СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 9405

А.Б.Борисов

ЛАГРАНЖЕВА ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ПОЛЯ РЕЛЯТИВИСТКИХ СТРУН. II.

1975

P2 - 9405

А.Б.Борисов

ЛАГРАНЖЕВА ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ПОЛЯ РЕЛЯТИВИСТКИХ СТРУН. II.

Введение

Во второй части статьи [1] мы обсудим взаимодействие функциональных полей. Будет рассмотрена ковариантная вершина, которая описывает слияние двух струн в одну. Тогда две начальные струны могут быть параметризованы одним параметром. Для конкретных расчетов удобно рассмотреть лагранжиан взаимодействия в системе бесконечного импульса.

Матричные элементы вершины между возбужденными состояниями функциональных полей выражаются через матрицы перекрытия. В приложении выведен ряд соотношений между функциями Неймана /при фиксированных временах/ и матрицами перекрытия. Эти соотношения определяют матричные элементы вершины через функции Неймана и показывают ее эквивалентность трехреджионной вершине, полученной Мандельстамом функциональными методами в первично-квантованном формализме. Мы надеемся, что ковариантный лагранжев подход окажется полезным в исследовании спонтанного нарушения симметрий в дуальных моделях и построении новых моделей адронных взаимодействий.

Взаимодействие функциональных полей

Взаимодействие протяженных объектов [2-5] должно, сохраняя структуру струны, индуцировать переходы между состояниями. Основное требование к лагранжиану взаимодействия, кроме пуанкаре-инвариантности,- это инвариантность к группе репараметризаций струны

$$\bar{\lambda} = \lambda + \epsilon g(\lambda) \qquad x_\mu(\lambda) = \bar{x}_\mu(\bar{\lambda})$$
$$\Phi(x(\lambda)) = \Phi(\bar{x}(\lambda)). \qquad /1/$$

Рассмотрим взаимодействие трех полей. Простейшая его форма:

$$S_{int} = \alpha \int D x^1(\lambda_1) D x^2(\lambda_2) D x^3(\lambda_3) K(x^3(\lambda_3), x^1(\lambda_1), x^2(\lambda_2)) \cdot$$

$$\cdot \Phi(x^3(\lambda_3)) \Phi(x^1(\lambda_1)) \Phi(x^2(\lambda_2)) + \text{перестановки}, \qquad /2/$$

где $x^i(\lambda_i)$, $i = 1,2,3$ - функции, описывающие соответствующие струны. Ядро $K(x^3(\lambda_3), x^2(\lambda_2), x^1(\lambda_1))$ должно быть инвариантным по отношению к группе репараметризаций и уточняется ниже. Пусть взаимодействие имеет характер объединения струн $x^1(\lambda_1)$ и $x^2(\lambda_2)$ в третью. Иными словами, мы считаем, что на некоторой пространственно-подобной поверхности выполняются условия

$$x^3(\lambda_3) = \begin{cases} x^1(\lambda_1) & \lambda_3 \in [0, a) \\ x^2(\lambda_2) & \lambda_3 \in (a, 2\pi]. \end{cases} \qquad /3/$$

Совпадение концов первой $x_1(2\pi)$ и второй струны $x_2(0)$ не предполагается. Функции $x^3(\lambda_3)$ определены на отрезке $[0, 2\pi]$ с выколотой точкой a.

Отображение $\lambda_3 \to x_3(\lambda_3)$ определено с точностью до автоморфизмов этого интервала, имеющих вид

$$\bar{\lambda}_3 = \lambda_3 + \epsilon g(\lambda_3) \qquad g(a) = 0. \qquad /4/$$

Параметризационно-инвариантное ядро имеет вид

$$K(x^3(\lambda_3), x^2(\lambda_2), x^1(\lambda_1)) = \int_0^{2\pi} da\, \delta(x^3_\mu(\lambda_3) - \theta(a-\lambda_3) x^2_\mu(\lambda_2) -$$
$$- \theta(\lambda_3 - a) x^1_\mu(\lambda_1)), \qquad /5а/$$

