)] A = 0. \quad /17/$$

$I$  - единичная матрица,

$$J_{ij}(E) = \int_0^{\infty} \frac{\tilde{V}_{\ell}(k, s_i) \tilde{V}_{\ell}(k, s_j)}{2E_k - E} \cdot \frac{k^2 dk}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2}}}. \quad /18/$$

Собственные значения находятся из условия обращения в нуль определителя системы /17/. Из выражения /16/ легко получить волновую функцию связанного состояния в координатном представлении:

$$\Psi_{\ell}(r, E) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} p_{\ell}(k, r) \Psi_{\ell}(k, E) \frac{k^2 dk}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2}}}. \quad /19/$$

Здесь  $p_{\ell}(\vec{k}, \vec{r})$  - релятивистский аналог сферической функции Бесселя, который возникает из-за того, что в теории Кадышевского переход от импульсного представления в координатное осуществляется не фурье-преобразованием, а посредством функций  $\xi(\vec{k}, \vec{r})$ , ре-

ализующих базис бесконечномерной серии неприводимых представлений группы Лоренца. Для  $\xi$  имеем разложение

$$\xi(\vec{k}, \vec{r}) = \left( \frac{k_0 - \vec{k} \vec{n}}{m} \right)^{-1 - i\pi m} = \frac{1}{kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} p_{\ell}(k, r) P_{\ell} \left( \frac{\vec{k} \vec{r}}{kr} \right). \quad /20/$$

$$\vec{n}^2 = 1.$$

В расчетах использовались следующие потенциалы:

1/ релятивистский потенциал Юкавы:

$$\tilde{V}_1(\vec{k}, \vec{k}') = - \frac{V_0}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mu^2 - (k_0 - k'_0)^2 + (\vec{k} - \vec{k}')^2}; \quad /21/$$

2/ релятивизованный потенциал Тйона /МТ/:

$$\tilde{V}_2(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\lambda_1}{\mu_1^2 - (k_0 - k'_0)^2 + (\vec{k} - \vec{k}')^2} + \frac{\lambda_2}{\mu_2^2 - (k_0 - k'_0)^2 + (\vec{k} - \vec{k}')^2} \right]. \quad /22/$$

Параметры потенциалов  $\tilde{V}_1$  и  $\tilde{V}_2$  выбраны так, чтобы в нерелятивистском пределе  $\tilde{V}_1$  совпадал бы с потенциалом Юкавы с триплетными параметрами, а  $\tilde{V}_2$  - с триплетным потенциалом Тйона. Результаты представлены на рис. 1-3 и в таблицах 1-4. Как видно из графиков S- и P-фаз, рассчитанных для потенциала Юкавы, решения релятивистского и нерелятивистского уравнений отличаются не более чем на 5%. Аналогичный результат для фазы  $^1S_0$  был получен в работе /7/ другим методом. Обширный анализ решений трехмерных уравнений с потенциалом  $V_1$ , проведенный в /5/, показал, что почти во всех случаях решения релятивистских трехмерных уравнений с этим потенциалом значительно отличаются от решения уравнения Бете-Солпитера. Однако уже учет в потенциале диаграмм следующего порядка делает эту разницу незначительной. С потенциалом  $\tilde{V}_1$  проводилось также исследование сходимости всей процедуры для связанного состояния и для задачи рассеяния. Как видно из таблиц 1 и 2, сходимость достигается уже при

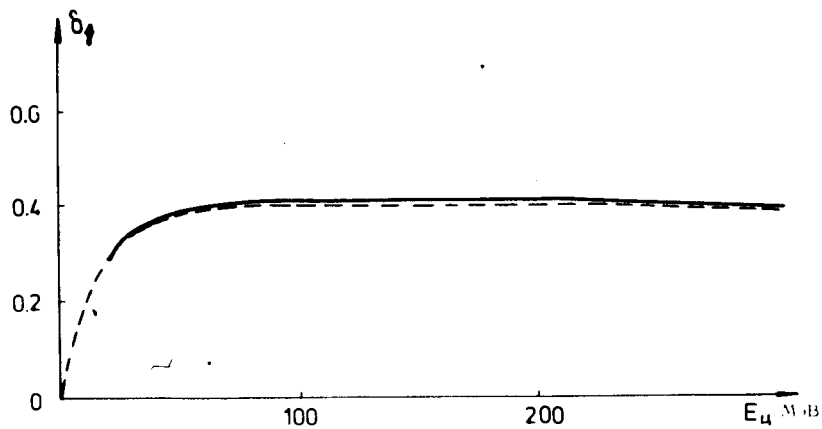


Рис. 1. Зависимость Р-фазы рассеяния от энергии /в ц.м./ для потенциала Юкавы. ——— релятивистская фаза, - - - нерелятивистская фаза.

