объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-94-469

Н.А.Черников

ПЛАНИМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО, МОДЕЛЬ ПУАНКАРЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БОГОЛЮБОВА В ТЕОРИИ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ

Направлено в Труды Международного Боголюбовского симпозиума «Фундаментальные проблемы теоретической и математической физики», Дубна, 18—21 августа 1994 г.

1994

Черников Н.А. Р2-94-469

Планиметрия Лобачевского, модель Пуанкаре
и преобразование Боголюбова в теории сверхтекучести

Установлена связь преобразований Боголюбова в теории сверхтекучести с планиметрией Лобачевского.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод Г.Г.Сандуковской

Chernikov N.A. P2-94-469

The Lobachevsky Planimetry, the Poincare Model
and the Bogoliubov Transformations in the Theory of Superfluidity

A relation is established between the Bogoliubov transformations in the theory of superfluidity and the Lobachevsky planimetry.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994

1. Преобразование Боголюбова

Н.Н. Боголюбов [1, с. 215] ввел в теорию сверхтекучести следующее преобразование бозе-амплитуд $B \to \Xi$:

$$\Xi_f = \frac{B_f - L_f\, B^{\otimes}_{-f}}{\sqrt{1 - |L_f|^2}}, \qquad \Xi^{\otimes}_f = \frac{B^{\otimes}_f - L^{\otimes}_f\, B_{-f}}{\sqrt{1 - |L_f|^2}},$$

где L_f - комплексные числа, модули которых меньше, чем 1. Об этом он доложил 21 октября 1946 года на сессии Отделения физико-математических наук АН СССР. Обращая преобразование, находим [1, с.216]

$$B_f = \frac{\Xi_f + L_f\, \Xi^{\otimes}_{-f}}{\sqrt{1 - |L_f|^2}}, \qquad B^{\otimes}_f = \frac{\Xi^{\otimes}_f + L^{\otimes}_f\, \Xi_{-f}}{\sqrt{1 - |L_f|^2}}.$$

Существенно, что числа L_f , $L^{\otimes}_f$ инвариантны при замене

$$f \longrightarrow -f$$

(см. [1, с. 218]). Благодаря этому мы можем рассмотреть одну единственную пару индексов $(f, -f)$ независимо от других пар. Действительно, перейдём к антисимметричным и симметричным комбинациям

$$A_f = \frac{B_f - B_{-f}}{\sqrt{2}}, \qquad C_f = \frac{B_f + B_{-f}}{\sqrt{2}},$$

$$U_f = \frac{\Xi_f - \Xi_{-f}}{\sqrt{2}}, \qquad V_f = \frac{\Xi_f + \Xi_{-f}}{\sqrt{2}}.$$

Последние преобразуются следующим образом:

$$U_f = \frac{A_f + L_f A_f^{\otimes}}{\sqrt{1 - |L_f|^2}} , \qquad U_f^{\otimes} = \frac{A_f^{\otimes} + L_f^{\otimes} A_f}{\sqrt{1 - |L_f|^2}} ,$$

$$V_f = \frac{C_f - L_f C_f^{\otimes}}{\sqrt{1 - |L_f|^2}} , \qquad V_f^{\otimes} = \frac{C_f^{\otimes} - L_f^{\otimes} C_f}{\sqrt{1 - |L_f|^2}} .$$

Очевидно, эти преобразования эквивалентны исходному, но в нём участвует только один индекс f, который писать больше не будем, поскольку будем рассматривать эти преобразования при одном значении индекса f.