где λ_3, λ_2 связаны с λ_1 соотношениями

$$\lambda_3 = -(1 - \frac{a}{2\pi})\lambda_1 + 2\pi, \ \lambda_1 \in [0, 2\pi); \ \lambda_3 = \frac{-a}{2\pi}(\lambda_2 - 2\pi),$$

$$\lambda_2 \in (0, 2\pi]. \qquad /5б/$$

Вводя матрицы "перекрытия"

$$(A_{31})_{mn} = \int_a^{2\pi} \frac{d\lambda_3}{2\pi} f_m(\lambda_3) f_n(\lambda_1) = (A_{13})_{nm}$$

$$(A_{32})_{mn} = \int_0^a \frac{d\lambda_3}{2\pi} f_m(\lambda_3) f_n(\lambda_2) = (A_{23})_{nm}, \qquad /6/$$

мы переписываем функционал /5а/ в виде

$$K(x^3, x^2, x^1) = \int_0^{2\pi} da \prod_{n=0}^{\infty} \delta(x^\mu_{3n} - (A_{31})_{nm} x^\mu_{1m} - A^{32}_{nm} x^\mu_{2m}). \qquad /7/$$

Для конкретных расчетов необходимо рассмотреть /7/ в определенной калибровке.

Рассмотрим S_{int} в системе бесконечного импульса $S_{int} = \int du\, V(u)$, где

$$V(u) = \int \prod_{i=1}^{3} dv_i\, D\vec{x}_i(\lambda) K(v_1, v_2, v_3, \vec{x}_1(\lambda_1), \vec{x}_2(\lambda_2), \vec{x}_3(\lambda_3)) \cdot$$

$$\cdot \Phi(x_3(\lambda_3)) \Phi(x_2(\lambda_2)) \Phi(x_1(\lambda_1)) + \text{перестановки}$$

$$K = \delta(v_3 - (1 - \frac{a}{2\pi}) v_1 - \frac{a}{2\pi} v_2) \prod_{n=0}^{\infty} \delta(\vec{x}_{3n} - (A_{31})_{nm} \vec{x}_{1m} -$$

$$-(A_{32})_{nm}\vec{x}_{2m}) \equiv \delta(v_3 - (1-\frac{a}{2\pi})v_1 - \frac{a}{2\pi}v_2)\,\tilde{K}\,. \qquad /8/$$

Наличие первой δ-функции в /8/ говорит о том, что струны взаимодействуют так, что значение $a \in \lambda_3$ оказывается связанным с отношением p_v компонент функционалов $\Phi(x^3)$ и $\Phi(x^1)$ или $\Phi(x^3)$ и $\Phi(x^2)$. Для сравнения с формой взаимодействия, предложенной Каку и Киккавой/2/, нужно представить $V(u)$ через фурье-компоненты $\Phi^+_{p_v}(u, x(\lambda))$ и $\Phi^-_{p_v}(u, x(\lambda))$.

$$\Phi(u, v, \vec{x}(\lambda)) = \int \frac{dp_v}{p_v}\theta(p_v)[e^{ivp_v}\Phi^+_{p_v}(u, \vec{x}(\lambda)) + \text{э.с.}]\,.$$

Тогда ядро $\tilde{K}$ можно представить в форме δ-функционала от поперечных переменных $x_i(\tilde{\lambda}_i)$, где $0 < \tilde{\lambda}_i < 2p_{v_i}$. Преобразованная вершина будет эквивалентна вершине, введенной в работе /2/, если параметризацию λ_3 /5б/ изменить так, чтобы $x_3(0) = x_1(0)$. Матричные элементы трехреджионной вершины впервые получены С.Мандельстамом/6/ функциональными методами в первичноквантованном формализме. Точное вычисление матричных элементов вершин во вторичном квантовании усложняется необходимостью нахождения обратных бесконечномерных матриц и т.п. Авторы статьи/2/ косвенными методами показывают, что их конечновременные вершины при асимптотически больших временах переходят в вершины Мандельстама/6/, которые выражаются через функции Неймана.