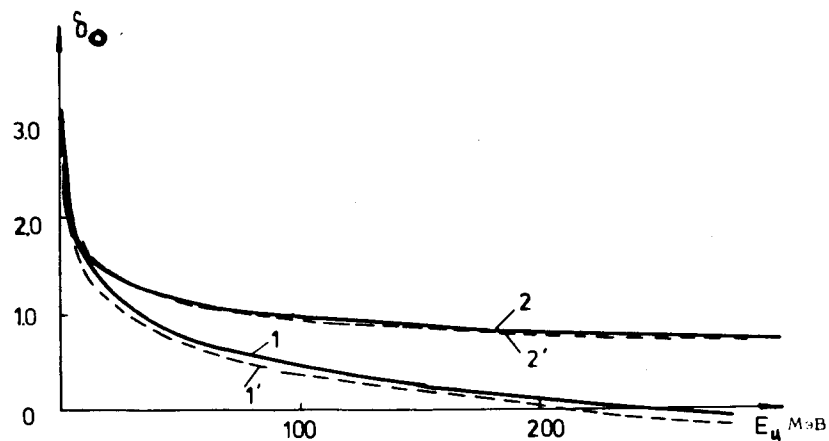


Рис. 2. Зависимость S-фазы рассеяния от энергии /в ц.м./ для потенциалов МТ /1 и 1'/ и Юкавы /2 и 2'/. 1, 2 - релятивистская фаза, 1' и 2' - нерелятивистская фаза.

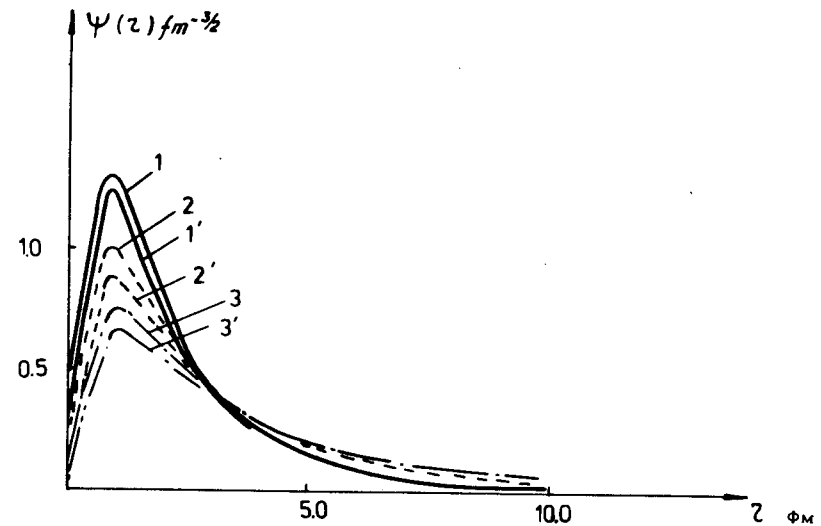


Рис. 3. Волновая функция связанного состояния двух частиц в зависимости от величины отталкивающей части потенциалов МТ, найденная из решения уравнений К /кривые 1, 2, 3/ и ЛШ /кривые 1', 2', 3'/. 1 и 1' -  $\lambda_1 = 1458,05$  МэВ, 2 и 2' -  $\lambda_1 = 1603,85$  МэВ, 3 и 3' -  $\lambda_1 = 1749,66$  МэВ.

Таблица 1

Сходимость по энергии связи дейтрона для потенциала Юкавы и значения низкоэнергетических характеристик взаимодействия двух частиц для потенциалов Юкавы, Малфлиета-Тюна

Потенциал	N	$\epsilon$ , МэВ	$a$ , ФМ
Юкавы	6	2,225	
	8	2,294	
	10	2,304	5,34
МТ	10	2,707	5,12

Таблица 2

Сходимость по амплитуде рассеяния (в ФМ) для (релятивистский потенциал Юкавы, один из бейтмановских разрезов зависит от энергии)

E, МэВ	5	50	100	200	300
N					
6	0,108	0,385	0,409	0,404	0,383
8	0,107	0,381	0,407	0,406	0,388
10	0,108	0,386	0,411	0,406	0,389