Число L представим в виде

$$L = th \frac{s}{2} e^{i\varphi} \tag{1}$$

и в результате получим

$$\begin{aligned} U &= A\, ch \frac{s}{2} + A^{\otimes} sh \frac{s}{2} e^{i\varphi} \\ U^{\otimes} &= A^{\otimes} ch \frac{s}{2} + A\, sh \frac{s}{2} e^{-i\varphi} \end{aligned} \tag{2}$$

для антисимметричной комбинации и

$$\begin{aligned} V &= C\, ch \frac{s}{2} - C^{\otimes} sh \frac{s}{2} e^{i\varphi} \\ V^{\otimes} &= C^{\otimes} ch \frac{s}{2} - C\, sh \frac{s}{2} e^{-i\varphi} \end{aligned} \tag{3}$$

для симметричной комбинации. Преобразование (2) обратно к преобразованию (3). Оно получается из преобразования (3) при замене угла φ на угол $\varphi + \pi$ (или при замене длины s на $-$ s). Поэтому достаточно рассмотреть преобразование (3).

Перейдём в (3) от операторов C, $C^{\otimes}$ и V, $V^{\otimes}$

к самосопряженным операторам

$$X = \frac{1}{2} (C + C^{\otimes}) , \qquad Y = \frac{1}{2i} (C - C^{\otimes}) , \tag{4}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{2} (V + V^{\otimes}) , \qquad \bar{Y} = \frac{1}{2i} (V - V^{\otimes}) . \tag{5}$$

В этом базисе линейное преобразование (3) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= (ch \frac{s}{2} + sh \frac{s}{2} \cos\varphi) X + sh \frac{s}{2} \sin\varphi\, Y , \\ \bar{Y} &= sh \frac{s}{2} \sin\varphi\, X + (ch \frac{s}{2} - sh \frac{s}{2} \cos\varphi) Y . \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, преобразование Боголюбова представляется действительной матрицей

$$\begin{bmatrix} ch \frac{s}{2} + sh \frac{s}{2} \cos\varphi & sh \frac{s}{2} \sin\varphi \\ sh \frac{s}{2} \sin\varphi & ch \frac{s}{2} - sh \frac{s}{2} \cos\varphi \end{bmatrix} , \tag{7}$$

определитель которой равен 1. Легко убедиться, что матрица (7) равна произведению

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{s/2} & 0 \\ 0 & e^{-s/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} . \tag{8}$$

Поэтому все такие матрицы с различными значениями гиперболического угла s, но с одним и тем же значением обыкновенного угла φ относительно обычного умножения матриц составляют группу. Эта группа изоморфна специальной группе Лоренца, причём s является аддитивным параметром. Она же изоморфна группе сдвигов плоскости Лобачевского вдоль прямой, задаваемой полярным углом φ . Для понимания этого надо познакомиться с планиметрией Лобачевского, созданной Лобачевским в 1826 году, и с моделью этой планиметрии, построенной Пуанкаре в 1881 году.

2. Орициклическая ситема координат Лобачевского

Рассмотрим на плоскости Лобачевского прямоугольный четырёхугольник, составленный двумя отрезками орициклов $o\,a_1$ и $a_2\,a$ и двумя прямолинейными отрезками $o\,a_2$ и $a_1\,a$ (см. рис. 1). Будем считать, что прямолинейные отрезки параллельны в сторону от o к a_2. Обозначим через x длину первого орициклического отрезка, через x' длину второго орициклического отрезка, через y длину первого прямолинейного отрезка и через y' длину второго прямолинейного отрезка. Как доказал Лобачевский [2, с. 107],

$$y' = y\,, \quad x' = x\,exp\,\{-\frac{y}{k}\}\,, \tag{9}$$

где k – характерная для новой геометрии константа.