В приложении производится точное вычисление матричных элементов вершины.

Мы показываем, что матричные элементы имеют вид:

$$<0\,|\,V(0)|\,n^i_\alpha, m^j_\beta, \ell^k_\gamma> = <0|-\frac{1}{2}\vec{a}^{\,i}_m(\tilde{N}^{ik}_{M})_{mn}\vec{a}^{\,k}_n + \qquad /9/$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\alpha'}}\vec{a}^{\,r}_m(\tilde{N}^{rS}_M)_{m0}\vec{p}_s - \frac{\tau_b}{2\alpha'}(\sum_{i=1}^{3}\frac{(\vec{p}^{\,i}_0)^2}{2p_{v_i}} - \bar{H}^i_0)\,|\,n^i_\alpha, m^j_\beta, \ell^k_\gamma>.$$

Таким образом, теория функциональных полей /в трехполевом приближении/ может быть понята как лагранжева формулировка дуальных моделей. Спектр состояний поля $\Phi(x(\lambda))$ совпадает со спектром струны, и матричные элементы вершины определяются фурье-компонентами функций Неймана - пропагаторов струн. Ковариантный лагранжев подход дает возможность определения пуанкаре-инвариантных состояний поля $\Phi(x(\lambda))$, соответствующих минимуму потенциальной энергии взаимодействия полей, и построения модели, стабильной к бесконечно малому возмущению. Некоторые вопросы теории функциональных полей мы здесь не обсуждаем. Как показано в /2/, для получения полной дуальной четырехчастичной амплитуды необходимо контактное четырехполевое взаимодействие. Пуанкаре-инвариантность подробно обсуждалась только в свободном случае. Все эти вопросы требуют специального рассмотрения.

В заключение автор благодарит В.И.Огиевецкого, Б.М.Барбашова, А.Г.Мулкиджаняна, В.В.Нестеренко, В.Н.Первушина за интерес к работе и обсуждения.

Приложение

В системе бесконечного импульса действие S_{int} имеет форму

$$S_{int} = \int du \prod_{i=1}^{3} d^{*}v_i\, \mathcal{D}\vec{x}_i(\lambda)\, K(\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1, v_1, v_2, v_3)\,.$$

$$\cdot[\Phi^+(x_3)\Phi^-(x_2)\Phi^-(x_1) + \ldots] + \text{перестановки}, \qquad /\Pi 1/$$

$\Phi(x_i)$ являются нормированными решениями уравнения /21/ части I :

$$\Phi(x) = \Phi^+ + \Phi^- =$$

$$= \int\frac{dp_v}{p_v}\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{25/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{24}\sum_{\{\ell^i_n\}} A^+(p_v, \vec{p}, M^2)\cdot e^{ivp_v - \vec{x}\vec{p} + iup_u}\,\cdot$$

$$\cdot\,\Phi(\ell^i_n) + \text{э.с.}$$

Рассмотрим матричные элементы между произведением состояний

$$|p_{v_3}, \vec p_3, n^i_\alpha\rangle, |p_{v_2}, \vec p_2, m^j_\beta\rangle, |p_{v_3}, \vec p_1, \ell^k_\gamma\rangle \; (p_{v_3}<0; p_{v_1}, p_{v_2}>0).$$

Используя производящую функцию для полиномов Эрмита и выполняя интегрирование, нетрудно показать, что матричный элемент вершины можно записать через операторы рождения и уничтожения $[a^i_n, a^{+j}_m] = n\,\delta_{mn}\,\delta_{ij}$, действующие на нормированное состояние с числами заполнения n, m – $|n^i_\alpha, m^j_\beta, \ell^k_\gamma\rangle$:

