94-528

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-94-528

Г.Г.Арутюнян[1], В.В.Папоян[1],
В.Н.Первушин, М.Б.Шефтель

ВРЕМЕННАЯ ЗАДАЧА В ТЕНЗОРНО-СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЙОРДАНА — БРАНСА — ДИККЕ

Направлено в журнал «Астрофизика»

[1]Ереванский государственный университет, Армения

1994

I. **Введение.** Согласно выводам теории тяготения Эйнштейна (в дальнейшем ОТО) существуют предельные значения для масс белых карликов и нейтронных звезд. Для разных моделей величина критической массы $M_{\text{кр.}} \sim 1.5 \div 3M_{\odot}$ (см., например, [1]). Если звезда с массой больше $M_{\text{кр.}}$, в ходе своей эволюции не избавится от излишка массы, то после исчерпания запасов ядерного горючего наступит катастрофическое сжатие (гравитационный коллапс), в результате которого образуется черная дыра [2,3]. Черные дыры обнаруживают себя эффектами собственного гравитационого поля. Поэтому, несмотря на интенсивные и длительные поиски, использующие предельные возможности современных экспериментальных установок, лишь летом 1994 года появилось сообщение о наблюдениях в ядре галактики M82 объекта с массой $2 \div 3 \cdot 10^8 M_{\odot}$, который с большей вероятностью может быть отождествлен с черной дырой. Заметим, что за истекшие 20 лет поступило несколько сообщений об обнаружении черных дыр, однако в ходе дальнейших наблюдений они не подтверждались. Возможно, в связи с этим стоит обратить внимание на особенность разработанного Логуновым с сотрудниками неэйнштейновского варианта теории гравитации — в области, близкой к горизонту событий, сжатие останавливается и сменяется расширением (см., например, [4]). Причина коллапса в том, что силы тяготения, создаваемые некоторой массой вещества, превосходят упругие силы, возникающие в ходе сжатия. В теории Логунова вблизи шварцшильдовской сферы возникают отталкивательные силы, которые препятствуют образованию черных дыр, но некоторое время — время смены сжатия расширением — объект обнаруживает свойства, аналогичные свойствам черной дыры. Вообще говоря, существование черных дыр и их свойства могут служить решающим фактором при оценке жизнеспособности той или иной теории гравитации.

Тензорно-скалярная теория тяготения Иордана-Бранса-Дикке (теория ИБД) — одна из наиболее популярных альтернативных к ОТО, но вполне жизнеспособных (в смысле экспериментального обоснования) гравитационных теорий. В этой теории гравитационное поле, помимо десяти компонент метрического тензора, характеризуется также гравитационным скаляром $y = y(x)$, порождаемым сверткой T тензора энергии-импульса вещества и негравитационных полей T_μ^ν в соответствии с

$$\nabla_\mu y^\mu = \frac{8\pi T}{3-2\zeta} \quad . \tag{1.1}$$

Скаляр $y(x)$ вместе с T_μ^ν генерирует метрику согласно

$$G_\mu^\nu = \frac{8\pi}{y} T_\mu^\nu + \frac{1}{y}\nabla_\mu y^\nu - \zeta \frac{y_\mu y^\nu}{y^2} - \delta_\mu^\nu \left(\frac{\nabla_\alpha y^\alpha}{y} - \frac{1}{2}\zeta \frac{y_\alpha y^\alpha}{y^2} \right) . \tag{1.2}$$

(Здесь греческие индексы пробегают значения 0,1,2,3; G_μ^ν-тензор Эйнштейна, ∇_μ-символ ковариантного дифференцирования по x^μ, ζ-безразмерная константа теории). Воздействие метрики на вещество такое же, как и в ОТО. Потенциал безмассового скалярного поля $y(x)$ обычно выбирают так, чтобы асимптотически (на больших расстояниях от источника) выполнялся ньютоновский закон тяготения. Для этого необходимо положить

$$y(x) \xrightarrow{x\to\infty} y_0 = \frac{2(2-\zeta)}{G(3-2\zeta)} \quad . \tag{1.3}$$

Полевые уравнения ИБД можно получить независимым варьированием действия

$$W = \int \left[-\frac{y}{16\pi}\left(R + \zeta \frac{y^\mu y_\mu}{y^2} \right) + \Lambda_m \right] \sqrt{-g}\, d^4x \tag{1.4}$$

по $g_{\mu\nu}$ и $y(x)$. Легко заметить, что в частном случае $y \to y_0$, $\zeta \to \infty$, действие (1.4) превращается в эйнштейновское, а уравнения (1.2) – в уравнения ОТО. (Подробное изложение основ теории ИБД можно найти в оригинальных работах [5-7] и в книге Вайнберга [8]).

