СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 9404

А.Б.Борисов

ЛАГРАНЖЕВА ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ПОЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СТРУН. 1

1975

Р2 - 9404

А.Б.Борисов

ЛАГРАНЖЕВА ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ПОЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СТРУН. 1

Введение

В последнее время наблюдается прогресс в развитии теории поля релятивистских струн /ТПРС/ [1–5] - простейших протяженных объектов в пространстве-времени. Обобщая теорию поля точечных объектов, где каждой точке x_μ пространства-времени ставится в соответствие определенное число $\Phi(x)$, эта теория сопоставляет каждой конфигурации струны определенное число - функционал траектории в пространстве-времени.

Ожидается, что полная и непротиворечивая ТПРС приведет к лагранжевой формулировке дуальных моделей, которая позволит исключить в этих моделях тахион спонтанным нарушением симметрии. Кроме того, лагранжева формулировка ТПРС полезна в конструировании новых моделей с внутренними степенями свободы.

Наиболее последовательный подход к лагранжевой формулировке ТПРС был развит Рамо [4–5]. Он предложил выводить ковариантную динамику функциональных полей из принципа инвариантности действия к группе репараметризаций струны. Рассматривая функциональные поля, определенные на замкнутых струнах, Рамо построил гамильтонов формализм и вторичное квантование функционалов в системе бесконечного импульса.

Целью настоящей работы является теоретико-полевая формулировка открытой струны. В первой главе мы рассматриваем свободные поля, обсуждаем трансформационные свойства их относительно группы репараметризаций струны, конструируем действие для функциональных полей. Предложено два параметризационно-инвариантных лагранжиана, которые имеют одинаковые частные решения. Подобно Рамо[5], мы налагаем требование инвариантности функциональных полей относительно репараметризаций струны. Во второй главе мы квантуем функциональные поля в системе бесконечного импульса. Согласованность уравнений движения с гамильтоновым формализмом и требование эрмитовости определяют генераторы группы Пуанкаре с точностью до членов с произвольной постоянной, которая, в свою очередь, фиксируется требованием пуанкаре-инвариантности. Приводится решение уравнений движения в системе бесконечного импульса.

Траектории, поля, лагранжиан

Мы рассматриваем одномерный объект в пространстве-времени /струну/ как бесконечный набор пространственно-временных точек - траекторию в пространстве-времени. Введем пуанкаре-инвариантный параметр $\lambda (\lambda \in R)$, однозначно соответствующий каждой точке траектории $x_\mu(\lambda)$. /Равным образом мы можем выбрать другой параметр σ с областью R', так что траектория в пространстве-времени будет задаваться другими функциями $y_\mu(\sigma)$/. Удобно выбрать интервал $0 \le \lambda \le 2\pi$ и им параметризовать наш объект. В этом интервале определена ортонормированная система функций

$$f_n(\lambda) = \delta_{n0} + \sqrt{2}\ \cos n\frac{\lambda}{2}; \quad n > 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\lambda)\, f_n(\lambda') = 2\pi\,\delta(\lambda - \lambda')$$

$$\int_0^{2\pi} f_n(\lambda)\, f_m(\lambda)\frac{d\lambda}{2\pi} = \delta_{nm}\ .$$

Тогда фурье-коэффициенты разложения $x_\mu(\lambda) = x_{\mu n} f_n(\lambda)$ характеризуют траекторию в пространстве-времени. Введем дифференциальный оператор /функциональную производную/

$$\frac{\delta}{\delta x_\mu(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_{\mu n}} f_n(\lambda)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x_\mu(\lambda)}, x_\nu(\lambda')\right] = 2\pi\ \delta(\lambda - \lambda')\,\delta_{\mu\nu}\,.$$

