

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-94-483

О.Л.Веретин, О.В.Теряев

АКСИАЛЬНАЯ АНОМАЛИЯ
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВИРТУАЛЬНОСТЯХ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

1994

Аксиальная аномалия при произвольных виртуальностях

В аналитическом виде получено однопетлевое выражение для аксиально-векторной треугольной диаграммы, содержащей аномалию, в случае произвольных виртуальностей внешних импульсов. Рассматривается применение принципа соответствия т'Хофта к правилам сумм КХД для первого момента спиновой структурной функции фотона g_1^{γ} . Показано, что вклад синглетного аксиального тока в правила сумм g_1^{γ} для равен нулю.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод авторов

Veretin O.L., Teryaev O.V.

P2-94-483

Axial Anomaly at the Arbitrary External Momenta

In one loop approximation the analytical expression of the axial-vector triangle graph containing anomaly was obtained in a most general case of arbitrary virtualities of external momenta. The t'Hooft consistency principle is applied to the QCD sum rules for the first moment of the photon spin structure function. It is shown that the contribution of the singlet axial current to the sum rules for g_1^{γ} appears to be zero.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994

1 Введение

В последние годы в появилось множество работ, посвященных правилам сумм для спиновой структурной функции фотона g_1^7 . Этот интерес во многом связан с тем, что замена протонной мишени фотоном приводит к более простой и поддающейся анализу (с точки зрения теории возмущений) ситуации. Правило сумм для первого момента g_1^7 определяется матричными элементами аксиальных токов [1, 2]. В частности, в [3] выведено правило сумм $\int_0^1 g_1^7(x) dx = 0$ для фотонов на массовой поверхности, а в [2] рассматривался более общий случай. Данная работа инициирована идеей применения к правилам сумм принципа т'Хофта [4], утверждающего, что составные частицы воспроизводят аксиальные аномалии своих составляющих. Такой подход не приводит к каким либо изменениям в несинглетном канале. Синглетный канал играет исключительную роль из-за отсутствия голдстоуновского бозона при спонтанном нарушении киральной симметрии (U(1) проблема) и наличия глюонной аномалии в аксиальном токе. В частности, это приводит к механизму сокращения фотонной и глюонной аномалий, предложенному в [5]. Наше основное утверждение сводится к тому, что вклад синглетного тока в правило сумм для g_1^7 равен нулю.

Операторное разложение приводит к вычислению треугольных кварковых диаграмм, в которых одна вершина отвечает аксиальному току, а две других — виртуальным фотонам. Такие диаграммы вычислялись в работах [6, 7, 8] при различных частных случаях кинематики. Нам удалось вычислить эту амплитуду при произвольных виртуальностях внешних линий. Попутно нами было получено компактное представление для скалярной трехточечной функции Грина. И хотя для применения к правилам сумм нужна лишь кинематика $q = 0$, мы полагаем, что эти результаты имеют и самостоятельный интерес. Поэтому вычисления представлены достаточно подробно.

Наши вычисления основаны на применении дисперсионных соотношений для факторов. Такой подход к аномалии был предложен в работе [6]. При этом аномалия возникает естественным путем как вычитание в дисперсионном интеграле, появляющееся вследствие калибровочной инвариантности.

План статьи следующий. Во втором разделе представлены вычисления в однопетлевом приближении амплитуды перехода аксиального тока в два фотона. При этом использованы результаты вычисления скалярной трехточечной функции Грина, приведенные в приложении. В третьей части рассматриваются правила сумм для g_1^7 и обосновывается применение принципа т'Хофта на случай кинематики $q = 0$, обсуждаются области применимости правил сумм. Показано, что вклад синглетного аксиального тока в правило сумм для первого момента g_1^7 равен нулю.