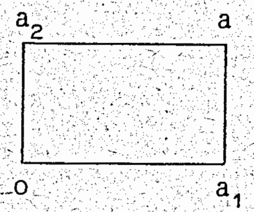

Рис. 1

Считая, что x и y могут принимать не только положительные, но и нулевые и отрицательные значения, вводим на плоскости Лобачевского координатную карту с осями $o\,a_1$ и $o\,a_2$, покрывающую всю плоскость. Координатные линии $x = x_0$ являются прямыми на плоскости Лобачевского, а координатные линии $y = y_0$ являются орициклами. Координаты x, y называем орициклическими координатами Лобачевского. Согласно (9) в

этих координатах квадрат расстояния от точки а до бесконечно близкой к ней точки равен

$$d\,s^2 = (d\,x')^2 + (d\,y')^2 = exp\,\{-\frac{2\,y}{k}\}\,d\,x^2 + d\,y^2\,. \tag{10}$$

3. Орисферическая система координат Пуанкаре

Введя новые координаты

$$\xi = \frac{x}{k}\,, \quad \eta = exp\,\{\frac{y}{k}\}\,, \tag{11}$$

запишем метрику (10) в виде

$$d\,s^2 = k^2\,\frac{d\,\xi^2 + d\,\eta^2}{\eta^2}\,. \tag{12}$$

Координаты (11) называем орициклическими координатами Пуанкаре.

4. Уравнение прямой в координатах Пуанкаре

На плоскости Лобачевского, как и на плоскости Евклида, через каждые две точки можно провести прямую линию и при том только одну. Найдём уравнение такой линии в орициклических координатах Пуанкаре. Так как метрика (12) не зависит от координаты ξ, то уравнение прямой линии удобно искать в виде

$$\xi = \xi\,(\eta)\,. \tag{13}$$

Согласно (12) длина всякого криволинейного отрезка, задаваемого уравнением вида (13), равна

$$\int L\,d\,\eta\,, \tag{14}$$

где

$$L = \frac{k}{\eta} \sqrt{1 + \dot{\xi}^2} \,, \qquad (15)$$

а через $\dot{\xi}$ обозначена производная функции (13) по η. Прямая линия, будучи кратчайшей, задаётся уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{d\,\xi} \; \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0 \,, \qquad (16)$$

которое в данном случае сразу интегрируется:

$$\frac{\dot{\xi}}{\eta \sqrt{1 + \dot{\xi}^2}} = C \,. \qquad (17)$$

Здесь C – константа интегрирования.

При $C = 0$ получаем известные нам по построению прямые

$$\xi = \mathrm{const} \,. \qquad (18)$$

Если две точки с разными координатами η_1 и η_2 имеют одинаковые координаты $\xi_1 = \xi_2 = \chi$, то проходящая через них прямая принадлежит пучку (18) и задаётся уравнением $\xi = \chi$. Алгебраическое расстояние между такими точками по определению координаты y равно $s_{12} = y_2 - y_1$. То же самое даёт и интеграл (14):

$$s_{12} = k \,(\, ln\, \eta_2 - ln\, \eta_1 \,) \,. \qquad (19)$$

При $C \neq 0$ обозначим $R = 1 \,/\, |C|$ и разрешим уравнение (17) относительно $\dot{\xi}$:

$$\frac{d\,\xi}{d\,\eta} = \pm \frac{\eta}{\sqrt{R^2 - \eta^2}} \,. \qquad (20)$$

Интегрируя это, находим

$$(\, \xi - \xi_0 \,)^2 + \eta^2 = R^2 \,, \qquad (21)$$

где ξ_0 – константа интегрирования. Уравнение (21) является уравнением прямой на плоскости Лобачевского в орициклических координатах Пуанкаре (если эта прямая не входит в состав рассмотренного выше пучка прямых $\xi = \mathrm{const}$).