Дополнительное по сравнению с ОТО скалярное поле теории ИБД не может не оказать влияния как на устойчивость равновесных релятивистских звездных моделей, так и на эволюцию самогравитирующих объектов с массами, превышающими критическую. Вопрос о существовании черных дыр в теории ИБД дискутировался в работах [9,10]. Соображения Торна и Дикла [9] о

неизбежности коллапса вызвали справедливые возражения Матсуды [10]. Весьма обстоятельная работа Нариаи не приводит к однозначному заключению о неизбежности коллапса в теории ИБД. Более того, результаты Нариаи [11] нуждаются в уточнении, так как используют ошибочное предположение об универсальности одной из констант внешнего решения, тогда как она является постоянной интегрирования, параметризирующей источник (подробнее об этом см. в [12]).

В настоящей работе сформулирована временная задача теории ИБД, что, с одной стороны, позволяет исследовать устойчивость равновесных звездных моделей относительно радиальных пульсаций, а с другой–установить особенности динамики моделей с массами, большими критической (разделы 2 и 3). Попутно обсуждаются вопросы об аналоге теоремы Биркгофа (замечание 1), о массе статического объекта (замечание 2), а также об интегрируемости вакуумных временных уравнений в частном случае ОТО (раздел 4). Отметим, что результаты работы могут быть существенно использованы в предложенной недавно одним из авторов (В.Н.П.) схеме квантования гравитации, в которой вначале разрешаются все связи на классическом уровне, а затем проводится квантование оставшихся после редукции степеней свободы [13,14].

2. **Временные уравнения теории ИБД.** Рассмотрим сферически-симметричное пространство-время с метрикой

$$ds^2 = e^{2\alpha(r,t)}\, dt^2 - e^{2\beta(r,t)}\, dr^2 - R^2(r,t), d\Omega^2. \tag{2.1}$$

Это выражение получено преобразованием координат из наиобщего выражения при наличии сферической симметрии. Одно из допустимых в рассматриваемом случае преобразований координат использовано для того, чтобы обратить в нуль недиагональную компоненту g_{tr}, второе используем для обращения в нуль радиальной компоненты 4-скорости u^r, выбрав тем самым сопутствующую движению вещества систему отсчета, что даст

$$u^\mu = \{u^t, 0, 0, 0\}, \quad \dot\alpha = -\dot u^t / u^t \tag{2.2}$$

(точка означает частную производную по времени). Подставим (2.1) и (2.2) в уравнения (1.1) и (1.2). Тогда

$$e^{-2\alpha}\left[\frac{\ddot{y}}{y}+\frac{\dot{y}}{y}\left(\dot{\beta}-\dot{\alpha}+\frac{2\dot{R}}{R}\right)\right]-e^{-2\beta}\left[\frac{y''}{y}+\frac{y'}{y}\left(\alpha'-\beta'+\frac{2R'}{R}\right)\right]=$$

$$\frac{8\pi}{y}\frac{(\epsilon-3P)}{(3-2\zeta)}\,, \tag{2.3}$$

$$e^{-2\alpha}\left[\frac{\dot{R}}{R}\left(\frac{\dot{R}}{R}+2\dot{\beta}\right)+\frac{\dot{y}}{y}\left(\dot{\beta}+\frac{2\dot{R}}{R}\right)\right]+\frac{1}{R^2}-$$

$$e^{-2\beta}\left[\frac{2R''}{R}+\frac{R'}{R}\left(\frac{R'}{R}-2\beta'\right)+\frac{y''}{y}+\frac{y'}{y}\left(\frac{2R'}{R}-\beta'\right)\right]+ \tag{2.4}$$

$$\frac{\zeta}{2y^2}\left(e^{-2\alpha}\dot{y}^2+e^{-2\beta}y'^2\right)=\frac{8\pi}{y}\epsilon\,,$$

$$e^{-2\alpha}\left[\frac{2\ddot{R}}{R}+\frac{\dot{R}}{R}\left(\frac{\dot{R}}{R}-2\dot{\alpha}\right)+\frac{\ddot{y}}{y}+\frac{\dot{y}}{y}\left(\frac{2\dot{R}}{R}-\dot{\alpha}\right)\right]+\frac{1}{R^2}-$$

$$e^{-2\beta}\left[\frac{R'}{R}\left(\frac{R'}{R}+2\alpha'\right)+\frac{y'}{y}\left(\alpha'+\frac{2R'}{R}\right)\right]- \tag{2.5}$$

$$\frac{\zeta}{2y^2}\left(e^{-2\alpha}\dot{y}^2+e^{-2\beta}y'^2\right)=-\frac{8\pi}{y}P\,,$$

$$\frac{2\dot{R}'}{R}-\alpha'\left(\frac{2\dot{R}}{R}+\frac{\dot{y}}{y}\right)-\dot{\beta}\left(\frac{2R'}{R}+\frac{y'}{y}\right)+\frac{\dot{y}'}{y}-\zeta\frac{\dot{y}y'}{y^2}=0\,, \tag{2.6}$$