Таблица 3

Зависимость энергии связи двух частиц от величины отгалкивающей части потенциала МТ

$\lambda_1$ , МэВ	1458,05	1603,75	1749,66	1895,46
$\epsilon_k$ , МэВ	2,707	1,243	0,418	0,104
$\epsilon_{лш}$ , МэВ	2,309	0,868	0,248	0,043
$\frac{\epsilon_k - \epsilon_{лш}}{\epsilon_{лш}}$	0,17	0,43	0,69	1,42

Таблица 4

Внемассовые элементы A (k, k/2, Z), найденные из решения уравнения Кадышевского и Липмана-Швингера для потенциала Юкавы ( $\ell=0, N=10$ )

Z, МэВ	k, ФМ	$Re A_k \times 10^{-2}$ ФМ	$Re A_{лш} \times 10^{-2}$ ФМ	$Im A_k \times 10^{-2}$ ФМ	$Im A_{лш} \times 10^{-2}$ ФМ
10	1,0	0,458	0,457	-8,848	-8,899
	3,0	-1,293	-1,282	-1,829	-1,723
	5,0	-0,683	-0,610	-0,467	-0,384
100	1,0	-3,235	-3,141	-1,857	-1,631
	3,0	-0,957	-0,907	-1,333	-1,214
	5,0	-0,642	-0,577	-0,477	-0,370
300	1,0	-4,655	-4,413	-0,461	-0,363
	3,0	-0,737	-0,632	-0,632	-0,545
	5,0	-0,496	-0,384	-0,491	-0,334



$N=6$ . Значительное отклонение решения уравнения Кадышевского от решения нерелятивистского уравнения Липпмана-Швингера, как это видно из таблицы 4, наблюдается для немассовых матричных элементов матрицы  $A$ , где оно достигает 40%. Это обстоятельство также может служить указанием на важную роль релятивистских эффектов в многочастичных системах.

С потенциалом  $\bar{V}_2$  исследовалось поведение характеристик связанного состояния. В таблице 3 показано влияние релятивистских эффектов в зависимости от величины отталкивающей части потенциала на величину энергии связи. Наблюдается значительный рост релятивистских эффектов при сравнительно плавном увеличении отталкивания. На рис. 3 показана волновая функция связанного состояния в  $r$ -представлении. Как и для энергии связи, разность волновых функций /релятивистской и нерелятивистской/ в максимуме возрастает с ростом отталкивания. Причем нерелятивистская волновая функция быстрее "выталкивается" из области действия потенциала, чем релятивистская, когда отталкивание возрастает.

Рассмотрение рассеяния в потенциале  $\bar{V}_2$  обнаруживает значительное влияние релятивизма:

$$(\delta_0^{\text{рел}} - \delta_0^{\text{нерел}}) / \delta_0^{\text{нерел}} \approx 25\%$$

при  $E = 100 \text{ МэВ} / \text{см. рис. 2/}$ .

#### Литература

1. F. Coester. *Helv. Phys. Acta*, 38, 7 (1965);  
G. Schierholz and S. Wagner. *Nucl. Phys.*, B32, 306 (1971); С. Н. Соколов. *ДАН СССР*, 221, 809 /1975/.
2. E. E. Salpeter and H. A. Bethe. *Phys. Rev.*, 84, 1232 (1951).
3. S. Mandelstam. *Proc. Roy. Soc.*, SA, No. 1211, v. 237, p. 496 (1956).
4. A. Logunov and A. Tavkhelidze. *Nuovo Cim.*, 29, 380 (1963);  
V. G. Kadyshevsky. *Nucl. Phys.*, B6, 125 (1968);  
F. Gross. *Phys. Rev.*, 186, 1448 (1969);  
H. Cohen. *Phys. Rev.*, D2, 1738 (1970);

R. H. Thompson. *Phys. Rev.*, D1, 1738 (1970);  
K. Erkelenz and K. Holinde. *Nucl. Phys.*, A194, 161 (1972).

5. G. E. Brown and A. D. Jackson. *Lectures at the Niels Bohr Institute. Part II*, 1973-1974.
6. H. Bateman. *Proc. Roy. Soc.*, A100, 441 (1922);  
Б. Ахмадходжаев, В. Б. Беллев, Е. Вжеционко. *ЯФ*, 11, с. 1016 /1970/.
7. I. V. Amirkhanov, V. E. Grechko, R. K. Dementjev. *Preprint JINR*, E2-7873, Dubna, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел  
25 декабря 1975 года.