объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-94-84

Г.Г.Арутюнян*, В.В.Папоян*

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ В ТЕОРИИ ЙОРДАНА – БРАНСА – ДИККЕ

Направлено в журнал «Астрофизика»

*Ереванский государственный университет

1994

Арутюнян Г.Г., Папоян В.В. P2-94-84
Гравитационное поле сосредоточенной массы
в теории Йордана – Бранса – Дикке

Сформулирована задача определения поля тяготения статического, сферически-симметричного самогравитирующего объекта. Небольшое число точных решений уравнений теории ЙБД, имеющих физические приложения, дополнено новым, описывающим внешнее гравитационное поле рассматриваемого тела. Соответствующая калибровка позволяет переписать найденное решение в модифицированных координатах кривизны, однородных, а также других координатах. В частном случае решение совпадает с известным решением Шварцшильда.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод авторов.

Haroutyunian G.G., Papoyan V.V. P2-94-84
Gravitational Field of the Isolated Mass
in Yordan – Brans – Dicke Theory

The problem of determination of the gravitational field inside the static, spherically symmetric self-gravitating object is formulated. A number of exact solutions of the YBD equations are supplemented by the new solutions describing object considered. This solution can be rewritten in the form of modified curvature, uniform and other type coordinates. In the special case, the obtained solution coincides with the well-known Schwarzschild solution.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994

1. Гравитационное взаимодействие обладает чрезвычайно малой интенсивностью, поэтому теория гравитации не имеет достаточного эксперементального обоснования. В этом смысле для теории гравитации наиболее существенным становится ее логическая непротиворечивость и фундаментальные принципы, истинность которых не вызывает сомнений. По-видимому, этим можно объяснить факт существования целого ряда вполне жизнеспособных альтернативных теорий тяготения наряду со снискавшей широкое признание общей теории относительности (ОТО). Одна из них—тензорно-скалярная теория Йордана-Бранса-Дикке (ЙБД), наиболее популярный в настоящее время неэйнштейновский вариант. Отсылая заинтересованных к оригинальной работе авторов теории [1]–[3], обратим внимание на физические предпосылки теории ЙБД. Основываясь на принципе Маха, согласно которому инерция обусловлена взаимодействием с усредненной массой Вселенной, можно заключить, что ускорение, сообщаемое пробной частицей, должно зависеть не только от гравитационного воздействия фиксированных небесных тел, но также и очень слабо от распределения вещества в непосредственной близости от этой частицы. Пусть пробная частица находится на расстоянии r от центра некоего тела массы m, тогда, с одной стороны, в соответствии с идеей Маха ускорение частицы из соображений размерности $a \sim \frac{mRc^2}{Mr^2}$ (M-масса, R-радиус наблюдаемой части Вселенной), а с другой, она должна падать с ускорением $a = \frac{Gm}{r^2}$. Сравнивая эти выражения, придем вслед за Шамой [4] к заключению

$$\frac{GM}{c^2R} \sim 1 ,$$

т.е. размеры наблюдаемой части Вселенной порядка ее гравитационного радиуса. Запишем последнее выражение, несколько видоизменив его

$$\frac{1}{G(r)} \sim \sum_i \frac{m_i}{(r - r_i)c^2} ,$$

откуда сразу видна необходимость введения в теорию дальнодействующего скалярного поля $y(x^\mu)$, которое должно определить значение G в данной точке и формироваться распределением масс, причем для учета вклада от удаленных масс необходимо, чтобы на больших расстояниях $y \sim O(\frac{1}{r})$.

В теории ЙБД метрику порождает не только вещество и негравитационные поля, но также и, в отличие от ОТО, гравитационный скаляр y, который в свою очередь генерируется материей согласно

$$\nabla_\mu y^\mu = \frac{8\pi T}{3-2\zeta}$$

(здесь ∇_μ-символ ковариантного дифференцирования, ζ-безразмерная константа связи теории ЙБД).