$$e^{-2\alpha}\left[\ddot{\beta}+\dot{\beta}^2-\dot{\alpha}\dot{\beta}+\frac{\ddot{R}}{R}+\frac{\dot{R}}{R}\left(\dot{\beta}-\dot{\alpha}\right)+\frac{\ddot{y}}{y}+\frac{\dot{y}}{y}\left(\dot{\beta}-\dot{\alpha}+\frac{\dot{R}}{R}\right)\right]-$$

$$e^{-2\beta}\left[\alpha''+\alpha'^2-\alpha'\beta'+\frac{R''}{R}+\frac{R'}{R}(\alpha'-\beta')+\frac{y''}{y}+\right. \tag{2.7}$$

$$\left.\frac{y'}{y}\left(\alpha'-\beta'+\frac{R'}{R}\right)\right]-\frac{\zeta}{2y^2}\left(e^{-2\alpha}\dot{y}^2-e^{-2\beta}y'^2\right)=-\frac{8\pi}{y}P\,.$$

Ради полноты изложения приведем выражение для скалярной кривизны

$$\mathcal{R}=\frac{16\pi\zeta(\epsilon-3P)}{y(3-2\zeta)}-\frac{\zeta}{y^2}\left(e^{-2\alpha}\dot{y}^2-e^{-2\beta}y'^2\right)=$$

$$-2e^{-2\alpha}\left[\ddot{\beta}+\dot{\beta}^2-\dot{\alpha}\dot{\beta}+\frac{2\ddot{R}}{R}+\frac{\dot{R}}{R}\left(\frac{\dot{R}}{R}-2\dot{\alpha}+2\dot{\beta}\right)\right]+ \tag{2.8}$$

$$2e^{-2\beta}\left[\alpha''+\alpha'^2-\alpha'\beta'+\frac{2R''}{R}+\frac{R'}{R}\left(\frac{R'}{R}+2\alpha'-2\beta'\right)\right]-\frac{2}{R^2}\,.$$

Здесь штрих означает производную по r, ϵ и P-плотность энергии и давления вещества соответственно.

Замечание 1. В ОТО для внешнего наблюдателя масса конфигурации, вещество которой движется в радиальном направлении (что не нарушает сферической симметрии), совпадает с массой такой же конфигурации в состоянии статического равновесия (теорема Биркгофа). В теории ИБД в общем случае аналогичное утверждение не справедливо, поскольку $\dot{y}\neq 0$. Однако правдоподобным кажется предположение, согласно которому временные изменения скалярного поля происходят за время,сравнимое с космологическим. Тогда, рассматривая динамику изолированного объекта,целесообразно полагать $\dot{y}=0$. Если исходить из этого предположения, то нетрудно доказать, что теорема Биркгофа остается в силе и в теории ИБД. Действительно, пусть $\dot{y}=0$. В области пространства вне вещества нет необходимости обращать в нуль u^r. Используем оставшийся произвол в выборе координат для того, чтобы в $R^2=r^2e^{\mu(r,t)}$ обратить в нуль $\mu(r,t)$. Тогда вместо уравнения (2.6) имеем

$$\dot{\beta}\left(\frac{2}{r}+\frac{y'}{y}\right)=0\,. \tag{2.9}$$

Вне распределения масс из (2.3) получим

$$y' = \frac{c}{r^2}e^{\beta-\alpha}\,.$$

Учитывая последнее, из (2.9) при $\dot\beta \neq 0$ получим $y = -ce^{\beta-\alpha}/2r$, что приводит к нефизической асимптотике $y \overset{r\to\infty}{\to} 0$. Следовательно, необходимо положить $\dot\beta = 0$. Комбинируя уравнения сиситемы после подстановки $\dot y = 0, \dot\beta = 0$, придем к уравнению

$$\alpha'' + \alpha'(\alpha' - \beta' + \frac{2}{r} + \frac{y'}{y}) = 0$$

с решением

$$e^\alpha = \left(\frac{y}{y_0}\right)^n f(t)\,, \quad n = \mathrm{const}\,.$$

Если ввести $dT = f(t)\,dt$, то

$$e^\alpha\,dt = \left(\frac{y}{y_0}\right)^n f(t)\,dt = e^{\bar\alpha}\,dT,$$

что дает $\dot{\bar\alpha} = 0$. Таким образом, если,рассматривая изолированную самогравитирующую конфигурацию, пренебречь временной зависимостью гравитационного скаляра ($\dot y = 0$), то вне распределения масс в соответствии с уравнениями задачи необходимо полагать $\alpha = \alpha(r)$, $\beta = \beta(r)$, т.е. гравитационное поле оказывается таким же, как у статической конфигурации.

