сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-94-472

М.Э.Перельштейн, Э.А.Перельштейн

ЗАМЕТКИ ПО ПОВОДУ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЕКТОРА ПОЛЯРИЗАЦИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

1994

Перельштейн М.Э., Перельштейн Э.А. Р2-94-472
Заметки по поводу уравнений движения вектора поляризации релятивистских частиц

Рассматриваются вопросы обоснования и использования уравнений Баргманна–Мишеля–Телегди для описания движения вектора поляризации релятивистских частиц. Показана важность учета ориентации базисных векторов сопутствующей частице системы координат, выделенность меллеровых систем координат, сохраняющих взаимную ориентацию двух близких по времени сопутствующих систем. Обсуждается общековариантный вид уравнений спиновой прецессии. Показана ошибочность утверждений о нарушении принципа относительности в явлениях спиновой прецессии.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод авторов

Perelstein M.E., Perelstein E.A. P2-94-472
Notes on Relativistic Equations of Spin Motion

Grounds and applications of Bargmann–Michel–Telegdi equations for the precession of the polarization vector of relativistic particles are considered. A critical question in the discussion is the orientation of the rest-frame reference vectors. Moller reference frames which keep constant the mutual orientation of the two infinitely close in time rest-frame are shown to have a special role. The generally covariant form of the equations is discussed. The assertion that the principle of relativity is violated in the phenomenon of spin precession is proved to be untrue.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994

1 Введение

Для описания движения вектора поляризации релятивистских частиц в пространственно-однородных электромагнитных полях широко используется известное уравнение Баргманна-Мишеля-Телегди (БМТ) /1/ или эквивалентное ему уравнение в /2/. Использование этого уравнения в различных экспериментальных ситуациях и задачах ускорительной физики не вызывает никаких вопросов. Более того, уравнение БМТ было в основе прецизионного эксперимента по измерению аномального магнитного момента μ-мезона /3/, требовавшего чрезвычайно высокого уровня точностей. Поэтому вполне правомерен вопрос: зачем возвращаться к изучению свойств уравнения БМТ? Наш интерес к этой проблеме стимулирован дискуссией, которая происходит в последнее время /4-6/. По сути предмет дискуссии можно выразить как заведомо неверное утверждение, неявно содержащееся в работах /4, 5/: на основе явлений спиновой прецессии в ковариантном подходе БМТ возможно обнаружить нарушение принципа относительности. Ошибка в рассуждениях, приводящая к неправильному выводу в /4, 5/, выявляется в разделе 4 данной работы. Причина несовпадения частоты прецессии из /1/, выраженной в собственном времени частицы, в различных инерциальных системах обусловлена вращением базисных векторов сопутствующей частице системы координат, определенных в каждой системе согласно /1/, относительно базисных векторов, преобразованных по Лоренцу из другой системы.

Вопрос ориентации базисных векторов сопутствующей системы, естественно, является важным для описания спиновой прецессии. Математическая особенность проблемы связана с дифференцированием векторов вдоль траектории частицы. Таким образом, в рассмотрении участвуют три системы координат: лабораторная, сопутствующая в определенный момент времени t и сопутствующая в момент времени $t + dt$. Для криволинейной траектории в общем случае эти две сопутствующие системы оказываются повернутыми друг относительно друга. В частности, проявлением этого вращения является томасовская прецессия вектора поляризации, заданного в сопутствующей системе, получаемой из лабораторной лоренцевским преобразованием без вращения /2/. Частота прецессии в /2/, как известно, совпадает с частотой БМТ для вектора поляризации в лабораторной системе координат. С относительным вращением соответствующих сопутствующих системы координат связано несохранение частоты спиновой прецессии в /2/ при переходе от одной инерциальной системы к другой - раздел 3. Существуют выделенные, а именно меллеровы /7/, преобразования координат, которые сохраняют взаимную ориентацию осей двух близких по времени сопутствующих или собственных (ускоренных) систем координат. Использование для вывода уравнений БМТ меллеровых собственных систем в качестве исходных, где выполняются нерелятивистские трехмерные уравнения для движения вектора поляризации, а временная компонента равна нулю по предположению БМТ, кажется более предпочтительным, чем инерциальных без поворотов осей, как с физической (принцип эквивалентности), так и с методической точек зрения. Хотя в инерциальных системах координат уравнения БМТ не меняют своего вида и никаких новых физических результатов не следует, в разделе 2 обсуждается общековариантный вид уравнений БМТ.