2 Амплитуда $J_\mu^5 \rightarrow 2\gamma^*$

В низшем порядке амплитуда перехода аксиальный ток \rightarrow два фотона определяется треугольной кварковой диаграммой. Запишем ее в виде

$$T_{\alpha\mu\nu}(k_1, k_2) = F_1 \epsilon_{\alpha\nu\mu\sigma} k_1^\sigma + F_2 \epsilon_{\alpha\mu\nu\sigma} k_2^\sigma + F_3 k_{1\nu} \epsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma + F_4 k_{2\nu} \epsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma + F_5 k_{1\mu} \epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma + F_6 k_{2\mu} \epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma \quad (1)$$

где k_1, k_2 — 4-импульсы фотонов.

Инвариантные формфакторы F_i не являются полностью независимыми. Бозе-симметрия приводит к соотношениям

$$F_{1,3,4}(k_1, k_2) = -F_{2,6,5}(k_2, k_1), \quad (2)$$

а из калибровочной инвариантности следует

$$F_1 = (k_1 k_2) F_3 + (k_2^2) F_4, \quad F_2 = (k_1^2) F_5 + (k_1 k_2) F_6. \quad (3)$$

Запишем anomальное тождество Уорда [9]

$$q^\alpha T_{\alpha\mu\nu} = (F_2 - F_1) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma = 2m T_{\mu\nu} + \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma, \quad (4)$$

где $T_{\mu\nu}$ отвечает амплитуде перехода псевдоскалярного тока в два фотона, а m — масса фермиона. В силу бозе-симметрии, калибровочной и лоренц-инвариантности функция $T_{\mu\nu}$ имеет вид

$$T_{\mu\nu}(k_1, k_2) = G(k_1, k_2) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma. \quad (5)$$

С учетом (5) тождество Уорда (4) запишется в виде

$$2mG + \frac{1}{2\pi^2} = F_2 - F_1. \quad (6)$$

Выразим теперь F_1, F_2 через остальные формфакторы с помощью калибровочной инвариантности (3).

$$2mG + \frac{1}{2\pi^2} = (q^2 - k_1^2 - k_2^2) F_3 + k_1^2 F_5 - k_2^2 F_4. \quad (7)$$

В (7) использован результат прямого вычисления $F_3 = -F_6$.

Как было отмечено в [6], аномалия естественным образом возникает в дисперсионном подходе. Рассмотрим дисперсионные соотношения по переменной q^2 . Положим, что для F_3, F_4, F_5, G справедливы дисперсионные соотношения без вычитаний, и для мнимых частей имеет место "нормальное" тождество Уорда

$$2m \text{Im} G = (q^2 - k_1^2 - k_2^2) \text{Im} F_3 + k_1^2 \text{Im} F_5 - k_2^2 \text{Im} F_4. \quad (8)$$

Применяя к обеим частям равенства (8) дисперсионные соотношения и учитывая, что нет никаких вычитаний, получаем

$$2mG = (q^2 - k_1^2 - k_2^2) F_3 + k_1^2 F_5 - k_2^2 F_4 + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \text{Im} F_3 dq'^2. \quad (9)$$

Из (9) и (6) следует, что должно выполняться равенство

$$\int_{4m^2}^{\infty} \text{Im} F_3 dq'^2 = \frac{1}{2\pi}, \quad (10)$$

или, что то же самое,

$$\lim_{q^2 \rightarrow \infty} q^2 F_3(q^2, k_1^2, k_2^2) = -\frac{1}{2\pi^2}. \quad (11)$$

Равенства (10,11) представляют собой эквивалентную формулировку anomального тождества Уорда (7). Все вышеизложенное эквивалентно утверждению, что нельзя написать дисперсионные соотношения без вычитаний для всех формфакторов F_i , не нарушая калибровочную инвариантность. Поскольку мы положили, что для F_3-F_6 имеют место дисперсионные соотношения без вычитаний, то вычитания появятся в F_1, F_2 . Чтобы убедиться в этом, запишем условие калибровочной инвариантности для мнимой части F_1

$$\text{Im} F_1 = \frac{q^2 - k_1^2 - k_2^2}{2} \text{Im} F_3 + k_2^2 \text{Im} F_4. \quad (12)$$

Тогда

$$F_1 + c_0 + \dots = \frac{q^2 - k_1^2 - k_2^2}{2} F_3 + k_2^2 F_4 + \frac{1}{2\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \text{Im} F_3 dq'^2. \quad (13)$$

Из этого уравнения видно — чтобы калибровочная инвариантность (12) выполнялась и для действительных частей, необходимо присутствие вычитания $c_0 = 1/4\pi^2$, немедленно приводящее к правильному значению anomального члена в (6). Здесь очевидна невозможность одновременного сохранения калибровочной и киральной инвариантности на квантовом уровне.