$$\langle 0|V(0)|n^i_\alpha, m^j_\beta, \ell^k_\gamma\rangle = \langle 0|\exp\Big[\frac{1}{2}\vec b_k (B^{-1}_{3++})_{ks}\vec b_s - \frac{\vec b_k (B^{-1}_3)_{kn}\theta_n}{\theta_n (B^{-1}_3)_{ns}\theta_s}\,\frac{\tilde{\vec p}}{\sqrt{\alpha'}} - \frac{1}{2}\,\frac{\tilde{\vec p}^{\,2}}{\alpha'}\big(\theta_n (B^{-1}_3)_{ns}\theta_s\big)^{-1} -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\vec a_{\alpha n}\vec a_{\alpha n}}{2n}\Big]\,\delta(p_{v_1}+p_{v_2}+p_{v_3})\,\delta(\vec p_1+\vec p_2+\vec p_3)\cdot$$

$$\cdot|n^i_\alpha, m^\beta_\gamma, \ell^k_\gamma\rangle\cdot\alpha\,(\det B_{3++})^{-d/2} + \text{перестановки}, \qquad /П3/$$

где введены сокращенные обозначения

$$(B^{-1}_{3++})_{ks} = (B^{-1}_3)_{ks} - \frac{(B^{-1}_3)_{kt}\,\theta_t\,(B^{-1}_3)_{fs}(A^{31})_{f0}}{(A^{31})_{n0}(B^{-1}_3)_{nk}\,A^{31}_{k0}}$$

$$(B^{-1}_3)_{mn} = \frac{1}{A_{31}\frac{1}{N}A_{13} + A_{32}\frac{1}{N}A_{23} + \frac{1}{N}} \qquad /П4/$$

$$\tilde p = p_{10} + (A_{31})_{00}\,p_{30} \qquad \theta_n = (A_{31})_{n0}$$

$$\vec b_k = \sqrt{2}\,\Big(\frac{1}{N}\vec a^3 - A_{31}\frac{1}{N}\vec a^1 - A_{32}\frac{1}{N}\vec a^2\Big), \quad g = 2\alpha'$$

$$\Big(\frac{1}{N}\Big)_{mn} = \frac{1}{n}\,\delta_{mn},$$

Суммирование по повторяющимся индексам от 1 до ∞.

Найдем связь коэффициентов в экспоненте матричного элемента /П3/ с фурье-компонентами функций Неймана /при временах τ_b /, имеющими вид

$$N^{ik}_{mn} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_m(\lambda_i)\,f_n(\lambda_k)\,[\ln|Z(\lambda_i)-Z(\lambda_k)|\cdot|Z(\lambda_i) - \qquad /П5/$$

$$- \bar Z(\lambda_k)|]\,\frac{d\lambda_i}{2\pi}\,\frac{d\lambda_k}{2\pi} \equiv -\frac{1}{N}\delta_{mn}\,\delta_{ik} + (N^{ik}_M)_{mn} \qquad i,k = 1,2,3,$$

где комплексная переменная Z определяется из выражений

$$\frac{i\lambda_3}{2} = -\Big(1-\frac{a}{2\pi}\Big)\ln(z-1) - \frac{a}{2\pi}\ln z - \frac{\tau_b}{2p_{v_3}} + i\pi$$

$$\lambda_2 = -\frac{2\pi}{a}\lambda_3 + 2\pi$$

$$\lambda_1 = \frac{-1}{1-\frac{a}{2\pi}}(\lambda_3 - 2\pi)$$

$$\frac{r_b}{2p_{v_3}} = \frac{p_{v_1}}{p_{v_3}} \ln\left(-\frac{p_{v_1}}{p_{v_3}}\right) + \frac{p_{v_2}}{p_{v_3}} \ln\left(-\frac{p_{v_2}}{p_{v_3}}\right),$$

$$\frac{a}{2\pi} = -\frac{p_{v_2}}{p_{v_3}} . \qquad /П6/$$

Явное выражение $(N^{ik}_M)_{mn}$ приведено ниже. Фурье-компоненты N^{ik}_{mn} можно записать в виде контурного интеграла

$$N^{ik}_{mn} = \frac{1}{\pi^2 mn} \oint_{z_i} \oint_{z_k} \sin m \frac{\lambda_i(z)}{2} \frac{1}{(z-z')^2} \sin n \frac{\lambda_k(z')}{2} dz\,dz', \qquad /П7/$$