Обычно при решении задач внутри распределения масс удобно использовать уравнения гидродинамики, следующие из $\nabla_\nu T^\nu_\mu = 0$, и закон сохранения числа барионов $\nabla_\mu(nu^\mu) = 0$ (n-плотность числа барионов). Комбинируя эти соотношения с термодинамическим $d\epsilon = (\epsilon + P)dn/n + nTds$, считая вещество идеальной жидкостью с

$$T^\nu_\mu = (\epsilon + P)u_\mu u^\nu - P\delta^\nu_\mu$$

а его движение изоэнтропичным (s = const), в рассматриваемом случае получим

$$\frac{\dot\epsilon}{\epsilon + P} = \frac{\dot n}{n} = -(\dot\beta + \frac{2\dot R}{R})\,, \tag{2.10}$$

$$\frac{P'}{\epsilon + P} = -\alpha'\,. \tag{2.11}$$

Систему уравнений (2.3)-(2.11) необходимо дополнить уравнением состояния вещества.

3. **Конформно-преобразованные уравнения.** Шюкинг (см. в [5] и [15]) и вслед за ним Дикке [16] обратили внимание на факт упрощения уравнений теории ИБД после конформных преобразований метрического тензора. Определенный выбор конформного фактора позволяет установить взаимную связь между решениями уравнений ИБД и ОТО [15,17]. В рассматриваемом случае перейдем в конформно-соответствующее пространство $\bar V_4$ так, чтобы

$$\bar g_{\mu\nu} = e^\sigma g_{\mu\nu}\,, \quad e^\sigma = \frac{y}{y_0}\,. \tag{3.1}$$

Тогда для скалярной кривизны имеем

$$e^\sigma\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R} - 3\nabla_\mu\sigma^\mu - \frac{3}{2}\sigma_\mu\sigma^\mu\,,$$

а если учесть уравнение (1.1) и (3.1), получим

$$e^\sigma\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R} + \frac{3}{2}\sigma_\mu\sigma^\mu - \frac{24\pi T}{3 - 2\zeta}\frac{e^{-\sigma}}{y_0}\,,$$

подставив последнее в (1.4) для действия в пространстве $\bar V_4$, найдем

$$\bar W = \int\left[-\frac{y_0}{16\pi}\bar{\mathcal{R}}(\bar g_{\mu\nu}) + \psi_\mu\psi^{\bar\mu} + e^{-2\sigma}\left(\Lambda_m - \frac{3T}{2(3 - 2\zeta)}\right)\right]\sqrt{-\bar g}\,d^4x\,, \tag{3.2}$$

где

$$\psi = \sqrt{\frac{3 - 2\zeta}{2}}\sigma\,. \tag{3.3}$$

а соответствующие уравнения приобретают вид

$$\bar{G}^{\bar{\nu}}_{\mu} = \frac{8\pi}{y_0} T^{\nu}_{\mu} e^{-2\sigma} + \psi_\mu \psi^{\bar{\nu}} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}\psi_\alpha\psi^{\bar{\alpha}}, \qquad (3.4)$$

$$\bar{\nabla}_\mu \sigma^{\bar{\mu}} = \frac{8\pi T e^{-2\sigma}}{y_0(3-2\zeta)} \qquad (3.5)$$

(черта над символом означает принадлежность к $\bar{V}_4$, а индексы с чертой опускают посредством $\bar{g}_{\mu\nu}$). Уравнения (3.4) можно рассматривать как эйнштейновские с дополнительным источником в виде "тензора энергии-импульса" скалярного поля $8\pi\tau^{\nu}_{\bar{\mu}} = y_0(\psi_\mu\psi^{\bar{\nu}} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}\psi_\alpha\psi^{\bar{\alpha}})$, при $\psi = \mathrm{const}$ и $\zeta \to 0$ эти уравнения превращаются в уравнения ОТО. Запишем теперь систему уравнений рассматриваемой задачи (2.3)-(2.6) (уравнение (2.7) является их алгебраическим следствием) в конформно-соответсвующем пространстве $\bar{V}_4$ с метрикой (3.1), отбросив черту:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\sigma}\, R^2 e^{\beta-\alpha}) - \frac{\partial}{\partial r}(\sigma' R^2 e^{\alpha-\beta}) = \frac{8\pi e^{-2\sigma}(\epsilon - 3P)}{y_0(3-2\varsigma)} R^2 e^{\alpha+\beta}, \qquad (3.6)$$

$$e^{-2\alpha}\left[\frac{\dot{R}}{R}\left(\frac{\dot{R}}{R} + 2\dot{\beta}\right)\right] - e^{-2\beta}\left[\frac{2R''}{R} + \frac{R'}{R}\left(\frac{R'}{R} - 2\beta'\right)\right] +$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{8\pi e^{-2\sigma}}{y_0}(\epsilon + \epsilon^*), \qquad (3.7)$$