Теперь перейдем к вычислению амплитуды (1). Мнимые части формфакторов вычисляются при помощи унитарного рассеяния диаграммы. Мы не приводим полных выражений для мнимых частей ввиду их громоздкости. Заметим только, что они имеют вид $Q(q^2, k_1^2, k_2^2) \text{Im} \Gamma(q^2, k_1^2, k_2^2)$, где Q — некая дробно-рациональная функция своих аргументов, а $\text{Im} \Gamma$ — абсорбтивная часть скалярной трехточечной функции Грина (см. приложение). Непосредственно вычислить аналитически дисперсионный

интеграл с таким подынтегральным выражением весьма проблематично. Есть другой путь, если нам известна не только $\text{Im}\Gamma$, но и сама функция Γ . В этом случае от интеграла по разрезу можно перейти к интегралу по контуру. Тогда вычисление дисперсионного интеграла сводится к вычислению вычетов от известной функции, что несравненно проще. Этот метод вычисления применим к любым дисперсионным соотношениям подобного типа, если функция $Q\text{Im}\Gamma$ ведет себя на бесконечности не хуже, чем $\text{Im}\Gamma$. В противном случае нужно было бы делать дополнительные вычитания.

Скалярная функция Грина Γ вычислена в приложении, поэтому можно применить описанную выше процедуру. Приводим лишь окончательный результат вычисления

$$F_1(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda^2} \left[(y-z)(x-y-z)\rho(x) - y(x-y-3z)\rho(y) + z(x-z-3y)\rho(z) \right] + \left[m^2 + \frac{yz(y-z)}{\lambda^2} \right] \tilde{\Gamma}(x, y, z) \right\}, \quad (14)$$

$$F_3(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ (x-y-z) + \left[y+z + \frac{12yz}{\lambda^2} \right] \rho(x) + \left[-y + \frac{6yz(z-y-x)}{\lambda^2} \right] \rho(y) + \left[-z + \frac{6yz(y-z-x)}{\lambda^2} \right] \rho(z) + \left[2m^2(x-y-z) + \frac{6xyz(x-y-z)}{\lambda^2} \right] \tilde{\Gamma}(x, y, z) \right\}, \quad (15)$$

где

$$x = q^2, \quad y = k_1^2, \quad z = k_2^2, \quad (16)$$

$$\rho(x) = \sqrt{1-4m^2/x} \ln \left[\frac{\sqrt{1-4m^2/x}-1}{\sqrt{1-4m^2/x}+1} \right] \quad (17)$$

$$\xi = q^2 - 2k^2 \quad (18)$$

$$\tilde{\Gamma}(x, y, z) = \int_{4m^2}^{\infty} \frac{L(x', y, z)}{\lambda(x', y, z)} \frac{dx'}{x' - x}, \quad (19)$$

L и λ определены, соответственно, формулами (34) и (35). $\tilde{\Gamma}$ с точностью до множителя совпадает со скалярной трехточечной функцией Грина. Остальные формфакторы получаются с помощью соотношений (2) и (3). В частном случае $k_2^2 = z = 0$ формулы (14,15) воспроизводят ответ, полученный в [7].

При вычислении функции $T_{\alpha\mu\nu}$ мы использовали дисперсионное представление по q^2 . Можно написать дисперсионный интеграл и по другой переменной, например по k_1^2 . Аномальное тождество Уорда воспроизводится и в этом случае. Аналог формулы (11) выглядит следующим образом:

$$\int_{4m^2}^{\infty} (\text{Im}F_3 - \text{Im}F_4) dk_1'^2 = \frac{1}{2\pi}. \quad (20)$$

При этом легко проверить, что (11,20) выполнены.