Параметр λ определен с точностью до автоморфизма интервала $[0, 2\pi]$, оставляющего неподвижными конечные точки этого интервала. Наиболее общее преобразование имеет вид

$$\bar\lambda = \lambda + \epsilon\, g(\lambda), \tag{1}$$

где произвольная функция $g(\lambda)$ подчиняется только соотношению $g(0) = g(2\pi) = 0$. Независимость описания объекта от выбранной параметризации $(x_\mu(\lambda) = \bar x_\mu(\bar\lambda))$ требует изменения $x_\mu(\lambda)$ при преобразованиях $\lambda \to \bar\lambda$

$$\bar x_\mu(\lambda) = x_\mu(\lambda) - \epsilon\, g(\lambda)\, x'(\lambda) \quad \left(x'_\mu = \frac{d}{d\lambda} x_\mu(\lambda)\right)$$

$$\delta x_{n\mu} = \epsilon \int f_n(\lambda)\, g(\lambda)\, \partial_\lambda f_m(\lambda) \frac{d\lambda}{2\pi}\, x_{m\mu}. \tag{2}$$

В теоретико-полевом описании протяженных объектов мы ставим в соответствие каждой траектории пространства-времени некоторое число $\Phi(x(\lambda)) = \Phi(x_0, x_1, x_2, \dots)$.

Трансформационные свойства функционалов $\Phi(x(\lambda))$ относительно группы репараметризаций предполагаются простейшими. Рассматриваются лишь поля, которые являются инвариантами:

$$\Phi(x(\lambda)) = \Phi(\bar x(\lambda)). \tag{3}$$

Таким образом, на поле $\Phi(x(\lambda))$ наложено важное для дальнейшего изложения ограничение

$$\delta\Phi = \Phi(x_\mu(\lambda) - \epsilon\, g(\lambda)\, x'_\mu(\lambda)) - \Phi(x(\lambda)) = 0$$

или в дифференциальной форме

$$x'_\mu \frac{\delta}{\delta x_\mu(\lambda)} \Phi(x(\lambda)) = 0 . \qquad /4/$$

При сдвигах и вращениях траектории в пространстве-времени

$$x_\mu(\lambda) \to x_\mu(\lambda) + a_\mu + \epsilon_{\mu\nu} x_\nu(\lambda) = \bar{x}(\lambda) \qquad /5/$$

мы рассматриваем простейшую форму преобразования функционала: $\Phi(\bar{x}(\lambda)) = \Phi(x(\lambda))$, т.е. поле Φ считается скаляром. Тогда бесконечно малые преобразования полей индуцируются генераторами группы Пуанкаре следующего вида:

$$P_\mu = \frac{\partial}{\partial x_{0\mu}}$$

$$M_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n\mu} \frac{\partial}{\partial x_{n\nu}} - (\mu \to \nu) . \qquad /6/$$

Наиболее общее выражение для действия имеет вид $S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \mathfrak{D}x(\lambda) \mathfrak{L}(\Phi, \frac{\delta\Phi}{\delta x_\mu})$, где интегрирование распространяется по таким конфигурациям траектории, относительные расстояния между точками которых являются пространственно-подобными. Параметры τ_i и τ_f однозначно соответствуют начальным и конечным гиперповерхностям, на которых лежат траектории в пространстве-времени. Мера интегрирования $\mathfrak{D}x(\lambda)$ предполагается параметризационно-инвариантной. Тогда лагранжиан должен быть пуанкаре- и параметризационно-инвариантным. Как нетрудно убедиться, простейшие лагранжианы, удовлетворяющие этим требованиям, имеют вид

$$\mathfrak{L} = \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x'^2}} \left(\frac{\delta\Phi}{\delta x_\mu} \frac{\delta\Phi}{\delta x_\mu} + g^2 x'^2 \Phi\Phi \right) \qquad /7/$$

$$\mathfrak{L} = \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{\delta\Phi}{\delta x_\mu} \frac{\delta\Phi}{\delta x_\mu} + g^2 x'^2 \Phi\Phi} , \qquad /8/$$

где $x'^2 = x'_\mu \cdot x'_\mu$ и g - постоянная соответствующей размерности. Стандартным способом нетрудно получить уравнения движения для обоих лагранжианов:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{2\pi\sqrt{x'^2}} \left(\frac{\delta^2}{\delta x^2} \Phi - x'^2 g^2 \Phi \right) = 0 \qquad /9/$$