$$e^{-2\alpha}\left[\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}}{R}\left(\frac{\dot{R}}{R} - 2\dot{\alpha}\right)\right] - e^{-2\beta}\left[\frac{R'}{R}\left(\frac{R'}{R} + 2\alpha'\right)\right] +$$

$$\frac{1}{R^2} = -\frac{8\pi e^{-2\sigma}}{y_0}(P + P^*), \qquad (3.8)$$

$$\frac{\dot{R}'}{R} - \alpha'\frac{\dot{R}}{R} - \dot{\beta}\frac{R'}{R} = -\frac{(3-2\zeta)}{4}\dot{\sigma}\sigma'. \qquad (3.9)$$

Здесь

$$\epsilon^* = P^* = \frac{y_0 e^{2\sigma}}{8\pi}\frac{3-2\zeta}{4}\left(e^{-2\alpha}\dot{\sigma}^2 + e^{-2\beta}\sigma'^2\right) \qquad (3.10)$$

— эффективные "плотности энергии" и "давление" скалярного поля, рассматриваемого как негравитационный источник, порождающий

метрику. Умножим уравнение (3.7) на $R'R^2$, а (3.8) на $\dot{R}R^2$ и сложим первый результат с помноженным на $2R^2\dot{R}e^{-2\alpha}$ уравнением (3.9), а из второго вычтем помноженное на $2R^2R'e^{-2\alpha}$ тоже (3.9). В итоге получим уравнения

$$m' = \frac{4\pi e^{-2\sigma}}{y_0}(\epsilon + \epsilon^*)R^2R' - \frac{3-2\zeta}{4}e^{-2\alpha}R^2\dot{R}\dot{\sigma}\sigma',$$

$$\dot{m} = -\frac{4\pi e^{-2\sigma}}{y_0}(P + P^*)R^2\dot{R} + \frac{3-2\zeta}{4}e^{-2\beta}R^2R'\dot{\sigma}\sigma'; \qquad (3.11)$$

$$m = \frac{R}{2}\left(1 + e^{-2\alpha}\dot{R}^2 - e^{-2\beta}R'^2\right)$$

эквивалентные (3.7)-(3.9), добавив к которым конформно-преобразованные (2.8) и (2.11),

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon + P} = -\left(\dot{\beta} + \frac{2\dot{R}}{R}\right) + \frac{3}{2}\dot{\sigma}, \qquad (3.12)$$

$$\frac{P'}{\epsilon + P} = -\alpha' + \frac{\sigma'}{2},$$

а также уравнение состояния вещества, получим полную систему для решения временной задачи теории ИБД. (Заметим, что соотношения (3.12) можно получить непосредственно из очевидного условия равенства нулю ковариантной дивергенции правой части уравнения (3.4))

<u>Замечание 2.</u> Уравнения (3.11) превращаются в уравнения ОТО, если $\zeta \to \infty$ и $\sigma = \mathrm{const}$. Вне распределения масс величина m становится константой и имеет смысл полной массы рассматриваемого объекта (см., например, [18]). В вакуумном случае теории ИБД m не является константой из-за добавок, обусловленных временными производными гравитационного скаляра. Вообще говоря, вопрос о массе в теории ИБД достаточно сложен, однако в статике можно получить довольно простые выражения, определяющие массу. В частности, как показано в

работе [12], в координатах кривизны

$$ds^2 = e^{2\nu}c^2dt^2 - e^{2\lambda}dr^2 - r^2d\Omega^2$$

полная масса

$$M = \frac{4\pi}{c^2}\int\limits_0^{r_s} r^2e^{\nu+\lambda}\left[\epsilon + \frac{1-\zeta}{2-\zeta}3P\right]dr. \qquad (3.13)$$

В ОТО ($\zeta \to \infty$) это вырвжение совпадает с известной формулой Толмана. Отметим, что в координатах кривизны в статике уравнения теории ИБД внутри распределения масс можно представить в виде

$$u' = 4\pi\chi r^2(\epsilon + \epsilon^c),$$

$$\frac{P'}{\epsilon + P} = -\frac{u + 4\pi\chi r^3(P + P^c)}{r(r-2u)},$$

$$\frac{\chi'}{\chi} = -\frac{V\chi}{r}\frac{1}{\sqrt{r(r-2u)}},$$

$$V' - V\frac{P'}{P} = -\frac{8\pi r^3(\epsilon - 3P)}{(3-2\zeta)\sqrt{r(r-2u)}},$$

$$\epsilon^c = -\frac{\epsilon - 3P}{3-2\zeta} + \frac{V}{8\pi r^2}\sqrt{1-\frac{2u}{r}}\left(\frac{P'}{\epsilon+P} + \frac{\zeta}{2}\frac{\chi'}{\chi}\right),$$

$$P^c = \frac{V}{8\pi r^2}\sqrt{1-\frac{2u}{r}}\left(\frac{P'}{\epsilon+P} + \frac{\zeta}{2}\frac{\chi'}{\chi} - \frac{2}{r}\right),$$