Чтобы найти формулу для расстояния s_{12} между точками $(\xi_1 \,, \eta_1)$ и $(\xi_2 \,, \eta_2)$, запишем уравнение прямой (21) в параметрическом виде, а именно:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + R\, cos\, \psi \,, \\ \eta &= \quad\;\; R\, sin\, \psi \,. \end{aligned} \qquad (22)$$

Так как $\eta > 0$, то $0 < \psi < \pi$. Согласно (14) и (15)

$$s_{12} = k \int \frac{d\,\psi}{sin\,\psi} \,, \qquad (23)$$

где интеграл берётся от ψ_1 до ψ_2. Так как

$$\frac{d\,\psi}{sin\,\psi} = d\; ln\; tg\, \frac{\psi}{2} \,,$$

то

$$s_{12} = k \,(ln\; tg\, \frac{\psi_2}{2} - ln\; tg\, \frac{\psi_1}{2}) \,. \qquad (24)$$

После недлинного ряда тригонометрических преобразований отсюда получается формула

$$ch\, \frac{s_{12}}{k} = \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2}{2\,\eta_1\,\eta_2} \,. \qquad (25)$$

Последняя верна и при $\xi_2 = \xi_1$.

6. Модель Пуанкаре

На простом двумерном многообразии, покрытом координатами $\xi \in (-\infty, \infty)$ и $\eta \in (0, \infty)$, наряду с метрикой (12) рассмотрим вспомогательную метрику

$$d\,\xi^2 + d\,\eta^2 , \tag{26}$$

пропорциональную метрике (12). Тем самым мы зададим конформное отображение плоскости Лобачевского на евклидову полуплоскость $\eta > 0$ и, наоборот, конформное отображение евклидовой полуплоскости $\eta > 0$ на всю плоскость Лобачевского. При этом прямые (18) в смысле метрики (12) изображаются "половинами" прямых в смысле метрики (26), а прямые (21) в смысле метрики (12) изображаются "половинами" окружностей (с центрами, лежащими на оси $\eta = 0$) в смысле метрики (26). Углы при пересечении прямых в смысле метрики (12) совпадают с углами при пересечении прямых в смысле метрики (26). Поэтому отображение называется конформным. Эту модель планиметрии Лобачевского построил Пуанкаре. Отобразив конформно евклидову полуплоскость на плоскость Лобачевского, Пуанкаре добился решающих результатов в теории фуксовых (или, как говорят теперь, автоморфных) функций. По свидетельству самого Пуанкаре, геометрия Лобачевского оказала ему неоценимые услуги [3, с. 15].

6. Главная формула Лобачевского

Пусть L – некоторая прямая на плоскости Лобачевского и O – точка, на ней не лежащая. Опустим из точки o перпендикуляр o a на прямую L. Прямые, лежащие на плоскости

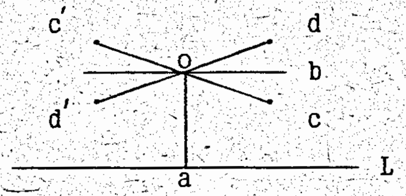

Рис. 2

o L и проходящие через точку o, разбиваются на два класса: те из них, которые пересекают L, относятся к одному классу, а те, которые не пересекают L – к другому. Эти классы непусты, поскольку к первому классу относится прямая o a, а ко второму классу – прямая o b, ортогональная к прямой o a. Пятый постулат Евклида утверждает, что во втором классе нет прямых, не совпадающих с прямой o b. Отказавшись от пятого постулата Евклида, Лобачевский тем самым допустил, что прямые второго класса зачерчивают некоторый отличный от нуля угол d o c и противоположный ему угол. При этом прямые первого класса должны проходить внутри угла c o d′.

При такой альтернативе известное евклидово определение параллельности прямых нуждается в уточнении, потому что, приняв его, мы должны были бы называть прямыми, параллельными прямой L, не только прямую o b, но и все прямые определённого выше второго класса. Между тем, прямые o c и o d′, являясь граничными, занимают во втором классе особое место. Именно их-то Лобачевский и назвал прямыми, параллельными исходной прямой L, добавляя, что граничная прямая o c параллельна прямой L в одну сторону, а граничная прямая o d′ – в другую. Остальные прямые из второго класса он назвал прямыми, расходящимися с L. Угол a o c Лобачевский назвал углом параллельности и обозначил П. Он доказал [2, с.120], что угол П связан с длиной p перпендикуляра o a зависимостью