3 Правила сумм и принцип т'Хофта

Применим полученные результаты к анализу правил сумм для спиновой структурной функции фотона g_1^γ . Первый момент функции g_1^γ определяется диагональными матричными элементами аксиальных токов $J_{\mu 5}^{(r)}$ по фотонным состояниям при $q = 0, k_1 = -k_2 = k$. Здесь r - групповой индекс $r = 0, 1, \dots, N_F^2 - 1$, причем $r = 0$ отвечает чистому синглету по группе ароматов. Связь первого момента g_1^γ с матричными элементами токов дается соотношением [2]

$$\int_0^1 g_1^\gamma(x) dx = 4\pi\alpha \left[\sum_{r \neq 0} c^{(r)} \left(F_2^{(r)}(0, k^2, k^2) - F_1^{(r)}(0, k^2, k^2) \right) + c^{(0)} \left(F_2^{(0)}(0, k^2, k^2) - F_1^{(0)}(0, k^2, k^2) \right) \right]. \quad (21)$$

Здесь $c^{(r)}$ - групповые множители, определяемые квадратом зарядовой матрицы $\hat{c}^2 = \sum_r c^{(r)} \lambda^r$. В случае группы $\text{SU}(3)$ $c^{(0)} = 2/9, c^{(3)} = 1/3, c^{(8)} = 1/3\sqrt{3}$.

В формуле (21) мы полагаем $m_q \neq 0$, хотя предел $F_{1,(2)}(0, k^2, k^2)$ при $m_q \rightarrow 0$ является регулярным. Из (14) немедленно следует

$$(F_2 - F_1)(0, k^2, k^2) = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ 1 + \frac{2m_q^2}{k^2\tau} \ln \frac{\tau-1}{\tau+1} \right\}, \quad \tau = \sqrt{1-4m_q^2/k^2}. \quad (22)$$

Выражение (22) было получено также в [10, 11], где изначально принималась кинематика $q = 0$.

Вообще говоря, надо различать два существенно различных случая кинематики: а) когда $k^2 \neq 0$ и б) когда $k^2 \rightarrow 0$. Правило сумм (21) при $k^2 \neq 0$, когда кварки можно считать безмассовыми, получено в [1, 2]:

$$\int_0^1 g_1^\gamma(x) dx = -N_c \frac{e^4}{2} \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (23)$$

где e - электрические заряды кварков. Однако в этих работах не было уделено должного внимания принципу соответствия т'Хофта [4]. На основе этого принципа мы намерены показать, что вклад синглетного аксиального тока в правило сумм (23) равен нулю. Согласно т'Хофту аксиальная аномалия должна воспроизводиться на адронном уровне. Обосновать это можно так. Амплитуда перехода аксиального тока J_5^μ в два реальных фотона имеет аномальный полюс. Это накладывает ограничения на формфакторы. В частности, из (11) следует

$$F_3 \sim -\frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{q^2}, \quad \text{при } \frac{m_q^2}{q^2}, \frac{k^2}{q^2} \rightarrow 0. \quad (24)$$

Эта сингулярность возникает вследствие безмассовости кварков при вычислении треугольной диаграммы. Но, поскольку кварки не вылетают, этот полюс должен воспроизводиться какими-то физическими частицами. Для этого должны существовать

бездмассовые барионы либо безмассовые мезоны. Как известно, в природе реализуется вторая возможность (см., например, [12]). При этом в несинглетном канале полюс аксиальной аномалии воспроизводится голдстоуновскими бозонами. Синглетный же канал представляет собой особый случай. Из-за нетривиальной структуры вакуума КХД соответствующий голдстоуновский бозон отсутствует (известная U(1) проблема). Таким образом, η' -мезон оказывается тяжелым и не может воспроизвести аномалию. В силу принципа т'Хофта, это значит, что аномальный полюс должен сокращаться на уровне кварковых амплитуд. Такое сокращение должно происходить между глюонной и фотонной аномалиями (см. рис.1). Фотонно-глюонный блок на рис.16 должен быть пертурбативным, чтобы компенсировать лишнюю степень α_s (о конверсии $2g \rightarrow 2\gamma$ см. [12, 13]).