Нетрудно получить формулу для массы в том же статическом случае теории ИБД, если используются однородные координаты

$$ds^2 = e^{2\alpha}c^2dt^2 - e^{2\beta}\left[dR^2 + R^2d\Omega^2\right].$$

Действительно, как показано в [19] (стр. 82), интегрирование комбинации вакуумных уравнений этого случая приводит к

$$\frac{e^{\alpha+\beta}}{\chi} = -\frac{B}{2R^2} + \frac{1}{\chi_0}, \qquad (3.14)$$

где

$$B = \text{const}, \quad \chi = \frac{8\pi}{y}, \quad \chi_0 = \frac{8\pi G(3-2\zeta)}{2(2-\zeta)}.$$

С другой стороны,внутри распределения масс как алгебраическое следствие полевых уравнений имеем

$$\left[R^3\left(\frac{e^{\alpha+\beta}}{\chi}\right)'\right]' = 2R^3Pe^{\alpha+3\beta}, \qquad (3.15)$$

что после интегрирования дает

$$R^3\left(\frac{e^{\alpha+\beta}}{\chi}\right)'\Bigg|_{R=R_s} = 2\int\limits_0^{R_s} R^3e^{\alpha+3\beta}PdR.$$

Поскольку, как это следует из (3.14), производная $R^3\left(e^{\alpha+\beta}/\chi\right)'$ на границе $R = R_s$ есть $(B/2R^2)'$, то

$$B = 2\int\limits_0^{R_s} R^3e^{\alpha+3\beta}PdR. \qquad (3.16)$$

Нетрудно показать, что

$$B = \frac{\eta^2G^2M^2}{2\chi_0},$$

составив из выражений (15) и (16) работы [19] комбинацию $e^{\alpha+\beta}/\alpha$ и требуя на больших расстояниях от источника выполнение закона тяготения Ньютона.

Таким образом, для выражений в однородных координатах массы изолированного объекта в статическом случае теории ИБД имеем

$$M^2 = \frac{16\pi(3-2\zeta)}{\eta^2G(2-\zeta)}\int\limits_0^{R_s} R^3e^{\alpha+3\beta}PdR, \qquad (3.17)$$

что в пределе $\eta \to 1, \zeta \to \infty$ совпадает с формулой, полученной Авакяном [20] для аналогичного случая ОТО.

4. **Вакуумные уравнения ОТО.** Обсуждению интегрируемости временных уравнений теории ИБД будет посвящена следующая работа. Здесь ограничимся рассмотрением свойств вакуумных уравнений временной задачи ОТО:

$$e^{-2\alpha}\left[\frac{\dot R}{R}\left(\frac{\dot R}{R}+2\dot\beta\right)\right]-e^{-2\beta}\left[\frac{2R''}{R}+\frac{R'}{R}\left(\frac{R'}{R}-2\beta'\right)\right]+\frac{1}{R^2}=0, \quad (4.1)$$

$$e^{-2\alpha}\left[\frac{2\ddot R}{R}+\frac{\dot R}{R}\left(\frac{\dot R}{R}-2\dot\alpha\right)\right]-e^{-2\beta}\left[\frac{R'}{R}\left(\frac{R'}{R}+2\alpha'\right)\right]+\frac{1}{R^2}=0, \quad (4.2)$$

$$e^{-2\alpha}\left[\ddot\beta+\dot\beta(\dot\beta-\dot\alpha)+\frac{\ddot R}{R}+\frac{\dot R}{R}\left(\dot\beta-\dot\alpha\right)\right]-$$

$$e^{-2\beta}\left[\alpha''+\alpha'(\alpha'-\beta')+\frac{R''}{R}+\frac{R'}{R}(\alpha'-\beta')\right]=0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\dot R'}{R}-\alpha'\frac{\dot R}{R}-\dot\beta\frac{R'}{R}=0. \quad (4.4)$$

Следуя схеме раздела 3, можно показать, что уравнения (4.1), (4.2), (4.4) эквивалентны следующим двум

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[R\left(1+e^{-2\alpha}\dot R^2-e^{-2\beta}R'^2\right)\right]=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[R\left(1+e^{-2\alpha}\dot R^2-e^{-2\beta}R'^2\right)\right]=0,$$