После того как метрика сформирована в соответствии с

$$R_\mu{}^\nu = \frac{8\pi}{y}\left(T_\mu^\nu - \frac{1-\zeta}{3-2\zeta}\delta_\mu^\nu T\right) + \frac{\nabla_\mu y^\nu}{y} + \zeta\frac{y_\mu y^\nu}{y^2},$$

ее воздействие на вещество такое же, как и в ОТО. Другими словами, теория ЙБД – это ОТО с дополнительным источником в виде безмассового скалярного поля.

В настоящей работе сформулирована задача определения поля тяготения внутри статического сферически-симметричного самогравитирующего тела. Показано, что уравнения теории ЙБД обнаруживают существование несвойственных ОТО сингулярных условий в центре распределения масс. Получено ваккумное решение, калибровка которого позволяет переписать его в однородных, гармонических и модифицированных координатах кривизны.

2. В метрике

$$ds^2 = e^{2\nu(r)}\, c^2\, dt^2 - e^{2\lambda(r)}\, dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (1)$$

уравнения теории ЙБД, определяющие гравитационное поле статического сферически-симметричного тела, имеют вид

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\chi_1}{\chi}\left(\frac{r^2 e^{\nu-\lambda}}{\chi}\right)\right]_1 &= \frac{\varepsilon - 3P}{c^2(3-2\zeta)} e^{\nu+\lambda}, \\
\left[\nu_1\left(\frac{r^2 e^{\nu-\lambda}}{\chi}\right)\right]_1 &= \frac{\varepsilon(2-\zeta) + 3P(1-\zeta)}{c^2(3-2\zeta)} r^2 e^{\nu+\lambda}, \qquad (2)\\
\left[\frac{1}{r}\left(\frac{r^2 e^{\nu-\lambda}}{\chi}\right)\right]_1 - \frac{e^{\nu+\lambda}}{\chi} &= \frac{\varepsilon(\zeta-1) - \zeta P}{c^2(3-2\zeta)} r^2 e^{\nu+\lambda},
\end{aligned}$$

$$\nu_1 = -\frac{P_1}{\varepsilon + P}.$$

здесь $\chi(r)$ – гравитационный скаляр, который обычно выбирают так, чтобы в пространственной бесконечности

$$\chi = \frac{8\pi}{c^2}\frac{1}{y} \to \frac{8\pi G_0(3-2\zeta)}{c^2 2(2-\zeta)} = \chi_0, \qquad (3)$$

$(\ldots)_1 = \frac{d}{dr}(\ldots)$, ε-плотность энергии, P-давление вещества, которое, как обычно, предполагается идеальной жидкостью.

Введем $V(r)$ и $m(r)$ так, чтобы заменить (2) эквивалентной системой уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{r^2 e^{\nu+\lambda}}{c^2(3-2\zeta)}(\varepsilon - 3P), && (4)\\
\frac{\chi_1}{\chi} &= V\frac{\chi e^{\lambda-\nu}}{r^2}, && (5)\\
m_1 &= \frac{r^2 e^{\nu+\lambda}}{c^2(3-2\zeta)}[\varepsilon(2-\zeta) + 3P(1-\zeta)], && (6)\\
\nu_1 &= m\frac{\chi e^{\lambda-\nu}}{r^2} = -\frac{P_1}{\varepsilon+P}, && (7)\\
\lambda_1 &= \frac{\chi r e^{2\lambda}}{c^2(3-2\zeta)}[\varepsilon(1-\zeta) + P(3-\zeta)] - \\
&\quad \frac{\chi e^{\lambda-\nu}}{r^2}(m - V) + \frac{\chi^2 e^{2(\lambda-\nu)}}{r^3}V(m - \frac{\zeta}{2}V). && (8)
\end{aligned}$$

Полное решение задачи предусматривает задание условий в центре распределения масс ($r = 0$), а также сшивку внутреннего и внешнего решений на поверхности (при $r = r_s$).