и

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{\left(\frac{\delta}{\delta x^2} \Phi - g^2 x'^2 \Phi \right)}{\left(\frac{\delta\Phi}{\delta x_\mu} \frac{\delta\Phi}{\delta x_\mu} + g^2 x'^2 \Phi\Phi \right)^{1/2}} = 0. \qquad /10/$$

Интересно, что оба уравнения имеют одинаковое решение, вообще говоря, частное, определяемое из условия

$$\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2} - g x'^2 \Phi = 0, \qquad /11/$$

которое согласуется с условием инвариантности поля Φ по отношению к репараметризациям: $x'_\mu \frac{\delta}{\delta x_\mu} \Phi = 0$.

Нахождение классических решений /11/ с учетом $x'_\mu \frac{\delta}{\delta x_\mu} \Phi = 0$ эквивалентно определению физических состояний релятивистской струны в ковариантном квантовании[/9/].

В дальнейшем мы ограничимся уравнениями движения, соответствующими более простому лагранжиану /7/.

Квантование

Как подчеркнуто в[5], для квантования нашу систему удобней рассматривать в системе бесконечного импульса[6,7]. Введем переменные $u(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^0(\lambda)-x^{d+1}(\lambda))$; $v(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^0(\lambda)+x^{d+1}(\lambda))$; $\vec{x}(\lambda)=(x^1_,\dots x^d)$. Начальная гиперповерхность для гамильтонова формализма выбирается в форме $u(\lambda)=0$. Из-за связи системы бесконечного импульса и преобразования Лоренца со скоростью света[8] функции, задающие положение траектории, имеют вид $v(\lambda)=v_0\equiv v$. Выбором такой гиперповерхности достигается упрощение функциональной производной $\frac{\delta}{\delta v(\lambda)}$

$$\frac{\delta}{\delta v(\lambda)}\Phi=\frac{\partial}{\partial v}\Phi\,. \qquad /12/$$

Импульс, канонически сопряженный полю Φ, имеет вид:

$$\Pi=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\frac{\partial\Phi}{\partial u}}=\frac{\partial\Phi}{\partial v}C_0(\vec{x})\,,$$

где

$$C_0(\vec{x})=\int\frac{d\lambda}{2\pi\sqrt{\vec{x}'^2(\lambda)}}\,.$$

Квантование достигается наложением коммутационных соотношений

$$[\Phi(0,v,\vec{x}_1(\lambda)),\Pi(0,v',\vec{x}_2(\lambda))]=\frac{i}{2}\delta(v-v')\delta(\vec{x}_1(\lambda)-\vec{x}_2(\lambda)) \qquad /13/$$

$$C_0(\vec{x})[\Phi(0,v,\vec{x}_1(\lambda)),\Phi(0,v',\vec{x}_2(\lambda))]=\frac{1}{4i}\epsilon(v-v')\delta(\vec{x}_1(\lambda)-\vec{x}_2(\lambda)). \qquad /14/$$

Значительные усложнения связаны с тем, что гамильтонианы

$$H=P_u=\int dv\,\mathfrak{D}\vec{x}(\lambda)(\Pi\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\mathfrak{L}) \qquad /15/$$

$$M^{vi}=\int dv\,\mathfrak{D}\vec{x}(\lambda)[x^i_0\mathfrak{L}+\Pi(v_n\frac{\partial}{\partial x^i_n}-x^i_n\frac{\partial}{\partial u_n})\Phi \quad i=1,2,\dots,d \qquad /16/$$

являются функционалами не только Π и Φ, но и производных $\{\frac{\partial\Phi}{\partial u_n}\}_{u_n=0}$. Определение последних должно быть совместно с уравнениями движения функционала Φ в системе бесконечного импульса

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n[2\partial_v\partial_{u_n}\Phi-\langle\frac{\delta^2}{\delta\vec{x}^2}-g\vec{x}'^2\rangle_n\Phi]=0\,, \qquad /17/$$

где

$$C_n=\int_0^{2\pi}f_n(\lambda)\frac{1}{(\vec{x}'^2(\lambda))^{1/2}}\frac{d\lambda}{2\pi}\,.$$