которые являются дифференциальными следствиями соотношения

$$2M=R\left(1+e^{-2\alpha}\dot R^2-e^{-2\beta}R'^2\right) \quad (4.5)$$

и поэтому равносильны ему. Для того, чтобы выяснить статус уравнения (4.3), выразим R'' из (4.1) и $\dot R'$ из (4.4), приравняв результат их дифференцирования по t и r соответственно, имеем

$$e^{-2\alpha}\left[\ddot\beta+\dot\beta(\dot\beta-\dot\alpha)-\frac{\dot R^2}{R^2}\right]-e^{-2\beta}\left[\alpha''+\alpha'(\alpha'-\beta')-\frac{R'^2}{R^2}\right]-\frac{1}{R^2}=0.$$

Складывая это уравнение с поделенной на два суммой (4.1) и (4.2), получим уравнение (4.3). Таким образом, система уравнений (4.1)–(4.4) эквивалентна двум уравнениям–"динамическому" уравнению (4.4) и уравнению "связи" (4.5). Последнему можно приписать простой геометрический смысл: "фазовое пространство" данной динамической сиситемы есть гиперболоид

$$\frac{2M}{R}+\delta^2-\gamma^2=1,\ \gamma=e^{-\alpha}\dot R,\ \delta=e^{-\beta}R', \quad (4.6)$$

что допускает два варианта параметризации, если вместо 3-х неизвестных α,β,R ввести две независимые переменные.

<u>I-ый вариант.</u> Пусть $0<R\le 2M$. Введем $\chi(r,t)$ и $\psi(r,t)$ так, чтобы

$$\frac{2M}{R}=\cosh^2\chi,\quad \gamma=\sinh\chi\cosh\psi,\quad \delta=\sinh\chi\sinh\psi. \quad (4.7)$$

При этом

$$R=\frac{2M}{\cosh^2\chi},e^\alpha=-\frac{4M}{\cosh\psi}\frac{\dot\chi}{\cosh^3\chi},e^\beta=-\frac{4M}{\sinh\psi}\frac{\chi'}{\cosh^3\chi}, \quad (4.8)$$

уравнение связи обращается в тождество, а (4.4) дает

$$\dot\chi'-\frac{\cosh^2\chi+3\sinh^2\chi}{\cosh\chi\sinh\chi}\dot\chi\chi'-[(\ln\cosh\psi)'\dot\chi+(\ln\sinh\psi)^{\cdot}\chi']=0.$$

Последнее подстановкой

$$\omega=f(\chi)=\ln|\tanh\chi|-\frac{1}{2}\tanh^2\chi=$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{R}{2M}\right|-\frac{1}{2}\left(1-\frac{R}{2M}\right) \quad (4.9)$$

обращается в

$$\dot\omega'-(\ln\cosh\psi)'\dot\omega-(\ln\sinh\psi)^{\cdot}\omega'=0. \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) совпадает с исходным (4.4), если произвести замену

$$\alpha\to\tilde\alpha=\ln\cosh\psi,\beta\to\tilde\beta=\ln\sinh\psi.$$

Легко видеть, что здесь $\psi = \psi(r,t)$-произвольная функция, никак не ограниченная уравнениями Эйнштейна. Таким образом, можно считать обоснованным

<u>Предложение.</u> Решение системы вакуумных уравнений Эйнштейна, соответствующих наиболее общему виду сферически-симметрической метрики,сводится к решению линейного уравнения (4.10) с произвольно-фиксированной функцией $\psi = \psi(r,t)$.

Исследование соотношения (4.9) приводит к выводу о том, что области допустимых значений $\omega(r,t) < -\frac{1}{2}$ соответствуют два решения уравнений Эйнштейна

$$R_1(\omega) \geq 2M(1+2\omega) \geq R_2(\omega).$$

<u>II-ой вариант.</u> Пусть $R \geq 2M > 0$. Введем $\theta(r,t)$ и $\psi(r,t)$ так, чтобы

$$\frac{2M}{R} = \cos^2\theta; \gamma = e^{-\alpha}\dot{R} = \sin\theta\sinh\psi, \delta = e^{-\beta}R' = \sin\theta\cosh\psi. \tag{4.11}$$

При этом

$$R = \frac{2M}{\cos^2\theta}, e^{\alpha} = \frac{4M}{\sinh\psi}\frac{\dot{\theta}}{\cos^3\theta}; e^{\beta} = \frac{4M}{\cosh\psi}\frac{\theta'}{\cos^2\theta}$$

и уравнение (4.4) дает

$$\dot{\theta}' - \frac{\cos^2\theta - 3\sin^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\dot{\theta}\theta' - \left[(\ln\sinh\psi)'\dot{\theta} + (\ln\cosh\psi)^{\cdot}\theta'\right] = 0. \tag{4.12}$$

Подстановкой

$$\omega = f(\theta) = \ln|\tan\theta| + \frac{1}{2}\tan^2\theta = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{R}{2M}-1\right) + \left(\frac{R}{2M}-1\right)\right]$$

приводим (4.12) к виду

$$\dot{\omega}' - (\ln\sinh\psi)'\dot{\omega} - (\ln\cosh\psi)^{\cdot}\omega' = 0.$$

В этом случае для любого значения ω существует единственный корень $R = R(\omega)$ уравнения (4.13) и каждому решению $\theta(t,r)$ уравнения (4.14) при любой заданной функции $\psi(r,t)$ соответствует единственное решение $R(r,t), \alpha(r,t), \beta(r,t)$ уравнений Эйнштейна.