Здесь следует сказать еще несколько слов о принципе т'Хофта. Наши рассуждения о его справедливости основывались на существовании аномального полюса у амплитуды (1). Однако в случае $q = 0$ говорить о полюсе не приходится. Мы должны выделить аномалию каким-то другим способом. В киральном пределе "нормальная" часть амплитуды (1) автоматически обращается в ноль. Таким образом, выражение

$$(F_2 - F_1) \Big|_{m_q \rightarrow 0} \sim (F_2 - F_1) \Big|_{k^2 \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{2\pi^2} \quad (25)$$

является эквивалентным утверждению (24). Итак, наличие аномалий в несинглетном канале приводит в силу принципа т'Хофта к существованию голдстоуновских бозонов. Отсутствие же голдстоуновского бозона в синглетном канале влечет за собой отсутствие аномалии. С учетом всего вышесказанного, мы приходим к выводу, что при $k^2 \neq 0$ вклад синглетного канала в правило сумм для g_1^7 равен нулю из-за сокращения фотонной и глюонной аномалий. Поэтому (23) принимает вид

$$\int_0^1 g_1^7(x) dx = -N_C \frac{\langle e^4 \rangle}{2} \frac{\alpha}{2\pi} (1 - c), \quad (26)$$

где $c = \langle e^2 \rangle^2 / (N_F \langle e^4 \rangle)$ – отношение весов синглетного и несинглетного каналов [2].

Зададимся теперь вопросом: что означает $k^2 \neq 0$? Поскольку мы аргументируем применимость принципа т'Хофта переходом к киральному пределу (25), то, по-видимому, должно быть $k^2 \gg m_q$, где m_q – масса кварка. На адронном уровне характерным масштабом нарушения киральной инвариантности является масса пиона, поэтому $k^2 \gg m_\pi$. Аналогичное заключение в случае конформной аномалии приводится в [14]. Можно дать другой критерий применимости правила сумм (26). Рассмотрим однопетлевую амплитуду фотон-фотонного рассеяния вперед. Пусть p – виртуальный импульс интегрирования в петле. Аномальная часть соответствует области интегрирования $p_T^2 \gg m^2$ [11], где p_T – поперечный импульс. Область интегрирования $p_T^2 \sim m^2$ дает вклад в "нормальную" часть, поэтому правило сумм (26) соответствует эксперименту, в котором конечные адроны имеют поперечные импульсы $p_{h,T}^2 \gg m_\pi^2$.

Обратимся к случаю б), т.е. к пределу $k^2 \rightarrow 0$. При $k^2/m^2 \rightarrow 0$ ($q = 0$) в несинглетном канале имеет место сокращение аномальной и "нормальной" дивергенций аксиального тока. Поэтому следует ожидать, что $\int_0^1 g_1^{\gamma, NS}(x) dx = 0$. В этом можно непосредственно убедиться, используя явное выражение (22). Синглетный же канал доставляет определенные трудности. Действительно, диаграмма рис.1а дает нулевой вклад по той же причине сокращения аномальной и "нормальной" дивергенций, в то время, как для диаграммы рис.1б такого заключения сделать нельзя.

В пользу такого сокращения можно привести следующий аргумент. При $q = 0$ из калибровочной инвариантности (3) следует

$$(F_2 - F_1) = k^2(F_3 - F_6 + F_5 - F_6) = O(k^2), \quad \text{при } k^2 \rightarrow 0. \quad (27)$$

Второе равенство в (27) справедливо, если выражение в скобках не имеет полюсов. Заметим, что в несинглетном канале таких полюсов нет (см. (22)).