3. Легко заметить, что вне тела и на его границе ($\varepsilon = P = 0, r \geq r_s$)

$$V(r_s) = V_s = \text{const}, \quad m(r_s) = m_s = \text{const}. \qquad (9)$$

Введем новую функцию

$$u(r) = \frac{1}{m_s}\frac{re^{\nu-\lambda}}{\chi}\,, \tag{10}$$

которая, как следует из системы (4)–(8), подчиняется уравнению

$$\frac{u_1}{u} = \frac{1}{r} + \frac{2(1-a)}{ru} - \frac{a(2-\zeta)}{2ru^2}\,, \tag{11}$$

где $a = V_s/m_s$-константа интегрирования. Уравнение (11) легко интегрируется и дает

$$r = \eta r_0\sqrt{\xi^2-1}\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{(1-a)/2\eta}\,, \tag{12}$$

$$\xi = \frac{u+(1-a)}{\eta}\,, \tag{13}$$

$$\eta^2 = (1-a)^2 + a - \frac{\zeta}{2}a^2\,. \tag{14}$$

После чего сразу же можно получить

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{a/2\eta}\,, \\ e^{2\nu} &= e^{2\nu_0}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{1/\eta}\,, \\ e^{2\lambda} &= e^{2\lambda_0}\frac{\xi^2-1}{\left(\xi-\frac{1-a}{\eta}\right)^2}\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Условие асимптотической псевдоевклидовости вынуждает принять $e^{2\nu_0} = e^{2\lambda_0} = 1$, а также позволяет определить константу

$$r_0 = \chi_0 m_s = \frac{G_0 M}{c^2 r}\,, \tag{16}$$

где M-масса рассматриваемого тела. Интегрируя (6) в пределах от 0 до r_s, получим

$$Mc^2 = 4\pi\int_0^{r_s} r^2 e^{\nu+\lambda}\left[\varepsilon + \left(\frac{1-\zeta}{2-\zeta}\right)3P\right]dr + \frac{4\pi(3-2\zeta)}{2-\zeta}m(0)\,c^2\,, \tag{17}$$

$$m(0) = \lim_{r\to 0}\frac{r^2e^{\nu-\lambda}}{\chi}\nu_1\,.$$

В пределе $\zeta \to \infty$ этот результат совпадает с известной формулой Толмана для массы статического тела (см, например, [5]).

Введем, следуя Хокингу , "эффективную массу" M^*, связанную с энергией скалярного поля, в соответствии с

$$\chi|_{r\to\infty} = \chi_0\left(1 - \frac{2G_0M^*}{c^2r}\right)\,. \tag{18}$$

сравнивая это выражение с предельным ($\zeta \to \infty$) видом найденного для $\chi(\xi)$ решения, получим

$$\begin{aligned} M^*c^2 &= \frac{2\pi c^2(3-2\zeta)}{2-\zeta}V_s = \frac{4\pi}{2(2-\zeta)}\int_0^{r_s} r^2e^{\nu+\lambda}(\varepsilon-3P)\,dr + \\ &\quad \frac{2\pi(3-2\zeta)}{2-\zeta}V(0)\,c^2\,, \\ V(0) &= \lim_{r\to 0}\frac{r^2e^{\nu-\lambda}}{\chi}\frac{\chi_1}{\chi}\,. \end{aligned} \tag{19}$$

<u>**Замечание 1**</u> Вакуумное решение можно переписать в координатах (t, x, θ, φ), где

$$x = x_0(\xi+1)\,,$$

а x_0-постоянная, причем

$$x_0 = \eta r_0\,.$$

Координату x назовем модифицированной координатой кривизны, поскольку

$$ds^2 = \left(1-\frac{2x_0}{x}\right)^{1/\eta}dt^2 - \left(1-\frac{2x_0}{x}\right)^{(a-1)/\eta}\left[dx^2 + x^2\left(1-\frac{2x_0}{x}\right)d\Omega^2\right],$$

что в пределе ОТО ($a \to 0$, $\eta \to 1$) дает известное решение Шварцшильда.