где $\frac{\lambda_i(z)}{2}$ определяется /П6/ и интегрирование проводится по контурам, окружающим точки $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, $z_3 = \infty$. Тогда можно получить следующие соотношения между различными компонентами N^{ik}_{mn} и матрицами перекрытия A_{31} и A_{32} /6/:

$$N_{33}\, N\, A_{3j} = -N_{3j}\, N \quad (j = 1,2) \qquad /П8/$$

$$A_{i3}\, N\, N_{3j} = -N_{ij} \quad (i = 1,2,\ j = 1,2,3) \qquad /П9/$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} N^{33}_{nm}(A_{31})_{m0} = \left(1 - \frac{a}{2\pi}\right) N^{31}_{n0} - 2\frac{1}{n}(A_{31})_{n0} \qquad n \neq 0 \quad /П10/$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_{13})_{0n} N^{31}_{n0} = 2\frac{r_b}{p_{v_1}} \frac{a}{2\pi}\left(1 - \frac{a}{2\pi}\right) \qquad /П11/$$

$$(A_{13} N_{31})_{mn} = \left(1 - \frac{a}{2\pi}\right)(N_{11})_{mn} \qquad m,n \neq 0 \qquad /П12/$$

$$(A_{23} N_{31})_{mn} = \frac{a}{2\pi}(N_{21})_{mn} \qquad m,n \neq 0 \qquad /П13/$$

Для вывода этих соотношений деформируем контур в /П7/ так, чтобы получить равномерную сходимость под знаком интеграла. Дальнейшее суммирование и интегрирование по одной из Z -переменных определяет правые части /П8-П13/. Детальные выкладки для краткости изложения опущены.

Методы нахождения матриц B_3^{-1} и B_{3++}^{-1} подробно обсуждались в[7]. Мы должны обратить уравнение

$$N\, N_{33} \cdot N\, B_3\, N\, N_{33}\, N = -2N\, N_{33}\, N, \qquad /П14/$$

которое можно вывести, используя /П8/ и соотношение $N(N_M)_{3i} N(N_M)_{3i} N = N$ [3]. Так как матрица N_{33} является сингулярной: $N_{33} \cdot N \cdot \theta = 0$, то уравнение /П14/ определяет $B_{3++}^{-1}(B_{3++}^{-1}\theta = 0)$

$$B_{3++}^{-1} = -\frac{1}{2} N\, N_{33}\, N . \qquad /П15/$$

Тогда, согласно соотношениям /П8-П9/,

$$\vec{b}_k (B_{3++}^{-1})_{ks}\, \vec{b}_s - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{a}^{\,i}_n\, \vec{a}^{\,i}_n}{n} = -\frac{1}{2} \vec{a}^{\,i}_n (N^{ik}_M)_{nm}\, \vec{a}^{\,k}_m . \qquad /П16/$$

Удобно выразить $\theta B_3^{-1}\theta$ и $B_3^{-1}\theta$ через произведение θ_n и B_{3++}^{-1}

$$\theta B_3^{-1} \theta = \theta^2 \theta^2 [\theta E_3 \theta - \theta B_3 B_{3++}^{-1} B_3 \theta]^{-1}$$

$$\frac{B_3^{-1}\theta}{\theta B_3 \theta} = -\frac{(B_{3++})^{-1} B_3 \theta - \theta}{\theta^2}; \quad \theta^2 = \frac{a}{2\pi}\left(1 - \frac{a}{2\pi}\right). \qquad /П17/$$

Используя /П10/ и /П11/, нетрудно определить и остальные члены в экспоненте /П3/:

$$\frac{\vec{b}_k B_3^{-1}\theta}{\theta B_3 \theta} = -\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \vec{a}^{\,m}_r (N^M_{rs})_{m0}\, \vec{p}_s$$

$$-\tilde{p}^2\,(2\alpha'\,\theta\,B_3\,\theta)^{-1} = -\tau_b \sum_{i=1}^{3} \frac{(p_0^i)^2}{2p_{v_i}}\,\frac{1}{2\alpha'}. \qquad /П18/$$