Совместность с уравнениями движения /9/ требует формы

$$\partial_{u_n}\Phi=\partial v^{-1}\frac{1}{2}(\langle\frac{\delta^2}{\partial\vec{x}^2}-g^2\vec{x}'^2\rangle_n+\mathfrak{D}_n)\Phi\equiv\frac{\bar{\delta}}{\delta u_n}\Phi+\frac{1}{2}\partial_v^{-1}\mathfrak{D}_n\Phi\,,$$

где операторы $\mathfrak{D}_n$ подчиняются условию $\sum_{n=0}^{\infty}C_n\mathfrak{D}_n=0$. Без потери общности можно считать

$$\mathfrak{D}_n=f(x)(\langle\frac{\delta\ell n\,C_n}{\delta\vec{x}}\frac{\delta}{\delta\vec{x}}\rangle_n+\bar{\mathfrak{D}}_n)\,, \quad \text{если} \quad \sum_{n=0}^{\infty}C_n\bar{\mathfrak{D}}_n=0\,.$$

Переменная $v(\lambda)$ в гамильтониане /16/ определяется дополнительным условием /4/ в системе бесконечного импульса

$$v'(\lambda)\frac{\partial}{\partial v}\Phi(0,v,\vec x(\lambda)) = \vec x'(\lambda)\frac{\delta}{\delta \vec x(\lambda)}\Phi(0,v,\vec x(\lambda)).$$

Неизвестные величины $\mathfrak{D}_n$ и $f(x)$ определяются требованием эрмитовости генераторов M^{vi}:

$$C_0\partial_v\Phi\left(v_n\frac{\partial}{\partial x_n^i} - x_n^i\frac{\partial}{\partial u_n}\right)\Phi = C_0^{1/2}\,\Phi\left(v_n\frac{\partial}{\partial x_n^i} - x_n^i\frac{\partial}{\partial u_n}\right)C_0^{1/2}\Phi.$$

Это условие определяет $x_n^i\mathfrak{D}_n$:

$$x_n^i\mathfrak{D}_n = \frac{-1}{C_0^{1/2}}\Big[<\frac{\delta \ln C_n}{\delta\vec x}\,\frac{\delta C_0^{-1/2}}{\delta \vec x}>_n + C_0^{-1/2}<\frac{\delta\ln C_n}{\delta\vec x}\,\frac{\delta}{\delta\vec x}>_n +$$

$$+<\frac{\delta^2 C_0^{-1/2}}{\delta\vec x^2}>_n + 2<\frac{\delta C_0^{-1/2}}{\delta\vec x}\,\frac{\delta}{\delta \vec x}>_n + \left(v_n\frac{\partial}{\partial x_n^i}C_0^{-1/2}\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x_n^i}C_0^{-1/2}\right)v_n + \left(v_nC_0^{-1/2}\right)\partial x_n^i. \qquad /18/$$

$\mathfrak{D}_0$ определяется с точностью до постоянной μ_0^2:

$$\mathfrak{D}_0 = <\frac{\delta\ln C_0}{\delta\vec x}\,\frac{\delta}{\delta\vec x}>_0 + \frac12<\frac{\delta^2\ln C_0}{\delta\vec x^2}>_0 -$$

$$-\frac{1}{4C_0^2}<\frac{\delta C_0}{\delta\vec x}\,\frac{\delta C_0}{\delta\vec x}>_0 + \mu_0^2.$$

Константу μ_0^2 можно определить из условия пуанкаре-инвариантности, а именно:

$$[M^{vi},M^{vj}]=0. \qquad /19/$$

Выразив в M^{vi} операторы x_n^i и ∂x_n^i через операторы рождения и уничтожения, при проверке соотношений коммутации можно использовать результаты работы /9/ и доказать, что теория пуанкаре-инвариантна при $d=24$ и

$$\mu_0^2 = g + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k g d}{2}. \qquad /20/$$