$$tg\,\frac{\Pi}{2} = exp\left(-\,\frac{p}{k}\right). \tag{27}$$

Эту зависимость нетрудно согласовать с формулой (24). На рисунке 3 наряду с прямой (22) изображены две параллельные прямые – прямая $\xi = \xi_0 + R\,cos\,\Pi$, пересекающая прямую (22) под углом П, и прямая $\xi = \xi_0$, перпендикулярная к прямой (22). Длину p перпендикуляра o a можно найти по формуле (24), полагая $\psi_1 = \Pi$, $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$, $s_{12} = p$. В результате получается формула (27). Ввиду конформности модели Пуанкаре доказать равенства $\psi_1 = \Pi$, $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ можно с помощью планиметрии Евклида.

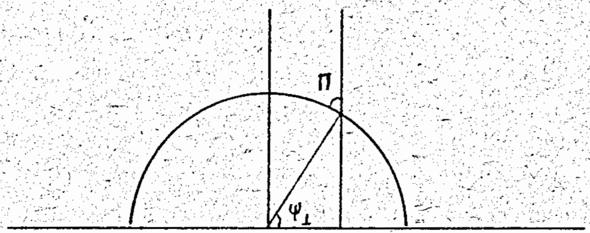

Рис. 3

7. Площадь треугольника в планиметрии Лобачевского

Треугольник на плоскости Лобачевского (в отличие от треугольника на плоскости Евклида) можно однозначно задать его углами X, Y, Z (при условии, что их сумма меньше π). Его площадь равна

$$F = k^2 (\pi - X - Y - Z) . \tag{28}$$

Для доказательства этой формулы продолжим стороны треугольника так, как это указано на рисунке 4. К каждой паре лучей, выходящих из одной и той же вершины треугольника, проведём параллельную прямую. Так проведённые прямые попарно параллельны и составляют полностью вырожденный треугольник, все углы которого равняются нулю, а вершины лежат в бесконечности. Обозначим его площадь через F_0. Он составлен

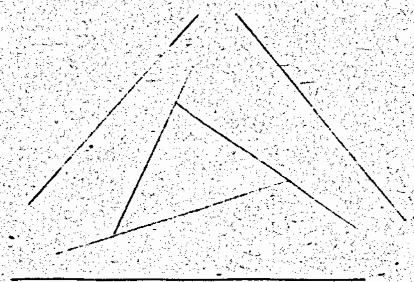

Рис. 4

(Эта конфигурация указана Гауссом как раз в связи с вопросом о сумме углов треугольника)

из трёх вырожденных треугольников и исходного треугольника с углами X, Y, Z. В каждом из этих частично вырожденных треугольников два угла равны нулю. Остальные углы равны в одном $\pi - X$, в другом $\pi - Y$, в третьем $\pi - Z$. Обозначим их площади F_1, F_2, F_3. Как видно,

$$F_0 = F_1 + F_2 + F_3 + F . \tag{29}$$

С помощью модели Пуанкаре нетрудно найти площади вырожденных треугольников. В качестве базисного пучка прямых, приведших нас к модели Пуанкаре, выберем пучок прямых, параллельных двум сторонам вырожденного треугольника. Тогда стороны полностью вырожденного треугольника представятся уравнениями

$$\xi = \xi_0 - R, \quad \eta = \sqrt{R^2 - (\xi - \xi_0)^2} , \quad \xi = \xi_0 + R . \tag{30}$$

На рисунке 5 изображён такой треугольник в модели Пуанкаре.