2 Общековариантный вид уравнений БМТ

Следуя рассуждениям Баргманна, Мишеля и Телегди /1/ и предполагая выход за рамки специальных преобразований Лоренца, запишем общековариантное уравнение для четырехмерного вектора поляризации a^i:

$$\frac{Da^i}{d\tau} = \frac{da^i}{d\tau} + \Gamma^i_{kl}u^k a^l = 2\mu F^{ik}a_k - 2\mu' u^i F^{kl}u_k a_l. \qquad (1)$$

Здесь принята система единиц $c = 1, h = 1, m = 1$, μ и μ' - нормальная и аномальная части магнитного момента частицы, F^{ik} - тензор электромагнитного поля, u^i - четырехскорость частицы, а Γ^i_{kl} - символы Кристоффеля. Уравнение (1) во всех инерциальных системах совпадает с уравнением Баргманна, Мишеля и Телегди. Смысл перехода к общековариантной записи состоит в том, что он позволяет по сравнению с БМТ рассматривать системы покоя частицы с произвольной меняющейся во времени ориентацией осей по отношению к лабораторной системе. Уравнение для вектора поляризации в системе покоя в /1, 2/ верно, если взаимная ориентация осей систем покоя для двух близких точек траектории не меняется. В этом случае системы покоя есть меллеровы мгновенные инерциальные системы /7/.

Вывод уравнения (1) можно сделать, если предположить, что условия, требуемые БМТ в системе покоя, относятся к собственной меллеровой системе, т.е. системе, в которой скорость и ускорение частицы равны нулю, а ориентация осей для двух бесконечно близких моментов времени не меняется. Таким образом, потребуем, чтобы в меллеровой собственной системе вектор поляризации имел вид $a^i = (0, \vec{\xi})$, а вектор $\vec{\xi}$ удовлетворял уравнению

$$\frac{d\vec{\xi}}{d\tau} = 2\mu[\vec{\xi}\vec{H}], \qquad (2)$$

где $\vec{H}$ - напряженность магнитного поля в меллеровой системе. Заметим, что наше требование находится в соответствии с принципом эквивалентности и $\frac{da^0}{dt} = 0$ вместе с $a^0 = 0$ в отличие от инерциальных систем покоя /1, 2/. Покажем, что в меллеровой системе пространственные компоненты матрицы $\Gamma^{\nu}_{i\mu}u^i$ равны нулю. Рассмотрим преобразования от лабораторных (инерциальных) координат X к неинерциальным координатам x вида

$$X^i = f^i(\tau) + x^k\alpha^i_k(\tau), \tag{3}$$

где $f^i(\tau)$ описывает движение начала координат неинерциальной системы в инерциальной.

Ковариантная производная произвольного четырехмерного вектора b^i является вектором. Если $b^i_{(л)}$ и $b^i_{(н)}$ - компоненты b^i соответственно в лабораторной и неинерциальной системах, то

$$(\alpha^{-1})^j_i\frac{db^i_{(л)}}{d\tau} = \frac{Db^j_{(н)}}{d\tau} \tag{4}$$

(в лабораторной системе ковариантная производная совпадает с обычной). Подставив в (4) $b^i_{(л)} = \alpha^i_k b^i_{(н)}$, получим

$$\frac{db^j_{(н)}}{d\tau} + (\alpha^{-1})^j_i\frac{d\alpha^i_k}{d\tau}b^k_{(н)} = \frac{Db^j_{(н)}}{d\tau}.$$

По определению символов Кристоффеля Γ^j_{ik} в неинерциальной системе,

$$\frac{Db^j_{(н)}}{d\tau} = \frac{db^j_{(н)}}{d\tau} + \Gamma^j_{ik}u^i b^k_{(н)},$$

поэтому

$$(\alpha^{-1})^j_i\frac{d\alpha^i_k}{d\tau} = \Gamma^j_{ik}u^i. \tag{5}$$

Преобразования к меллеровым координатам имеют вид (3), причем величины α^i_k являются в этом случае компонентами унитарной матрицы и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\alpha^i_k}{d\tau} = \alpha^i_l\xi^l_k, \tag{6}$$