Рассмотрим более детально, как может происходить сокращение. Вклад диаграммы Рис.1б при $q = 0$ запишем в виде

$$R(k) = F_2^{(26)}(k) - F_1^{(26)}(k) = \int \frac{d^4 p}{p^4} [F_2(p) - F_1(p)] G(p, k). \quad (28)$$

Здесь F_1, F_2 отвечают треугольной диаграмме ток $\rightarrow 2g$, а $G(p, k)$ описывает пертурбативный блок конверсии двух глюонов в два фотона. Множитель $1/p^4$ возникает из-за глюонных пропагаторов. Согласно (22)

$$F_2(p) - F_1(p) = N(m, p) + 1/2\pi^2, \quad (29)$$

где $N(p)$ – "нормальная" часть, а $1/2\pi^2$ – аномальная. Разобьем область интегрирования на две части $p^2 \ll m^2$ и $p^2 \gg m^2$. Промежуточной областью интегрирования $p^2 \sim m^2$ мы пренебрегаем, считая, что она дает малый вклад. Кроме того, запишем R в виде суммы двух слагаемых, отвечающих интегралам с "нормальной" и аномальной частями формулы (29).

$$R = R_N + R_A, \quad R_N = \int \frac{d^4 p}{p^4} N(m, p) G(p, k), \quad R_A = \int \frac{d^4 p}{p^4} \frac{1}{2\pi^2} G(p, k). \quad (30)$$

Из принципа т'Хофта мы знаем, что $R_A = 1/2\pi^2$. Чтобы обеспечить это равенство, функция G/p^4 должна убывать на бесконечности, основной вклад дает область интегрирования малых p . Короче говоря, в R_A и R_N существенный вклад дает лишь область интегрирования $p \sim 0$. Но, поскольку R зависит лишь от двух размерных параметров m, k_μ , то можно считать, что $m^2 \rightarrow \infty$ при $k^2 \ll m^2$. В таком режиме $N(m, p) \simeq -1/2\pi^2$ (это следует из (22), т.е. из сокращения "нормальной" и аномальной дивергенций в треугольной петле). В силу этого имеем $R_N \simeq -R_A$, т.е. $R \simeq 0$. Другими словами, множитель $(F_2 - F_1)$ в формуле (28) при $k^2 \rightarrow 0$ эффективно обрезает область интегрирования малых p , в которой функция G/p^4 существенно отлична от нуля. Приведенные в последних двух абзацах рассуждения, конечно, являются

формальными и чисто качественными. Для более аккуратного анализа требуется знать больше о функции G . Поскольку она содержит фактор $1/\alpha_s$, то, конечно, не может быть получена в рамках разложения по α_s . Однако такое поведение можно объяснить в рамках $1/N$ -разложения [15]. Подробный анализ проведен в работе [16].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-02-3811.

А Приложение

Рассмотрим скалярную трехточечную функцию Грина Γ во втором порядке теории возмущений. Работы, посвященные скалярным петлевым интегралам, периодически появляются в литературе [17, 18]. В частности, в [17] получено компактное выражение для Γ для случая $m = 0$. Нас интересует массивный случай

$$\Gamma(k_1^2, k_2^2, q^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - m^2][(p + k_2)^2 - m^2][(p - k_1)^2 - m^2]}. \quad (31)$$

Пусть два из трех импульсов являются евклидовыми $k_1^2, k_2^2 < 0$. Считая, что нет осложнений с аномальными порогами, напомним дисперсионное представление без вычитаний по третьей переменной $k_3^2 = (k_1 + k_2)^2 \equiv q^2$.

$$\Gamma(k_1^2, k_2^2, k_3^2) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds}{s - k_3^2} \text{Im}\Gamma(k_1^2, k_2^2, s). \quad (32)$$

Выражение для мнимой части получается, если сделать унитарный разрез диаграммы и проинтегрировать по углам.

$$\text{Im}\Gamma = -\frac{i}{16\pi} \frac{1}{\lambda(x_3, x_1, x_2)} L, \quad (33)$$