Тогда нетрудно получить решение уравнений

$$\frac1i[H,\Phi] = \frac{\partial}{\partial u}\Phi = \frac12 C_0^{\frac12}\partial_v^{-1}\left(<\frac{\delta^2}{\delta\vec x^2} - g^2\vec x'^2>_0 + \mu_0^2\right)C_0^{+\frac12}\Phi \qquad /21/$$

в виде

$$\Phi(u,v,\vec x(\lambda)) = \int\frac{dp_v}{p_v}\theta(p_v)\int\frac{d\vec p}{(2\pi)^{25/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{24}\sum_{\{\ell_n^i\}}[A^+(\vec p_v,\vec p,\ell_n^i)$$

$$/22/$$

$$\times\, e^{i(vp_v-\vec p\vec x)+\frac{iu}{2p_v}(\vec p^2+M^2(\ell_n^i))}\ ]\,C_0^{-1/2}(\vec x)F(\vec x,\ell_n^i), + \text{э.с.}$$

где ℓ_n^i - множество целых положительных чисел /0, 1,2,.../

$$M^2 = M^2(\ell_n^i) = n\,\ell_n^i\,g - \mu_0^2, \qquad \omega_n = n g^{\frac12} \qquad /23/$$

и функции F связаны с полиномами Эрмита $H_{\ell_n^i}(x_n^i\sqrt{\omega_n})$

$$F(\vec x,\ell_n^i) = H_{\ell_n^i}(\sqrt{\omega_n}\,x_n^i)\exp\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_n}{2}\vec x_n\vec x_n. \qquad /24/$$

Спектр состояний поля эквивалентен спектру состояний системы, состоящей из бесконечного числа осцилляторов, нумеруемых индексом $n=1,2,\ldots$ с частотой $\omega_n = n g^{\frac12}$. Решение /22/ не является нормированным по внутренним переменным x_n^i, в дальнейшем мы будем интересоваться функционалами $\Phi' = C_0^{\frac12}\Phi$. Член μ_0^2 в уравнении /21/ нарушает параметризационную инвариантность теории и связан с видоизменением связей, наложенных на квантовое поле Ф, по сравнению с классическими.

Канонические соотношения /13/ эквивалентны следующим:

$$[A^{+}(p_v, \vec{p}, \ell_n^i), A(p_{v'}, \vec{p}', \ell_m'^j] = p_v \delta(p_v - p_{v'}) \delta(\vec{p} - \vec{p}') \times \delta_{\ell_n^i, \ell_m'^j} . \qquad /25/$$

Операторы $A^{+}(p_v, \vec{p}, \ell_n^i)$ и $A^{-}(p_v, \vec{p}, \ell_n^i)$ интерпретируются как операторы рождения и уничтожения состояния поля Ф с определенными значениями p_v , $\vec{p}$ и M^2.

Взаимодействие функциональных полей будет рассмотрено во второй части статьи.

Автор признателен В.И.Огиевецкому, Б.М.Барбашову, А.Г.Мулкиджаняну, В.В.Нестеренко и В.Н.Первушину за обсуждения.

Литература

1. *M.Kaku, K.Kikkawa. Phys.Rev., D10, 1110 (1974).*
2. *E.Cremmer, J.L.Gervais. Nucl.Phys., B76, 209(1974); Preprint LPTHE 74/25, June, 1974.*
3. *Н.Б.Борисов, М.В.Иоффе, М.И.Эйдес. ЯФ, 21, 655 /1975/.*
4. *P.Ramond. John Hopkins University Workshop on Current Problems in High Energy Particle Theory, 1974.*
5. *C.Marshall, P.Ramond. Nucl.Phys., B85, 375 (1975).*
6. *P.A.M.Dirac. Rev.Mod.Phys., 21, 392 (1949).*
7. *F.Rohrlich. Acta Physica Austriaca, Suppl. VIII, 277 (1971).*
8. *J.Kogut, L.Susskind. Phys.Rep., 8C, 75 (1973).*
9. *P.Goddard, J.Goldstone, C.Rebbi, C.B.Thorn. Nucl. Phys., B56, 109 (1973).*

Рукопись поступила в издательский отдел 23 декабря 1975 года.