где $\xi_{lk} = \dot{u}_l u_k - \dot{u}_k \dot{u}_l$. Используя унитарность $(\alpha^{-1})^j_i = \alpha^i_j$, из (5) и (6) получим

$$\Gamma^\nu_{i\mu}u^i = \alpha^i_\mu(\dot{u}_l u_k - \dot{u}_k u_l)\alpha^l_\nu.$$

Так как меллерова система является собственной, то

$$\Gamma^\nu_{i\mu}u^i = 0.$$

Покажем, что для заданного движения частицы меллеровы системы, соответствующие различным лабораторным (инерциальным), совпадают. Это удобно сделать в матричном виде. Пусть имеются две инерциальные системы, движущиеся со скоростями $\vec{v}$ и $\vec{v'}$; $\mathrm{M}(\vec{v})$ и $\mathrm{M}(\vec{v'})$ - матрицы перехода в соответствующие им меллеровы системы, а $\mathbf{L}(\vec{v'}/\vec{v})$ - матрица перехода между ними. Тогда наше утверждение сводится к матричному равенству

$$\mathbf{L}(\vec{v'}/\vec{v})\mathrm{M}(\vec{v}) = \mathrm{M}(\vec{v'}).$$

Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{L}(\vec{v'}/\vec{v})\mathrm{M}(\vec{v})$; тогда

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{L}(\vec{v'}/\vec{v})}{d\tau}\mathrm{M}(\vec{v}) + \mathbf{L}(\vec{v'}/\vec{v})\frac{d\mathrm{M}(\vec{v})}{d\tau};$$

Но $\frac{d\mathbf{L}(\vec{v'}/\vec{v})}{d\tau} = 0$, а $\frac{d\mathrm{M}(\vec{v})}{d\tau} = \xi(\vec{v})\mathrm{M}(\vec{v})$ в силу уравнения (6) ($\xi_{ik} = \dot{u}_i u_k - \dot{u}_k u_i$). Поэтому

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \mathbf{L}(\vec{v'}/\vec{v})\xi(\vec{v})\mathrm{M}(\vec{v}) = \mathbf{L}^{-1}(\vec{v}/\vec{v'})\xi(\vec{v})\mathbf{L}(\vec{v}/\vec{v'})\mathbf{L}(\vec{v'}/\vec{v})\mathrm{M}(\vec{v});$$

Так как $\xi(\vec{v})$ - тензор второго ранга, то

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \xi(\vec{v'})\mathbf{X},$$

т. е. $\mathbf{X}$ удовлетворяет уравнению (6) в системе $\vec{v'}$, поэтому $\mathbf{X}$ совпадает с $\mathrm{M}(\vec{v'})$.

Как известно /7/, направляющие орты меллеровой системы прецессируют относительно лабораторной с частотой, равной

$$\vec{\omega}_T = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\left[\vec{v}\dot{\vec{v}}\right] \qquad (7)$$

(прецессия Томаса). Если частица совершает плоское движение в скрещенных электрическом и магнитном полях, то частота прецессии ее спина в лабораторной системе получается добавлением ω_T к частоте прецессии спина в меллеровой системе ω_M, полученной из нерелятивистского уравнения (2):[1]

$$\omega_l = \omega_M + \omega_T \qquad (8)$$

Вследствие доказанного утверждения о единственности меллеровой системы и (8) частоты прецессии спина в двух различных системах отличаются на разность соответствующих томасовских частот.

3 Об уравнении спиновой прецессии в мгновенных инерциальных сопутствующих системах /2/

Уравнение, эквивалентное БМТ, но для вектора поляризации в мгновенной инерциальной сопутствующей системе, приведено в /2/. Сопутствующая система получается в /2/ в каждый момент времени преобразованием Лоренца без вращения из лабораторной. Таким образом, ориентация осей сопутствующих систем относительно лабораторной не меняется, а взаимная ориентация последовательных систем меняется вдоль траектории частицы.

Покажем, что орты введенной таким образом системы прецессируют относительно меллеровой с томасовской частотой.

[1]Подобное утверждение, однако без конкретизации собственной системы, содержится в работах /3, 8/.