Таким образом, найдены преобразования, линеаризующие уравнения Эйнштейна, после чего они сводятся к линейному гиперболическому уравнению 2-го порядка (4.10) или (4.14). Показано, что решения вакуумных уравнений Эйнштейна, соответствующих центрально-симметричной метрике общего вида, зависят от одной произвольной функции $\psi(r,t)$ и от 2-х произвольных функций одного аргумента $C_1(t)$ и $C_2(r)$, которые определяют произвол множества решений линейного уравнения (4.10) или (4.14) при заданных $\psi(r,t)$.

Авторы благодарны участникам семинара кафедры теоретической физики Ереванского государственного университета за обсуждения. Двое из нас (В.В.П. и Г.Г.А.) работали при частичной поддержке гранта RY6000 Международного научного фонда (фонд Сороса).

Литература

1. Саакян Г.С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс.М., Наука, 1972.
2. Oppenheimer J.R., Snyder H. Phys.Rev., 1939, v.56, p.455.
3. Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж. Гравитация, М.Мир, 1977.
4. Логунов А.А., препринт ИФВЭ, 94-35, Протвино, 1994.
5. Jordan P. Schwerkraft und Weltall. Braunschweig, Vieweg and Sohn, 1955.
6. Brans C., Dicke R.H. Phys.Rev. 1961, 124, 925.
7. Brans C. Phys.Rev. 1962, 125, 2194.
8. Вайнберг С. Гравитация и космология. М.Мир, 1975.
9. Thorne K.S., Dykla I.J., preprint OAP-237, 1971.
10. Matsuda T., Progr.Theor.Phys., 1972, 47(2), 738.
11. Nariai H., Progr.Theor.Phys., 1972, 47(3), 832.
12. Арутюнян Г.Г., Папоян В.В., препринт ОИЯИ Р2-94-84, Дубна, 1994. Астрофизика, 1994 (в печати).
13. Pervushin V., Towmassian T., J.Moscow Phys.Soc., 1993, 3, 1.
14. Khvedelidze A., Papoyan V., Pervushin V., preprint JINR E2-94-163, Dubna, 1994, Phys.Rev.D in press.
15. Арутюнян Г.Г., Папоян В.В., препринт ОИЯИ, Р2-93-320, Дубна, 1993. Астрофизика, 1993 (в печати).
16. Dicke R.H., Phys.Rev. 1962, 125(6), 2163.
17. Арутюнян Г.Г., Папоян В.В., Астрофизика, 1986, 25, 217, Астрофизика, 1989, 30, 409.
18. Misner C.W., Sharp D.H., Phys.Rev., 1964, 136, 8571.
19. Авакян Р.М., Арутюнян Г.Г., Папоян В.В., Астрофизика, 1990, 38, 79.
20. Авакян Р.М., Астрофизика, 1990, 33, 429.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1994 года.

Арутюнян Г.Г. и др. P2-94-528

Временная задача в тензорно-скалярной теории тяготения Йордана — Бранса — Дикке

Сформулирована временная задача в тензорно-скалярной теории тяготения Йордана — Бранса — Дикке. Показано, что в конформно-соответствующем пространстве уравнения проблемы имеют такой же вид, как и уравнения Эйнштейна с дополнительным источником в виде компонент «тензора энергии-импульса» скалярного поля. Обсуждается вопрос о выполнимости теоремы Биркгофа в теории ИБД. Попутно получена формула, выражающая массу изолированного статического объекта в зависимости от распределения давления вещества. Обсуждается также интегрируемость вакуумных временных уравнений теории Эйнштейна.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод авторов

Haroutyunian G. et al. P2-94-528

Time-Depended Problem in Jordan — Brans — Dicke Tensor-Scalar Theory of Gravity

The spherically-symmetric and time-depended problem in Jordan — Brans — Dicke tensor-scalar theory of gravity is formulated. It is shown that the form of problem equations in the conformally corresponding space is the same as Einstein equations one with additional source, which are components of the «energy-momentum» tensor of the scalar field. The question of the realizability of the Birkhoff theorem in JBD theory is discussed. Simultaneously the formula for the total mass of the isolated static body as a function of the matter pressure distribution is obtained. Also the integrability of the time-depended vacuum Einstein equations is considered.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994