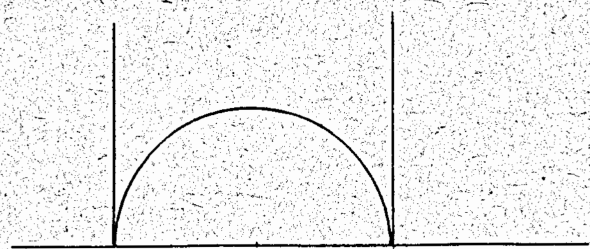

Рис. 5

Стороны же частично вырожденного треугольника с отличным от нуля углом, равным $\pi - X$, можно представить уравнениями

$$\xi = \xi_0 - R, \quad \eta = \sqrt{R^2 - (\xi - \xi_0)^2} , \quad \xi = \xi_0 - R \cos X . \tag{31}$$

Такой треугольник в модели Пуанкаре изображён на рисунке 6.

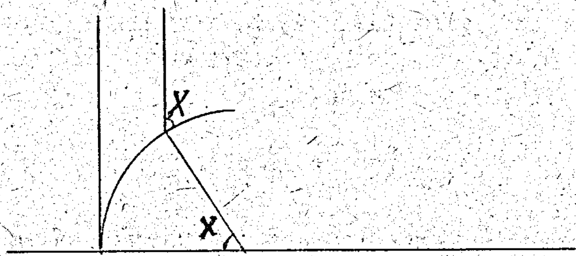

Рис. 6

Далее, так как координаты ξ, η ортогональны, то элемент $d\sigma$ площади на плоскости Лобачевского равен произведению длин элементарных смещений по координатным линиям, то есть

$$d\sigma = \frac{k\,d\xi}{\eta}\ \frac{k\,d\eta}{\eta} = k^2\ \frac{d\xi\,d\eta}{\eta^2}\ . \qquad (32)$$

Следовательно, площадь F_1 равна интегралу

$$\int_{\xi_0-R}^{a} k^2\,d\xi \int_{\surd}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} = k^2 \int_{\xi_0-R}^{a} \frac{d\xi}{\surd} = k^2 \int_0^X d\varphi = X k^2,$$

где

$$\surd = \sqrt{R^2 - (\xi - \xi_0)^2}\ , \qquad a = \xi_0 - R\cos X.$$

Интеграл взят с помощью замены переменной $\xi = \xi_0 - R\cos\varphi$. Как предельный случай отсюда получаем

$$F_0 = \pi k^2\ . \qquad (33)$$

Кроме того имеем

$$F_1 = k^2 X\ , \quad F_2 = k^2 Y\ , \quad F_3 = k^2 Z\ . \qquad (34)$$

Из (29), (33) и (34) следует (28).

Лобачевский полагал $k = 1$. Нам приятно последовать его примеру, тем более что с фундаментальными константами аналогично поступают авторы современных монографий по теоретической физике (например, в [5] положено $\hbar = c = 1$).

8. Группа изометрий плоскости Лобачевского

Из двух вещественных координат ξ и η Пуанкаре составил одну комплексную координату $z = \xi + i\,\eta$ и нашёл, что группа изометрий плоскости Лобачевского изоморфна группе дробно-линейных преобразований

$$\tilde z = \frac{A\,z + B}{C\,z + D}\ , \qquad (35)$$

где коэффициенты A, B, C, D вещественны и удовлетворяют условию

$$A\,D - B\,C = 1\ . \qquad (36)$$

Полагая $\tilde z = \tilde\xi + i\,\tilde\eta$, находим группу изометрий плоскости Лобачевского в орициклических координатах Пуанкаре

$$\tilde\xi = \frac{A\,C\,(\xi^2 + \eta^2) + (A\,D + B\,C)\,\xi + B\,D}{C^2\,(\xi^2 + \eta^2) + 2\,C\,D\,\xi + D^2}\ ,$$

$$\tilde\eta = \frac{\eta}{C^2\,(\xi^2 + \eta^2) + 2\,C\,D\,\xi + D^2}\ . \qquad (37)$$

Имеем также

$$\tilde\xi^2 + \tilde\eta^2 = \frac{A^2\,(\xi^2 + \eta^2) + 2\,A\,B\,\xi + B^2}{C^2\,(\xi^2 + \eta^2) + 2\,C\,D\,\xi + D^2}\ , \qquad (38)$$

$$d\tilde{z} = \frac{dz}{(Cz + D)^2}\,. \qquad (39)$$

$$\frac{|d\tilde{z}|}{\tilde{\eta}} = \frac{|dz|}{\eta}\,. \qquad (40)$$

Последняя формула означает, что условие изометричности выполняется.