Введем неинерциальную систему, оси и скорость которой в каждый момент времени совпадают с осями и скоростью соответствующей мгновенной сопутствующей, а ускорение - с ускорением частицы. Преобразования от лабораторной системы к введенной неинерциальной имеют вид (3), где α_i^k - компоненты матрицы $\alpha(\vec{v}(\tau))$ преобразования Лоренца без вращений, соответствующего скорости частицы в момент времени τ. Прецессия направляющего орта меллеровой системы описывается в лабораторной системе уравнением /7/

$$\frac{de^i}{d\tau} = u^i \dot{u}^l e_l$$

Преобразуя это уравнение к неинерциальной системе и учитывая, что она собственная, имеем для пространственных ортов

$$\frac{de^{\mu}_{(\varkappa)}}{d\tau} + (\alpha^{-1})^{\mu}_i \frac{d\alpha^i_{\kappa}}{d\tau} e^{\kappa}_{(\varkappa)} = 0,$$

т. е. прецессия определяется матрицей $\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{d\tau}$. Воспользовавшись разложением $\alpha = 1 + \gamma b + \frac{\gamma^2 b^2}{1+\gamma}$, где

$$b = \begin{pmatrix} 0 & v_x & v_y & v_z \\ -v_x & 0 & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & 0 & 0 \\ -v_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

для вычисления пространственной части $\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{d\tau}$, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_{x,y,z}$ удовлетворяют (7), , что и доказывает справедливость сделанного утверждения.

Прецессия мгновенных сопутствующих систем, используемых в /2/, относительно меллеровой с томасовской частотой и поясняет известный факт совпадения частот прецессии в /1/ и /2/. Следует заметить, однако, что мгновенные инерциальные системы в /2/, полученные из различных лабораторных систем, не совпадают друг с другом, а их орты прецессируют с относительной частотой, равной разности частот томасовских прецессий в этих системах. В связи с этим отметим небольшую неточность в /2/, связанную с использованием одного и того же обозначения для двух различных величин: вектора поляризации, который используется при выводе уравнения БМТ и заданного в системе покоя, соответствующей меллеровой, и вектора поляризации в мгновенной сопутствующей системе, получаемой из лабораторной преобразованием Лоренца без вращения.

4 К дискуссии о прецессии спина и принципе относительности

В работах /4, 5/ делается утверждение о нарушении принципа относительности в явлениях прецессии спина движущихся частиц. Предполагается, что выражение для частоты прецессии спина частицы, движущейся со скоростью $\vec{v} \perp \vec{H}$:

$$\vec{\omega} = (2\mu + 2\mu'(\gamma - 1))\,\vec{H} + \left(\frac{2\mu + 2\mu'\gamma}{\gamma + 1}\right)\left[\vec{E}\vec{v}\right], \qquad (9)$$

выполняется только в одной системе координат ("абсолютной"), а в других системах может быть найдено путем лоренцевских преобразований электромагнитных полей и скоростей в (9). Найденная таким образом частота зависит от скорости движения относительно "абсолютной" системы, что позволяет говорить об опытах по обнаружению абсолютного пространства.

Покажем, что относительную частоту прецессии в некоторой инерциальной системе, выраженную в абсолютном времени /1/

$$\Omega_{BMT} = -\frac{2\mu\vec{E}\vec{n}}{v\gamma} + 2\mu'\gamma\left(\frac{\vec{E}\vec{n}}{v} + \vec{v}\left[\vec{H}\vec{n}\right]\right), \qquad (10)$$

где $\vec{n}$ - единичный нормальный к скорости вектор, можно получить и путем лоренцевских преобразований вектора поляризации из другой инерциальной системы, причем выражение для Ω_{BMT} будет иметь вид (10) и не будет содержать относительной скорости движения систем. Возьмем исходное выражение для вектора поляризации, нормированного на его четырехмерный модуль, в форме /1/:

$$a = e_{\|}cos\phi + e_{\perp}sin\phi, \qquad (11)$$

где $e_{\|} = \gamma\left(v, \frac{\vec{v}}{v}\right)$; $e_{\perp} = (0, \vec{n})$; $\vec{n}\vec{v} = 0$; $\vec{n}\vec{n} = 1$; ϕ - угол прецессии спина относительно скорости, такой что $\dot{\phi} = \Omega_{BMT}$. Заметим, что выражение (10) должно сохранять свой вид в любой инерциальной системе. Пусть преобразование векторов к произвольной системе дается матрицей Лоренца с коэффициентами α_{ik}. Тогда