Прямым интегрированием /П7/ можно вычислить коэффициенты $(N_M^{ik})_{mn}$:

$$(N_M^{ik})_{mn} = -\frac{p_{v_1}\,p_{v_2}\,p_{v_3}}{p_{v_i}\,p_{v_k}}\,\bar{f}_m\Big(-\frac{p_{v_{i+1}}}{p_{v_i}}\Big)\bar{f}_n\Big(-\frac{p_{v_{k+1}}}{p_{v_k}}\Big)\times$$

$$\times\frac{mn}{m p_{v_k} + n p_{v_i}} \qquad /П19/$$

$$N_{m0}^{ik} = \sqrt{2}\,\frac{p_{v_1}\,p_{v_2}}{p_{v_i}\,p_{v_k}}\,\bar{f}_m\Big(-\frac{p_{v_{i+1}}}{p_{v_i}}\Big)C_s \equiv \sqrt{2}\,(N_M^{ik})_{m0} \qquad /П20/$$

$$N_{00}^{11} = \frac{\tau_b}{2p_{v_1}}. \qquad /П21/$$

Тогда "временную" зависимость $e^{m\frac{\tau_b}{2p_{v_i}}}$ в матричных элементах /П3/ удобно выразить в форме

$$<0|\,V(0)\,|n_\alpha^i, m_\beta^j, \ell_\gamma^k> = <0|\exp -\frac{1}{2}\vec{a}_m^{\,i}\,(\tilde{N}_M)_{mn}^{ik}\,\vec{a}_n^{\,k} + \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}\vec{a}_m^{\,r}\,(\tilde{N}_M^{rs})_{m0}\vec{P}_s$$

$$-\frac{\tau_b}{2\alpha'}\Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{(\vec{p}_0^{\,i})^2}{2p_{v_i}} - 2\alpha'\cdot\vec{a}_m^{\,+i}\,\vec{a}_m^{\,i}\Big)\,|\,n_\alpha^i,\ m_\beta^j, \ell_\gamma^k>$$

$$\frac{1}{\det(B_{3++})^{d/2}} \qquad /П22/$$

$$(\tilde{N}_M^{ik})_{mn} = (N_M^{ik})_{mn}\ e^{-m\frac{\tau_b}{2p_{v_i}}}\ e^{-n\frac{\tau_b}{2p_{v_k}}} \qquad /П23/$$

$$H_0^i = 2\alpha'\cdot\vec{a}_m^{\,i}\,\vec{a}_m^{\,i}\,. \qquad /П24/$$

Как обсуждалось в первой части, для пуанкаре-инвариантности необходимо заменить H_0^i на $H_0^i + \mu_0^2$.

Отбрасывая расходящийся множитель $\det(B_{3++})^{d/2}$ и вводя в H_0^i член с μ_0^2, мы получаем вершину Мандельстама. Заметим, что эти дополнительные множители могут быть введены сразу в лагранжиан /2/ без изменения его инвариантности относительно репараметризации.

Литература

1. *А.Б.Борисов. ОИЯИ, Р2-9404, Дубна, 1975.*
2. *M.Kaku, K.Kikkawa. Phys.Rev., D10, 1110 (1974).*
3. *E.Cremmer, J.L.Gervais. Preprint LPTHE 74/25, June, 1974.*
4. *Н.В.Борисов, М.В.Иоффе, М.И.Эйдес. ЯФ, 21, 655 /1975/.*
5. *C.Marshall, P.Ramond. Nucl.Phys., B85, 375 (1975).*
6. *S.Mandelstam. Nucl.Phys., B64, 205 (1973).*
7. *I.Hopkinson, R.Tucker, P.Collins. Preprint DL/P227, January, 1975.*

Рукопись поступила в издательский отдел 23 декабря 1975 года.