Подчеркнём, что каждой вещественной матрице

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \qquad (41)$$

удовлетворяющей условию (36), соответствует изометрия (37), причём произведению таких матриц соответствует произведение соответствующих изометрий.

9. Преобразования Боголюбова и полярная система координат на плоскости Лобачевского

Если подстановка (35) удовлетворяет условию

$$B = C, \qquad (42)$$

то можно положить

$$A = ch\,\frac{s}{2} + sh\,\frac{s}{2}\cos\varphi, \quad B = sh\,\frac{s}{2}\sin\varphi,$$
$$C = sh\,\frac{s}{2}\sin\varphi, \quad D = ch\,\frac{s}{2} - sh\,\frac{s}{2}\cos\varphi. \qquad (43)$$

Множество таких подстановок не является подгруппой группы изометрий, однако оно интересно в другом отношении: его удобно отобразить на плоскость Лобачевского с отмеченной точкой, выбранной в качестве начала полярной системы

координат s, φ. Пусть это будет точка $z = i$ (то есть точка $\xi = 0$, $\eta = 1$), а φ – угол, отсчитываемый по часовой стрелке от оси η. Проведём через эту точку луч под углом φ к оси η и на этом луче отметим точку z, отстоящую от точки $z = i$ на расстоянии s (см. рис. 7). Тем самым каждому преобразованию Боголюбова мы ставим в определённое соответствие точку, лежащую на плоскости Лобачевского, и, наоборот, при выбранной полярной системе координат, каждой точке, лежащей на плоскости Лобачевского, мы ставим в определённое соответствие преобразование Боголюбова.

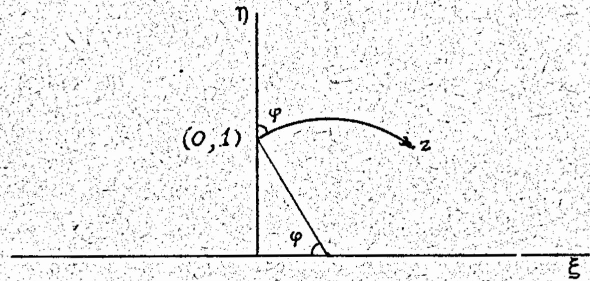

Рис. 7

Можно встать на иную точку зрения и сказать, что каждому преобразованию Боголюбова мы поставили в соответствие изометрию плоскости Лобачевского, смещающую начало координат по азимуту φ на расстояние s. При заданном азимуте φ множество таких преобразований является группой. Равным образом и множество преобразований Боголюбова при заданном азимуте φ является (однопараметрической) группой.

10. Специальные преобразования Боголюбова

Специальное преобразование Боголюбова получается из общего, если положить $\varphi = 0$. Такие преобразования образуют группу. Согласно (43) при этом

$$A = D^{-1} = exp\,\frac{s}{2}\,, \quad B = C = 0\,. \qquad (44)$$

Специальному преобразованию Боголюбова мы сопоставляем здесь следующее преобразование плоскости Лобачевского в в модели Пуанкаре:

$$\tilde{z} = z \, exp \, s \, . \tag{45}$$

О специальных преобразованиях Боголюбова см. [6].

С другой стороны, интересно дополнить преобразования Боголюбова до группы, изоморфной группе изометрий плоскости Лобачевского, сняв условие (42).