$$a_i' = \alpha_{ik}e_{\|k}cos\phi + \alpha_{ik}e_{\perp k}sin\phi.$$

Для того, чтобы вектор поляризации в штрихованной системе представлялся в виде (11) с ортами $e_{\|}'$, $e_{\perp}'$, соответствующими траектории в этой системе, необходимо изменить угол прецессии на $\phi' = \phi + \Phi$, а угол Φ определить из уравнений

$$cos\Phi = \alpha_{ik}e_{\|k}e_{\|i} = \alpha_{ik}e_{\perp k}e_{\perp i},\; sin\Phi = -\alpha_{ik}e_{\perp k}e_{\|i} = \alpha_{ik}e_{\|k}e_{\perp i}. \qquad (12)$$

Выполнимость соотношений (12) легко проверяется, если учесть, что векторы $\alpha e_{\|}$ и $\alpha e_{\perp}$ ортогональны и вместе с $e_{\|}$ и $e_{\perp}$ лежат в одной плоскости. Из уравнений (12) получаем разность частот прецессии в двух системах координат:

$$\dot{\Phi} = \frac{-\alpha_{ik}\left(e_{\perp k}e_{\parallel i} + e_{\perp k}e_{\parallel i}\right)}{\alpha_{ik}e_{\parallel k}e_{\parallel i}}. \tag{13}$$

Рассмотрим простой конкретный пример, когда частица с g-фактором равным 2 движется в некоторой системе по круговой траектории в постоянном магнитном поле. В этой системе частота прецессии спина относительно скорости частицы $\dot{\phi} = 0$. В движущейся относительно этой системе имеются скрещенные электрическое и магнитное поля, и траектория частицы имеет вид трохоиды. Этот пример (с ненулевой аномальной частью магнитного момента, что в данном случае несущественно), и рассматривается в работах /4, 5/, где вычисляются значения частоты прецессии в двух точках на трохоиде, таких, где скорости частицы параллельны относительной скорости систем. Вычисление мгновенной частоты прецессии по формуле (13) в указанных точках дает, в полном соответствии с /1/,

$$\dot{\Phi} = -\frac{\left(\vec{E}\vec{n}\right)}{v\gamma}$$

где v, γ - значения скорости и релятивистского фактора частицы в выбранных точках трохоиды.

В любой инерциальной системе частота прецессии складывается из циклотронной частоты

$$\omega_c = \vec{H} - \frac{1}{v^2}\left[\vec{v}\vec{E}\right]$$

и частоты Ω_{BMT} (Это очевидно при переходе к соответствующей мгновенной сопутствующей системе/2/). Таким образом, вычисление частоты прецессии с использованием преобразований Лоренца дает, естественно, результат, полученный в /1/ в

результате решения ковариантного уравнения для спиновой прецессии. [2] Нарушение принципа относительности нельзя искать, исходя из ковариантных уравнений БМТ для движения вектора поляризации в электромагнитных полях.

Авторы благодарны Б. М. Болотовскому, В. Л. Любошицу, Б. С. Неганову, М. И. Подгорецкому и Л. М. Сороко за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА.

1. V. Bargmann, L. Michel, V. L. Telegdi. Phys. Rev. Lett., 1959, v.2, p.435.

2. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Релятивистская квантовая теория, ч. 1, М., Наука, 1968.

3. Дж. Филд, Э. Пикассо, Ф. Комбли. УФН, т.127, 1979, с. 553.

4. Б. С. Неганов. О принципе относительности и нарушении его в явлениях спиновой прецессии движущихся заряженных частиц, Препринт ОИЯИ, Р4-89-827, Дубна, 1989.

5. B. S. Neganov. Hadr. Journ., 1991, v.14, p.377.

6. В. С. Барашенков, М. З. Юрьев. Нарушается ли принцип относительности? Препринт ОИЯИ, Р2-93-147, Дубна, 1993.

7. К. Меллер. Теория относительности. М., Атомиздат, 1975.

8. В. Л. Любошиц. ЯФ, 1980, т.31, с.986.

[2] На необходимость дополнительного члена в выражении для частоты прецессии, полученной в /4, 5/, при переходе в движущуюся систему координат, указывалось в работе /6/ и В. Л. Любошицем в 1989 г.(частное сообщение).

Рукопись поступила в издательский отдел
8 декабря 1994 года.