4. Внутри распределения масс задачу удобно решать в следующих обозначениях:

$$x = r/r_c\,; \quad y_1 = V/V_c\,; \quad y_z = \chi/\chi_c\,; \qquad (20)$$
$$y_3 = m/m_c\,; \quad y_4 = e^{\nu}/N_c\,; \quad y_5 = e^{\lambda}/L_c\,,$$

что позволяет переписать систему (4)–(8) в виде

$$\begin{aligned}
y_1{}' &= \frac{\varepsilon - 3P}{c^2(3-2\zeta)} x^2 y_4 y_5\,,\\
\frac{y_2{}'}{y_2} &= y_1 \frac{y_2 y_5}{x^2 y_4}\,,\\
y_3{}' &= \frac{\varepsilon(2-\zeta) + 3P(1-\zeta)}{c^2(3-2\zeta)} x^2 y_4 y_5\,, \qquad (21)\\
\frac{y_4{}'}{y_4} &= y_3 \frac{y_2 y_5}{x^2 y_4} = -\frac{P'}{\varepsilon + P}\,,\\
\frac{y_5{}'}{y_5} &= \frac{\varepsilon(1-\zeta) + P(3-\zeta)}{c^2(3-2\zeta)} x y_2 y_5^2 -\\
&\quad (y_3 - y_1)\frac{y_2 y_5}{x^2 y_4} + x y_1 (y_3 - \frac{\zeta}{2} y_1)\left(\frac{y_2 y_5}{x^2 y_4}\right)^2.
\end{aligned}$$

Вблизи центра $(r \to 0,\ \varepsilon \to \varepsilon_c,\ P \to P_c)$ система уравнений (21) допускает два возможных типа поведения искомых функций

а) "сингулярные" условия в центре

$$\begin{aligned}
y_1(x) &\simeq p + \frac{\varepsilon_c - 3P_c}{c^2(3-2\zeta)} \frac{x^{4-p}}{4-p}\,,\\
y_2(x) &\simeq x^p\,,\\
y_3(x) &\simeq \frac{\varepsilon_c(2-\zeta) + 3P_c(1-\zeta)}{c^2(3-2\zeta)} \frac{x^{4-p}}{4-p}\,, \qquad (22)\\
y_4(x) &\simeq 1 + \frac{\varepsilon_c(2-\zeta) + 3P_c(1-\zeta)}{c^2(3-2\zeta)} \frac{x^{4-p}}{(4-p)^2}\,,\\
y_5(x) &\simeq x^{1-p}\,,
\end{aligned}$$

здесь

$$p = \frac{2}{\zeta}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\zeta}{2}}\right); \qquad (23)$$

б) "несингулярные" условия в центре

$$\begin{aligned}
y_1(x) &\simeq \frac{\varepsilon_c - 3P_c}{c^2(3-2\zeta)} \frac{x^3}{3}\,,\\
y_2(x) &\simeq 1 + \frac{\varepsilon_c - 3P_c}{c^2(3-2\zeta)} \frac{x^2}{6}\,,\\
y_3(x) &\simeq \frac{\varepsilon_c(2-\zeta) + 3P_c(1-\zeta)}{c^2(3-2\zeta)} \frac{x^3}{3}\,, \qquad (24)\\
y_4(x) &\simeq 1 + \frac{\varepsilon_c(2-\zeta) + 3P_c(1-\zeta)}{c^2(3-2\zeta)} \frac{x^2}{6}\,,\\
y_5(x) &\simeq 1 + \frac{2\varepsilon_c(1-\zeta) + 3P_c}{c^2(3-2\zeta)} \frac{x^2}{6}\,.
\end{aligned}$$

Заметим, что поведение (24) аналогично поведению соответствующих функций при решении задачи в ОТО, в то время как условия (22) не свойственны уравнениям ОТО, а возможны только в рамках теории ЙБД.