где

$$L = \ln \left[\frac{x_3(x_3 - x_1 - x_2) - \lambda(x_3, x_1, x_2)\lambda(x_3, m^2, m^2)}{x_3(x_3 - x_1 - x_2) + \lambda(x_3, x_1, x_2)\lambda(x_3, m^2, m^2)} \right], \quad (34)$$

$$\lambda(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx}, \quad (35)$$

$$x_1 = k_1^2, \quad x_2 = k_2^2, \quad x_3 = k_3^2. \quad (36)$$

Формулы (32-36) нужны при вычислении дисперсионных интегралов для амплитуды $j_\mu^5 \rightarrow 2\gamma$. Саму же функцию Γ проще вычислить иным способом. Следуя работам [19], напомним дифференциальное уравнение для Γ , которое удается решить в явном виде. Путем интегрирования по частям выражения (32) можно получить следующее тождество [19]

$$2m^2 \frac{d}{dm^2} \Gamma + 2J_1 - X_3 D_2 - X_2 D_3 = 0, \quad (37)$$

где введены обозначения

$$J_i \equiv J(k_i^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - m^2]^2 [(p - k_i)^2 - m^2]}, \quad (38)$$

$$X_1 = (k_2 - k_3)^2, \quad X_2 = (k_1 - k_3)^2, \quad X_3 = (k_2 - k_1)^2, \quad (39)$$

а D_i отвечают треугольной диаграмме, в которой одна из линий пролифференцирована по m^2 . Поскольку вся зависимость Γ от массы содержится в пропагаторах, то

$$D_1 + D_2 + D_3 = \frac{d}{dm^2} \Gamma. \quad (40)$$

Соответствующим образом симметризуя уравнение (37) и используя (40), можно избавиться от интегралов D_i . При этом получается уравнение

$$\phi \frac{d}{dm^2} \Gamma = \phi^{(1)} J_1 + \phi^{(2)} J_2 + \phi^{(3)} J_3. \quad (41)$$

где

$$\phi^{(1)} = x_1(x_2 + x_3 - x_1),$$

$$\phi^{(2)} = x_2(x_1 + x_3 - x_2),$$

$$\phi^{(3)} = x_3(x_1 + x_2 - x_3),$$

$$\phi = \phi_1 + m^2 \phi_2,$$

$$\phi_1 = x_1 x_2 x_3,$$

$$\phi_2 = \lambda^2(x_1, x_2, x_3). \quad (42)$$

Дифференциальное уравнение (41) легко интегрируется

$$\Gamma(m^2) = -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 \xi d\xi \int_{+\infty}^{m^2} \frac{d\mu^2}{\phi_1 + \mu^2 \phi_2} \left\{ \frac{\phi^{(1)}}{\mu^2 + \xi(\xi - 1)x_1} + \dots \right\}. \quad (43)$$

Здесь и ниже многоточием обозначены два слагаемых, получаемых из первого циклической перестановкой x_1, x_2, x_3 . При фиксировании нижнего предела интеграла по $d\mu^2$ мы использовали тот факт, что Γ удовлетворяет естественному граничному условию $\Gamma(m^2 = \infty) = 0$. Проинтегрировав (43) по $d\mu^2$, получим

$$\Gamma(x_1, x_2, x_3) = -\frac{i}{16\pi^2} [\phi^{(1)} \kappa(x_1, x_2, x_3) + \dots], \quad (44)$$

$$\kappa(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 d\xi \frac{\xi}{\phi_1 - \xi(\xi - 1)x_1 \phi_2} \ln \left[\frac{m^2 + \xi(\xi - 1)x_1}{m^2 + \phi_1/\phi_2} \right]. \quad (45)$$

Интеграл по $d\xi$ в (45) может быть вычислен явно. Результат имеет вид

$$\kappa(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\lambda} \left[-\text{Li}_2\left(\frac{t_1+1}{t_1-\tau_1}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{t_1+1}{t_1+\tau_1}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{t_1-1}{t_1-\tau_1}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{t_1-1}{t_1+\tau_1}\right) \right], \quad (46)$$

где $\text{Li}_2(z) = -\int_0^1 d\xi \ln(1-z\xi)/\xi$ - дигамма-функция, а t_1 и τ_1 задаются выражениями

$$t_1 = (x_1 - x_2 - x_3)/\lambda, \quad \tau_1 = \sqrt{1 - 4m^2/x_1}. \quad (47)$$

Таким образом, уравнения (44), (46) и (47) дают замкнутое выражение для массивной скалярной трехточечной функции Грина (31). Предел $m \rightarrow 0$ приводит к формуле для Γ , полученной ранее в [17].