11. Отображение плоскости Лобачевского на гиперболоид

В восьмидесятых годах (прошлого века) Пуанкаре заметил, что геометрия Лобачевского реализуется на гиперболоиде, лежащем в аффинном пространстве со знаконеопределённой метрикой [7]. Отсюда следует, что группа Лоренца изоморфна группе изометрий пространсва Лобачевского. Неудивительно, что именно Пуанкаре ввёл в физику термины "преобразования Лоренца" и "группа Лоренца".

Отображение плоскости Лобачевского на полу $P_0 > 0$ гиперболоида

$$P_0 P_0 - P_1 P_1 - P_2 P_2 = 1 \tag{46}$$

достигается с помощью формул

$$P_0 = ch \, s \, , \quad P_1 = sh \, s \, cos \, \varphi \, , \quad P_2 = sh \, s \, sin \, \varphi \tag{47}$$

или, что всё равно,

$$P_0 = \frac{\xi^2 + \eta^2 + 1}{2 \eta} \, , \; P_1 = \frac{\xi}{\eta} \, , \; P_2 = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{2 \eta} \, . \tag{48}$$

Переход от орициклических координат ξ, η к полярным координатам ρ, φ достигается следующим образом. Согласно (25) косинус гиперболический расстояния ρ от точки (0,1) до точки (ξ, η) равен

$$ch \, \rho = \frac{\xi^2 + \eta^2 + 1}{2 \eta} \, , \tag{49}$$

а прямая Лобачевского, отмеченная на фигуре 7 стрелкой, задаётся уравнением (21) при $R \, cos \, \varphi = \xi_0$, $R \, sin \, \varphi = 1$, откуда

$$tg \, \varphi = \frac{2 \xi}{\xi^2 + \eta^2 - 1} \, . \tag{50}$$

12. Преобразования Боголюбова и преобразования Лоренца

В результате подстановки (48) преобразование Боголюбова представится формулами Герглотца [8,9]

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_0 &= P_0 \, ch \, s + (P_1 \, sin \, \varphi + P_2 \, cos \, \varphi) \, sh \, s, \\
\tilde{P}_1 &= P_0 \, sh \, s \, sin \, \varphi + P_1 + \\
&\quad + (P_1 \, sin \, \varphi + P_2 \, cos \, \varphi)(ch \, s - 1) \, sin \, \varphi, \\
\tilde{P}_2 &= P_0 \, sh \, s \, cos \, \varphi + P_2 + \\
&\quad + (P_1 \, sin \, \varphi + P_2 \, cos \, \varphi)(ch \, s - 1) \, cos \, \varphi.
\end{aligned} \tag{48}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н. *К теории сверхтекучести.* Избранные труды в трёх томах. Киев : Наукова думка, 1970. Т. 2, с. 210 - 224.
2. Лобачевский Н.И. *Геометрические исследования по теории параллельных линий.* Полн. собр. соч. М.-Л. : ГИТТЛ, 1946. Т. 1, с. 79 - 127.
3. Пуанкаре А. *Теория фуксовых групп.* Избранные труды в трёх томах. М. : Наука, 1974. Т. 3, с. 9 - 62.
4. Гаусс К.Ф. Письмо к Фаркашу. Больаи (6 марта 1832). В кн. [7]. с. 113-117.
5. Боголюбов Н.Н. , Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. 3 - изд. М.: Наука, 1976.
6. Боголюбов Н.Н. *Вопросы теории сверхтекучести Бозе- и Ферми-систем.* Избранные труды в трёх томах. Киев : Наукова думка, 1971. Т. 3, с. 11-16.
7. Пуанкаре А. *Об основных гипотезах геометрии.* В кн.: Об основаниях геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 388 - 398.
8. Паули В. *Теория относительности.* М.-Л.: ГИТТЛ, 1947.С.24.
9. Herglotz G. Ann. d. Phys., **36**, 497, 1911.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 декабря 1994 года.