При заданных ζ и уравнении состояния $P = P(\varepsilon)$ интегрирование системы (21) следует вести от $x = 0$ до границы $x = x_s$, значение x_s определяется условием $P(x_s) = 0$. Практически, удобнее определить x_s как аргумент следующего отношения, когда для данного ζ

$$\frac{y_3{}'}{y_1{}'} = \left(\frac{[(2-\zeta) + \frac{3P}{\varepsilon}(1-\zeta)]}{1 - \frac{3P}{\varepsilon}}\right)_{P=0} = 2 - \zeta\,. \qquad (25)$$

В результате интегрирования определяются все $y(x)$ и их производные. Знание этих величин дает возможность найти a, η и ξ_s (ξ-аргумент внешнего решения) согласно

$$\xi_s = \frac{\eta^2 f_s + (1-a)}{\eta(1 + (1-a) f_s)}\,;\ f_s = \left(\frac{y_4{}' y_5}{y_4 y_5{}'}\right)_{x=x_s}\,, \qquad (26)$$

после чего вычисляются χ_c, N_c, L_c, V_c, m_c и r_c, что в свою очередь позволяет найти

$$r_s = r_c x_s\,, \quad M = \frac{4\pi(3-2\zeta)}{2-\zeta} m_c y_s(x_s)\,,$$
$$M^* = \frac{2\pi(3-2\zeta)}{2-\zeta} V_c y_1(x_s) \tag{27}$$

и завершить решение задачи.

5. Перейдем к обсуждению точного вакуумного решения (15). Интересно заметить, что такой же результат можно получить из уравнений

$$\Delta y = 0\,,$$
$$\Delta A + e^{-2B}\frac{A'y'}{y} = 0\,,$$
$$\Delta f + e^{-2B}\frac{f'y'}{y} - e^{-2B}/L^2 = 0\,, \tag{28}$$
$$\left(A' + 2f' + \frac{y'}{y}\right) + A'\left(A' - f' + \frac{L'}{L}\right) +$$
$$2f'\frac{L'}{L} + \frac{y'}{y}\left[(1-\zeta)\frac{y'}{y} - f' + \frac{L'}{L}\right] = 0\,,$$

соответствующих

$$ds^2 = e^{2A(z)}dt^2 - e^{2B(z)}\left[dz^2 + L^2(z)d\Omega^2\right]\,, \tag{29}$$

здесь

$$f = \ln Le^B\,,$$
$$\Delta = \frac{e^{-(A+3B)}}{L^2}\frac{d}{dz}\left(L^2 e^{A+B}\frac{d}{dz}\right)$$

Действительно, из первых двух уравнений имеем

$$A' = -\frac{1}{a}\frac{y'}{y}\,, \quad a = \mathrm{const}\,, \tag{30}$$

Исключив далее вторые производные, используем (30) и разрешим результат относительно f', что дает

$$f' = \frac{1}{L}\left[\frac{1-a}{\eta}\left(\frac{\eta}{a}\frac{y'}{y}L\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\eta}{a}\frac{y'}{y}L\right)^2 + 1}\,,\right]\,, \tag{31}$$

где по-прежнему

$$\eta^2 = (a-1)^2 + a - \frac{\zeta}{2}a^2\,.$$

Введем переменную $|\xi| > 1$, согласно

$$\frac{\eta}{a}\frac{y'}{y}L = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\,,$$

что приводит к уравнению

$$\xi' = \pm\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{L}\,. \tag{32}$$

Выбор знака в (32) не отражается на конечном результате; выбрав для определенности нижний, получим

$$y = y_0\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{a/2\eta}\,,$$
$$e^{2A} = e^{2A_0}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{1/\eta}\,, \tag{33}$$
$$L^2 e^{2B} = L_0^2 e^{2B_0}(\xi^2-1)\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{(1-a)/\eta}\,.$$