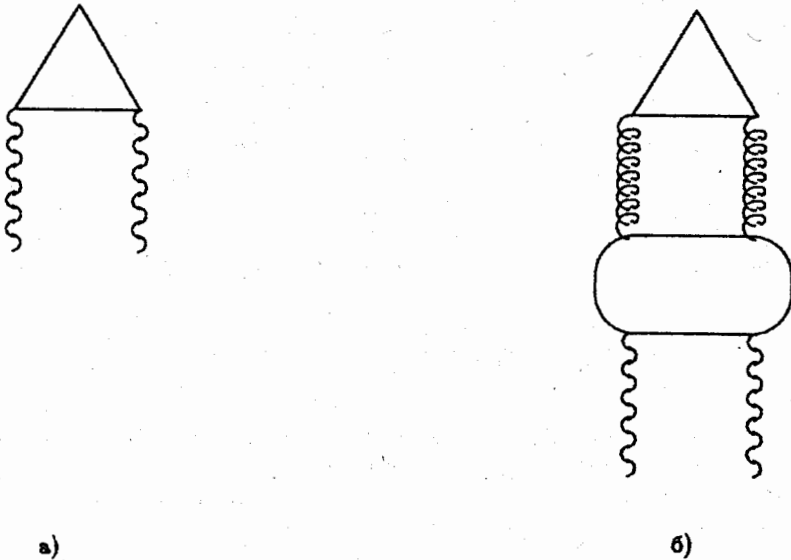


Рисунок 1. Сокращение фотонной (а) и глюонной (б) аномалии аксиального тока в синглетном канале.

Литература

- [1] Efremov A.V., Teryaev O.V.// Phys.Lett. 1990. V.B240. P.
- [2] Narison S., Shore G.M., Veneciano G. CERN Preprint CERN-TH.6467/92, 1992.
- [3] Bass A.D. Adelaide preprint ADP-91-150/t91, 1991.
- [4] t'Hooft G. Resent Development in Gauge Theories /Eds. t'Hooft et al. N.Y.: Plenum Press, 1980, P.241.
- [5] Efremov A.V., Soffer J., Teryaev O.V.//Nucl.Phys. 1990, V.B346, P.97; Efremov A.V., Teryaev O.V.// Phys.Lett. 1990. V.B240. P.200.
- [6] Dolgov A.D., Zakharov V.I.//Nucl.Phys. 1971. V.B27. P.525.
- [7] Ачасов Н.Н.//ЖЭТФ. 1992. Т.101. С.1713; ЖЭТФ. 1993. Т.103. С.11.
- [8] Hořejší J. Preprint E2-85-56, Dubna, 1985.
- [9] Adler S.L.//Phys.Rev. 1968. V.82. P.664; Bell J.S., Jackiw R.//Nuovo Cim. 1969. V.A60. P.47.
- [10] Bass S.D. et al.//J.Moscow Phys.Soc. 1991. V.1. P.317.
- [11] Carlitz R.D., Collins J.C., Mueller A.H.//Phys.Lett. 1988. V.B214. P.229.
- [12] Шифман М.А.//УФН. 1989. Т.157. С.561.
- [13] Leutwyler H., Shifman M. Bern University Preprint BUTP-89/2, 1989.
- [14] A.S.Gorski, B.L.Ioffe, A.Yu.Khodjamirian//Phys.Lett. 1989. V.B227. P.174.
- [15] t'Hooft G.//Nucl.Phys. 1974. V.B72. P.461.
- [16] Ghosh K., Patel B. Preprint CU-TP-509, New York, 1991.
- [17] Davydchev A.I., Ussyukina N.L.//Yad.Fiz. 1993. V.56. P.172.
- [18] Boos E.E., Davydchev A.I. Preprint -90-11/157, Moscow, 1990.
- [19] Kotikov A.V.//Phys.Lett. 1991. V.B254. P.185; ibid. V.B259. P.314; ibid. V.B267. P.123.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 декабря 1994 года.