Если, так же, как в замечании 1, перейти к $x = x_0(\xi+1)$, то ясно, что необходимо положить $L_0 = x_0$, а константы A_0 и D_0 равными 0. Таким образом,

$$ds^2 = \left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{1/\eta} dt^2 - L_0^2\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{(1-a)/\eta}\left[d\xi^2 + (\xi^2-1)d\Omega^2\right]\,, \tag{34}$$
$$y = y_0\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{a/2\eta}\,.$$

Нетрудно видеть, что решение (34) трансформируется в параметрическое решение Гекмана (см. в [1]), если ввести параметр

$$\tau = \left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{(1-a)/\eta}\,. \tag{35}$$

Подстановкой

$$R = R_0\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \qquad (36)$$

это решение можно переписать в однородных координатах

$$ds^2 = \left(\frac{1 - R_0/R}{1 + R_0/R}\right)^{2/\eta} dt^2 - \left(1 + \frac{R_0}{R}\right)^4 \left(\frac{1 - R_0/R}{1 + R_0/R}\right)^{2(a-1+\eta)/\eta} (dR^2 + R^2 d\Omega^2)\,,$$

$$y = y_0\left(\frac{1 + R_0/R}{1 - R_0/R}\right)^{a/\eta}, \quad 2R_0 = \frac{GM}{c^2}\,. \qquad (37)$$

В таком виде оно было известно Брансу [3], однако Бранс ошибочно полагал, что a является универсальной константой, а не постоянной интегрирования, связанной с параметром рассматриваемой модели (например, плотностью энергии в центре).

При желании можно перейти и к гармоническим координатам Фока [6]

$$\bar{r} = \left(\xi + \frac{a}{2\eta}\right)\left[C_1 + C_2 \int \left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1}\right)^{a/2\eta} \frac{d\xi}{(\xi^2 - 1)\left(\xi + \frac{a}{2\eta}\right)^2}\right]. \qquad (38)$$

Разумеется, все выражения этого раздела можно перевести в ОТО, положив $a = 0$, $\eta = 1$.

Замечание 2 В свое время в своем решении статических уравнений ОТО Фок (см. [6]) допустил неточность, положив равной 0 одну из констант интегрирования, на что обратил внимание Асанов [7], и независимо от него Авакян [8]. Наличие этой константы (C_2 в (38)) обуславливает разницу между координатой ξ и гармонической координатой $\bar{r}$, что хорошо проявляется в случае ОТО:

$$\bar{r} = \xi\left[C_1 + \frac{1}{2} C_2 \ln\left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right)\right].$$

С точки зрения практических приложений наиболее приемлемым представляется вакуумное решение в том виде, который оно имеет в модифицированных координатах кривизны (см. замечание 1).

Авторы благодарны участникам семинаров кафедры теоретической физики Ереванского государственного университета и "Пространство, время и гравитация" ЛТФ ОИЯИ за обсуждения.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта фонда Майера, присужденного Американским физическим обществом.

Литература

1. Jordan P., Schwerkraft und Weltall, Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1955.
2. Brans C., Dicke R., Phys.Rev., **124** (1961) 925.
3. Brans C., Phys.Rev., **125** (1962) 2194.
4. Sciama D., Mon.Not.Roy Astron.Soc. **113** (1953) 34.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теория поля, "Наука" М., 1988.
6. Фок В.А., Теория пространства, времени и тяготения", ГИТТЛ, М., 1955.
7. Asanov R.A. Preprint JINR E2-87-612, Dubna, 1987.
8. Авакян Р.М. В сборнике "Точные решения уравнений гравитационного поля и их физическая интерпретация". Изд-во Тартуского ун-та, стр. 22, Тарту, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 марта 1994 года.